

SPELEN MET KROMMEN

JAN AARTS

1. INLEIDING

Een bezoekje aan de website www.mathcurve.com/courbes2D laat zien dat er gigantisch veel informatie over krommen beschikbaar is. In een rondleiding hoop ik u de schoonheid van de krommen en hun onderlinge relaties te laten zien. Van de relaties tussen krommen bespreken we *voetpuntenkrommen*, *roulettes* en *evoluten en involuten*. De bespreking is beperkt tot vlakke krommen. Niet dat ruimtekrommen niet interessant zouden zijn, verre van dat, maar bij de studie van ruimtekrommen voelt men een beperking door moeizame ruimtelijke voorstelling en tekort schietend ruimtelijk inzicht. Verder nemen we aan dat alle beschouwde krommen stuksgewijs continu differentieerbaar zijn; fractals worden dus niet in beschouwing genomen.

We moeten ergens beginnen, vandaar. . . .

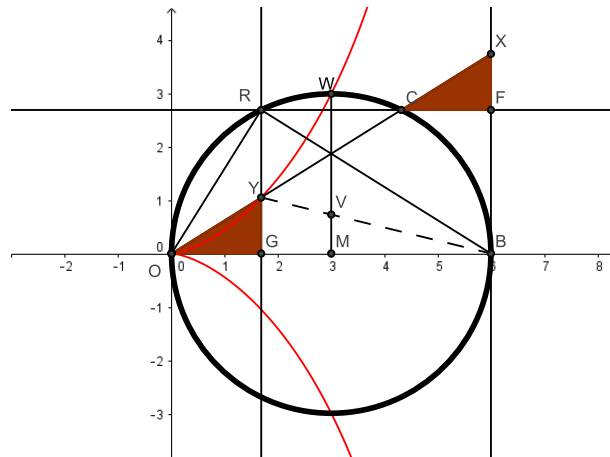


FIGURE 1. De cissoïde

Date: January 28, 2017.

1.1. De cissoïde van Diocles. Zij gegeven de cirkel met middelpunt M , straal a en middellijn OB , figuur 1. Voor iedere X op de raaklijn in B trekt men de lijn OX . Op deze lijn zet men af het lijnstuk OY dat even lang is als het lijnstuk CX tussen de cirkel en de raaklijn. De **cissoïde van Diocles** is de meetkundige plaats van de punten Y . Het punt O wordt de pool van de cissoïde genoemd. Merk op dat W op de cissoïde ligt. De kromme dankt zijn naam aan het feit dat het gebied tussen cirkel en kromme de vorm heeft van een klimopblaadje ($\kappa\iota\sigma\sigma\omicron\varsigma$ =klimop).

Met CF evenwijdig aan de x -as is $\triangle OYG \cong \triangle CXF$. Omdat $OG = CF$, is $\widehat{OR} = \widehat{BC}$, en dus $\angle RBO = \angle BOC$; en beide hoeken zijn ook gelijk aan $\angle GRO = \vartheta$. Dan is $OG = OR \sin(\vartheta) = 2a \sin^2(\vartheta)$ en $GR = OQ \tan(\vartheta)$. Dus $Y = (2a \sin^2(\vartheta), 2a \sin^3(\vartheta)/\cos(\vartheta))$, waarbij $-\pi/2 < \vartheta < \pi/2$. Met $t = \tan(\vartheta)$ komt er de parametervoorstelling $x = \frac{2at^2}{1+t^2}$, $y = \frac{2at^3}{1+t^2}$ met $-\infty < t < \infty$. De coördinatenvergelijking luidt: $x(x^2 + y^2) = 2ay^2$.

We zien dat $\frac{OG}{GY} = \frac{RG}{OG} = \frac{GB}{RG}$ en dus $\left(\frac{OG}{YG}\right)^3 = \frac{GB}{GY} = \frac{WM}{VM}$.

Hieruit blijkt dat de cissoïde gebruikt zou kunnen worden bij de *verdubbeling van de kubus*.

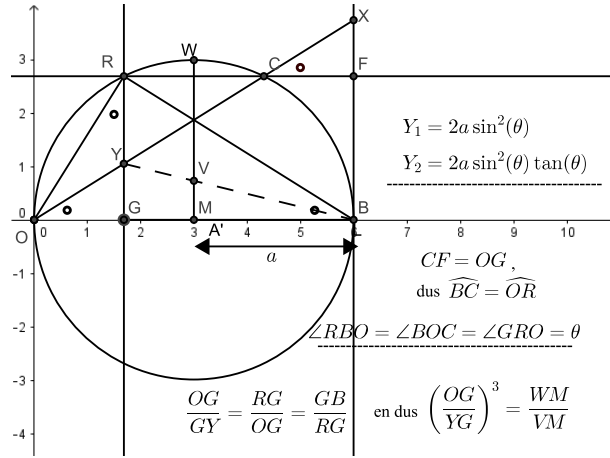


FIGURE 2. Bewijs bij de cissoïde

1.2. Kegelsneden. De **kegelsneden** zijn door **Apollonius** ingevoerd als doorsneden van een kegel met een vlak. Ze zijn dus centrale projecties van een cirkel (vanuit de top van de kegel langs de beschrijvende). We onderscheiden

- parabool

- ellips (waaronder cirkel), figuur 3
- hyperbool, figuur 4

In 1867 gaf **Steiner** een synthetische definitie met behulp van projectieve lijnenwaaiers. Bekend is de definitie van de **ellips** als de meetkun-

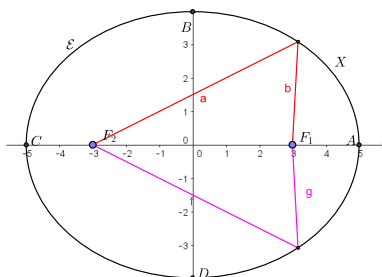


FIGURE 3. De ellips

dige plaats van de punten waarvoor de som van de afstanden tot twee **brandpunten** F_1 en F_2 constant is. Wanneer je hierin de som vervangt door de absolute waarde van het verschil dan krijg je een definitie van de **hyperbool**, figuur 4.

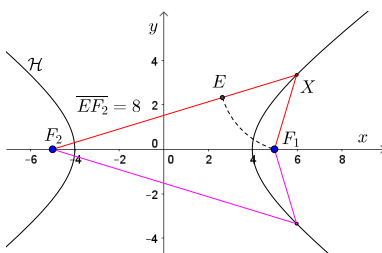


FIGURE 4. De hyperbool

2. VOETPUNTENKROMMEN

Het eerste verband dat we bespreken is de constructie van de voetpuntenkromme. Het betreft hier een constructie punt voor punt van een nieuwe kromme uit een gegeven kromme.

2.1. De rechte strophoïde. We beschouwen de parabool $y^2 = 2px$. Het brandpunt is $F = (\frac{1}{2}p, 0)$ en de richtlijn heeft de vergelijking $x = -\frac{1}{2}p$. Met de pool in het punt A , dat is het snijpunt van de richtlijn en de x -as, vind je de rechte strophoïde als voetpuntenkromme, figuur 5. Wat is hier nou zo recht aan? Wel, de raaklijnen in de pool aan de strophoïde staan loodrecht op elkaar, zoals men (echt) eenvoudig na kan rekenen.

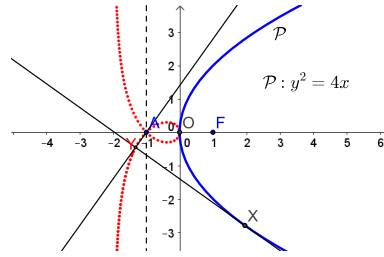


FIGURE 5. De rechte strophoïde

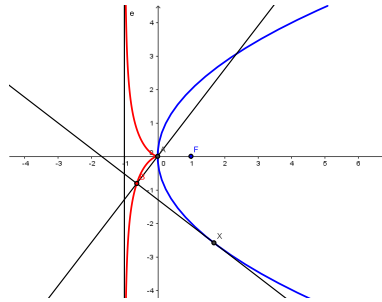


FIGURE 6. Nogmaals de cissoïde

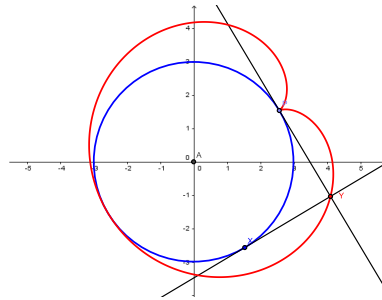


FIGURE 7. Eerste optreden cardioïde

2.2. Nogmaals de cissoïde. Maar de vorm van de voetpuntenkromme hangt niet alleen af van de keuze van de kromme, maar ook van de keuze van de pool. Beschouwen we dezelfde parabool als zoëven, maar berekenen we nu de voetpuntenkromme bij de pool in de top van de parabool dan vinden we de cissoïde, figuur 6.

2.3. De cardioïde. We sporen een voetpuntenkromme van de cirkel op. Als de pool ligt op de cirkel dan is de voetpuntenkromme een **cardioïde**, figuur 7.

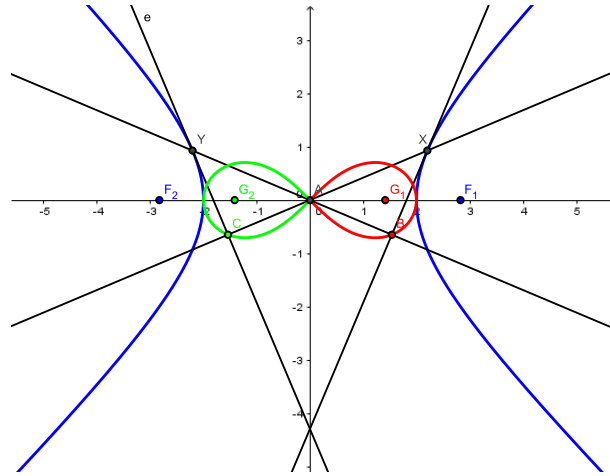


FIGURE 8. De lemniscaat van Bernoulli

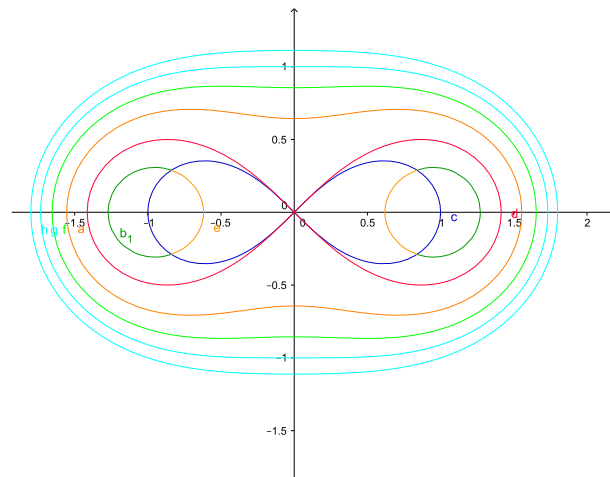


FIGURE 9. Ovalen van Cassini

2.4. De lemniscaat van Bernoulli. We bekijken nu de orthogonale hyperbool $x^2 - y^2 = a^2$. Met de pool in het midden van het verbindingslijnstuk van de brandpunten F_1 en F_2 vinden we als voetpuntenkromme de **lemniscaat van Bernoulli** met uitzondering van het knooppunt O , figuur 8. Met $G_1 = (a/\sqrt{2}, 0)$ en $G_2 = (-a/\sqrt{2}, 0)$ wordt de lemniscaat beschreven door: $d(X, G_1) \times d(X, G_2) = a^2/2$.

Men rekent eenvoudig na dat de toppen van de hyperbool op de lemniscaat liggen. De eerste publicatie over de lemniscaat is uit 1694 en van de hand van **Jacob Bernoulli**. Die was zich er niet van bewust dat genoemde resultaten al stonden in het werk van **Cassini** over ovalen.

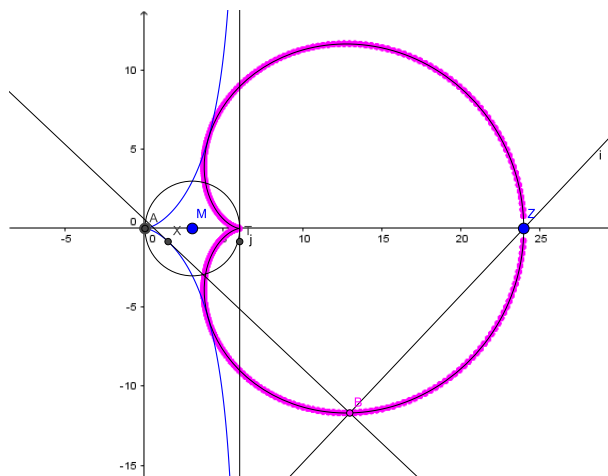


FIGURE 10. Cissoïde en cardioïde

Cassini was geïnteresseerd in de meetkundige plaatsen $\{X : d(X, G_1) \times d(X, G_2) = c^2\}$, waarbij $G_1 = (1, 0)$, $G_2 = (-1, 0)$ en $0 < c < \infty$, figuur 9.

2.5. De cissoïde en de cardioïde. In de figuur 10 is de voetpuntenkromme van de cissoïde met asymptoot $x = a$ getekend. De pool is het punt $(8a, 0)$. De cardioïde is dus een voetpunten-kleinkind van de parabool.

3. ROULETTES

Bij een **roulette** hebben we te maken met 1) een vaste **richtkromme**, 2) een **genererende kromme** die langs de richtkromme rolt en wel zonder slippen, en 3) de **pool**, een punt op de genererende kromme. De richtkromme en de genererende kromme brengen dan samen het spoor van de pool voort: dat is de nieuwe kromme. We bespreken allereerst een tamelijk exotisch voorbeeld. We verwijzen naar de figuur 11. De linker parabool (blauw) is de vaste parabool, de richtkromme. De rechter parabool (rood) is de genererende kromme. De parabolen zijn met hun toppen tegen elkaar geplaatst. We volgen het spoor van de top die dan de pool is. De voortgebrachte kromme is een cissoïde.

3.1. Gewone cycloïde. De bekendste roulettes zijn de **cycloïden**. De gewone cycloïde, of **cycloïde** zonder meer, is het spoor van een punt op een cirkel die (zonder slippen) rolt langs een rechte lijn, figuur 12. Met O als beginpunt is de parametervoorstelling

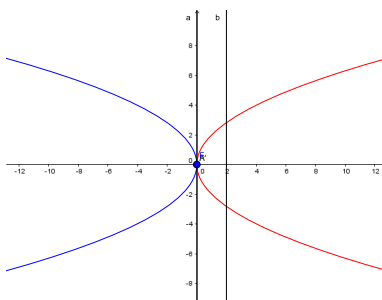


FIGURE 11. Kussende parabolen

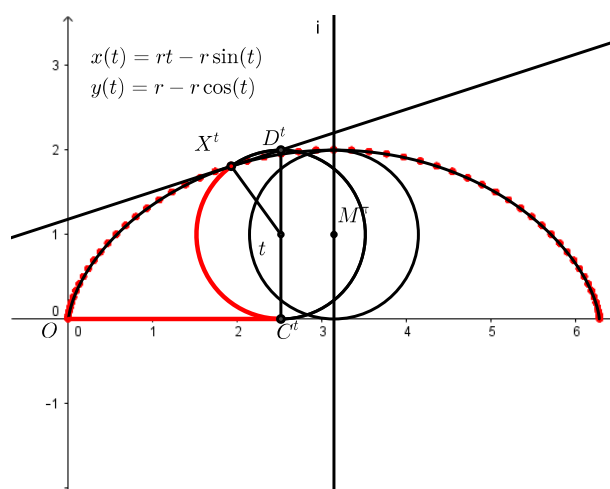


FIGURE 12. Cycloïde

$x(t) = rt - r \sin(t)$ en $y(t) = r - r \cos(t)$. Voor de raakvector komt er

$$\begin{aligned} (x'(t), y'(t)) &= (r - r \cos(t), r \sin(t)) \\ &= 2r \sin(\tfrac{1}{2}t) \left(\sin(\tfrac{1}{2}t), \cos(\tfrac{1}{2}t) \right), \end{aligned}$$

terwijl $X^t D^t = 2r \cos(\tfrac{1}{2}t) \left(\sin(\tfrac{1}{2}t), \cos(\tfrac{1}{2}t) \right)$. De raakvector valt dus langs $X^t D^t$ en staat loodrecht op $X^t C^t$.

3.2. Hypocycloïden. Bij het rollen van cirkels langs cirkels onderscheiden we twee groepen van krommen: een cirkel rolt langs de binnenkant van een andere cirkel, dan wel langs de buitenkant. In het eerste geval ontstaat er een **hypocycloïde** (*hypo* is het Griekse woord voor *onder*) en in het tweede geval ontstaat er een **epicycloïde** (*epi* is het Griekse woord voor *op*). We bespreken eerst een hypocycloïde.

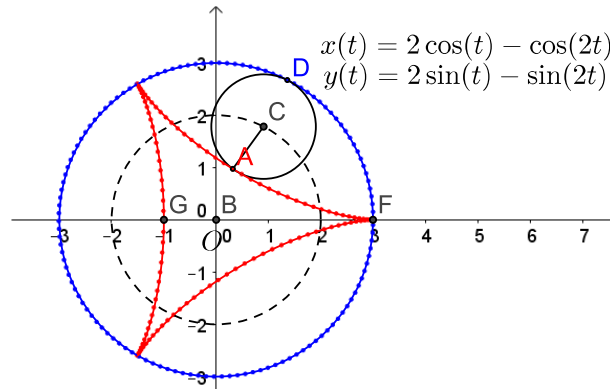


FIGURE 13. De deltoïde

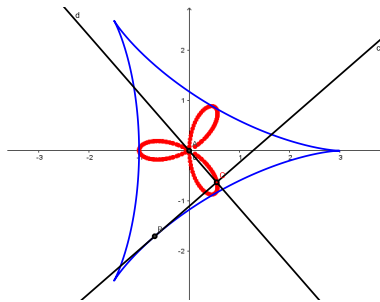


FIGURE 14. Een driebladig rozet

3.3. De deltoïde. Bij deze hypocycloïde is de straal R van de vaste cirkel drie keer de straal r van de rollende cirkel. Hier is een verklaring voor de formules. De rollende cirkel start met contact in F . Het middelpunt C van de rollende cirkel doorloopt een cirkel met straal $2r$; die beweging heeft de parametervoorstelling $x = 2r \cos(t)$ en $y = 2r \sin(t)$. Wanneer de voerstraal OC van de grote cirkel heeft gedraaid over een hoek φ , dan heeft de voerstraal CA van de rollende cirkel in tegengestelde richting gedraaid over een hoek 3φ , dus effectief in het oude coördinatensysteem over -2φ .

3.4. Driebladig rozet. In figuur 14 zie je de voetpuntenkromme van de deltoïde met de pool in het centrum.

3.5. Folium. Wanneer je de pool in een keerpunt kiest ontstaat er een enkel blad: het folium, figuur 15.

3.6. De epicycloïde. Bij deze epicycloïde is de straal R van de vaste cirkel drie keer de straal r van de rollende cirkel, figuur 16. Hier is

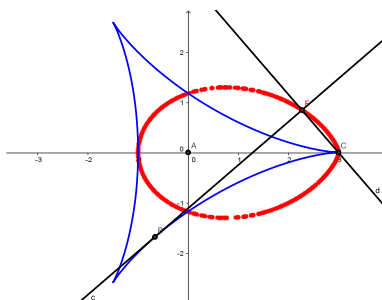


FIGURE 15. Het folium

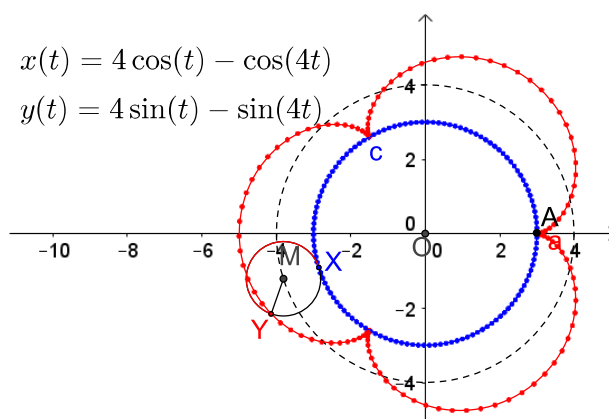


FIGURE 16. De epicycloïde met drie keerpunten

een verklaring voor de formules. De rollende cirkel start met contact in A . Het middelpunt M van de rollende cirkel doorloopt een cirkel met straal $4r$; die beweging heeft de parametervoorstelling $x = 4r \cos(t)$ en $y = 4r \sin(t)$. Wanneer de voerstraal OA van de grote cirkel heeft gedraaid over een hoek φ , dan heeft de voerstraal MY van de rollende cirkel in dezelfde richting gedraaid over een hoek 3φ , dus effectief in het oude coördinatensysteem over 4φ .

3.7. De cardioïde. De epicycloïde die aller harten gestolen heeft is de cardioïde, figuur 17.

4. EVOLUTEN EN INVOLUTEN

De begrippen *evolute* en *involute* zijn ingevoerd door **Christiaan Huygens** in zijn werk *Horologium Oscillatorium*. We beginnen met de analyse van de beweging van de cycloïde.

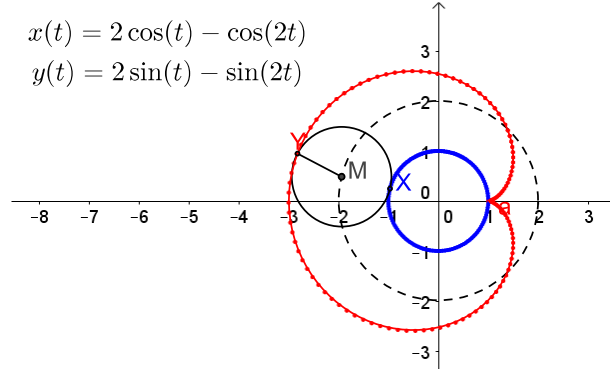


FIGURE 17. De cardioïde

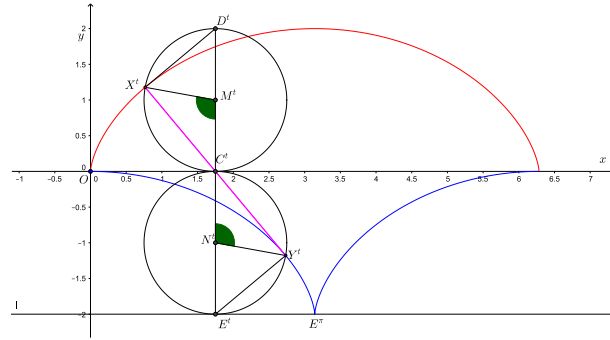


FIGURE 18. De cycloïde in beweging

4.1. De cycloïde in beweging. Naast de cirkel met middelpunt M^t en straal r die langs de bovenkant van de x -as rolt beschouwen we in figuur 18 ook de beweging van een evengrote cirkel met middelpunt N^t die aan de onderkant van de x -as rolt over de lijn $y = -2r$. Verder is $X^0 = Y^0 = O$. We weten al $X^t = (rt - r \sin(t), r - r \cos(t))$. Nu is $Y^t = (rt + r \sin(t), -r + r \cos(t))$. Daaruit vindt men dat de afstand van X^t tot Y^t gelijk is aan $4r \sin(\frac{1}{2}t)$. De lengte van de cycloïdeboog $\widehat{OY^t}$ berekent men op de bekende wijze met het resultaat

$$\widehat{OY^t} = \int_0^t \sqrt{(r + r \cos(t))^2 + r^2 \sin^2(t)} dt = 4r \sin(\frac{1}{2}t).$$

Uit de berekeningen concluderen we dat de lengte van het lijnstuk X^tY^t gelijk is aan de lengte van de cycloïdeboog OY^t van de onderste cycloïde.

Bij de bespreking van de cycloïde, paragraaf 3.1, hebben we vastgesteld dat de raaklijn X^tD^t loodrecht staat op C^tX^t . Op dezelfde wijze staat Y^tE^t loodrecht op Y^tC^t . *Iedere raaklijn aan de onderste cycloïde is een normaal van de bovenste cycloïde en, omgekeerd, is*

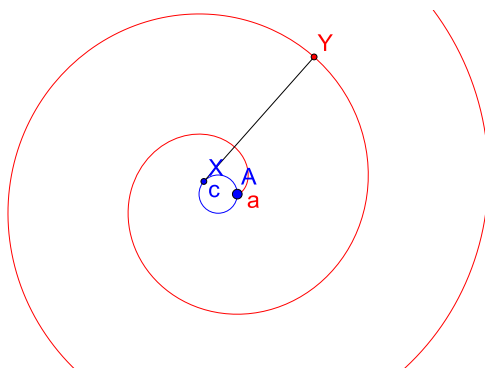


FIGURE 19. De involute van een cirkel

iedere normaal van de bovenste cycloïde een raaklijn aan de onderste cycloïde.

4.2. Evolute en involute. We volgen nu (bijna letterlijk) het betoog van **Christiaan Huygens** in hoofdstuk 3 van het *Slingeruurwerk*. Als nu langs de boog OE^π in gedachten een draad is gelegd die in E^π is vastgemaakt, en het andere uiteinde van de draad vanuit O van de boog wordt weggetrokken, terwijl die draad gespannen blijft, dan zal het andere uiteinde van de draad langs de bovenste cycloïdeboog bewegen en door het punt X^t gaan. Op deze wijze wordt de bovenste cycloïdeboog uit de onderste verkregen door **afwikkelen**. In dit verband noemt men de onderste cycloïde waarop de draad gewikkeld was de **evolute** en de kromme die door afwikkeling ontstaat de **involute**. Hiervan maakt **Huygens** een algemene definitie: *als een kromme $\mathcal{K}$ uit een kromme $\mathcal{C}$ verkregen wordt door afwikkelen, dan noemt men $\mathcal{K}$ de involute van $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}$ de evolute van $\mathcal{K}$* . We lichten dit zo dadelijk toe met enkele voorbeelden.

Huygens bewijst dan: *Iedere raaklijn aan de evolute is een normaal van de involute en, omgekeerd, iedere normaal van de involute is raaklijn aan de evolute.*

4.3. Het afrollen van een cirkel. In de figuur 19 zie je wat er gebeurt als je een garenklosje vanaf het vrije uiteinde A afwikkelt. Je ziet maar een klein stukje van de involute, want er zit wel 400 meter garen op een klosje.

4.4. De evolute van de parabool. Dit onderwerp wordt door **Huygens** uitvoerig besproken aan de hand van de **kubische parabool** $\mathcal{K}$: $y^2 = x^3$, figuur 20. Naast deze kubische parabool beschouwt men

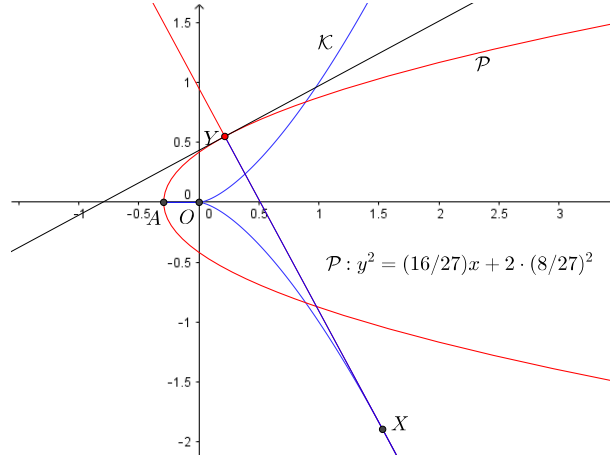


FIGURE 20. De evolute is een kubische parabool

ook de gewone parabool $\mathcal{P}: y^2 = \frac{16}{27}x + 2\left(\frac{8}{27}\right)^2$. Dan is $\mathcal{P}$ de involute van $\mathcal{K}$. We leggen een koord vanaf A langs het lijnstuk AO en vervolgens langs een van de bogen van $\mathcal{K}$. Wanneer men het andere uiteinde op de boog vasthoudt en het koord uit A wegtrekt, terwijl het koord gespannen blijft, dan zal vanaf A een helft van de parabool $\mathcal{P}$ beschreven worden. De parabool $\mathcal{P}$ is dus de involute van de kubische parabool $\mathcal{K}$.

Opmerking. Tegenwoordig wordt de evolute van een vlakke kromme gedefinieerd als de meetkundige plaats van de middelpunten van de **osculatiecirkels**, dat zijn de cirkels die heel nauw bij de kromme aansluiten (namelijk een drievoudig punt met de kromme delen). Met deze definitie is het lijnstuk AO geen deel meer van de de evolute en vervalt de naïve interpretatie met het gespannen touwtje.

4.5. De ellips als involute. We beschouwen het deel van de ellips $x^2 + 4y^2 = 16$ dat in het eerste kwadrant ligt. De kromme IXA heeft de parametervoorstelling

$$x = 3 \cos^3(t) \text{ en } y = 6 \sin^3(t), \text{ figuur 21.}$$

We leggen een draad vanaf I eerst langs IXA en verder langs AB tot aan B . Wanneer men die draad in I vasthoudt en vanaf B wegtrekt, terwijl de draad gespannen blijft, dan zal vanaf B het deel van de ellips beschreven worden dat in het eerste kwadrant ligt. Dat deel van de ellips is de involute van de evolute $IXAB$. Zie ook de opmerking in paragraaf 4.4.

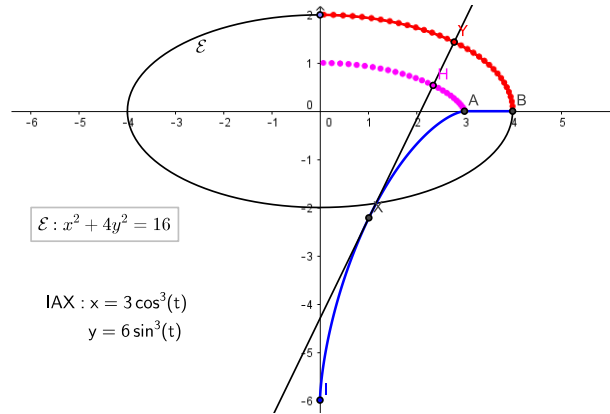


FIGURE 21. De ellips als involute

5. OMHULLENDE

We vertellen nu iets over een **rekenwijze** die bijzonder geschikt is voor het onderzoek of een gegeven kromme kan worden opgevat als involute. We doen dit aan de hand van een voorbeeld. We verwijzen naar figuur 23. Zij gegeven een stelsel van lijnen dat van één parameter, zeg t afhangt. Hier is dat het stelsel $\mathcal{L} = \{\ell(t) = 0 : 0 \leq t \leq 2\pi\}$ van lijnen

$$\ell(t) = y \cos(t) + x \sin(t) - 2 \sin(2t) = 0.$$

Door term voor term naar t te differentiëren vinden we de lijnen

$$\ell'(t) = -y \sin(t) + x \cos(t) - 4 \cos(2t) = 0.$$

Het snijpunt van twee naburige lijnen $\ell(t) = 0$ en $\ell(t+h) = 0$, met h klein, voldoet aan de vergelijking

$$\frac{\ell(t+h) - \ell(t)}{h} = 0.$$

Voor iedere t is de gemeenschappelijke oplossing van beide vergelijkingen $\ell(t) = 0$ en $\ell'(t) = 0$ een punt van $\ell(t)$ dat ook limiet is van de snijpunten van $\ell(t)$ met de lijnen $\ell(t+h)$ voor $h \rightarrow 0$. Daarom raakt de oplossing van de beide vergelijkingen aan de lijn $\ell(t)$. Hier vinden we de oplossing $x = 3 \cos(t) + \cos(3t)$, $y = 3 \sin(t) - \sin(3t)$, een asteroïde, een hypocycloïde met vier keerpunten. De gekleurde punten en hun banen tonen de toepassing van deze kromme als **ellipsograaf**.

5.1. De omhullende van een cirkelbundel. We nemen op een cirkel een vast punt P . Bij ieder punt X op de cirkel trekken we de cirkel met X als middelpunt die door het vaste punt. Van de zo ontstane cirkelbundel is de omhullende de een cardioïde, figuur 24.

$$\begin{aligned}\ell(t) &= y \cos(t) + x \sin(t) - 2 \sin(2t) = 0 \\ \ell'(t) &= -y \sin(t) + x \cos(t) - 4 \cos(2t) = 0\end{aligned}$$

Als $\ell(t) = 0$ en $\ell(t+h) = 0$,
dan ook $\frac{\ell(t+h) - \ell(t)}{h} = 0$.

FIGURE 22. Tekst bij omhullende

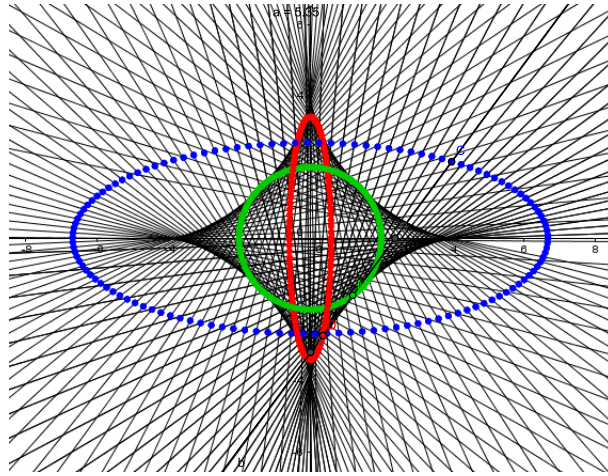


FIGURE 23. De asteroïde als omhullende

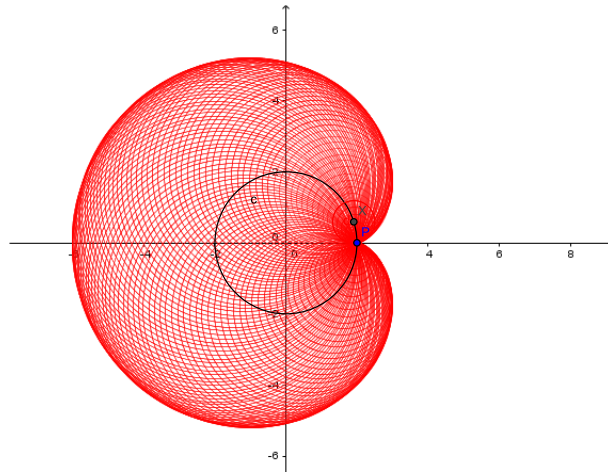


FIGURE 24. De cardioïde als omhullende van een cirkelbundel

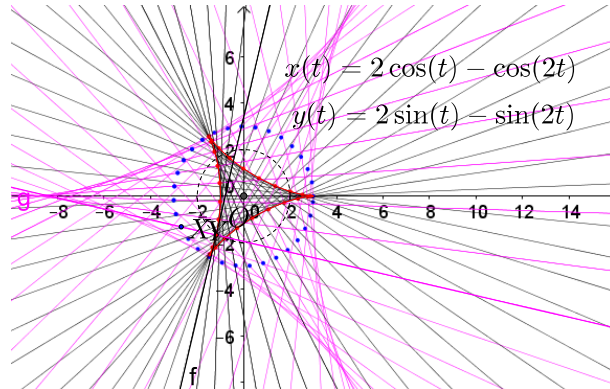


FIGURE 25. De evolute van de deltoïde

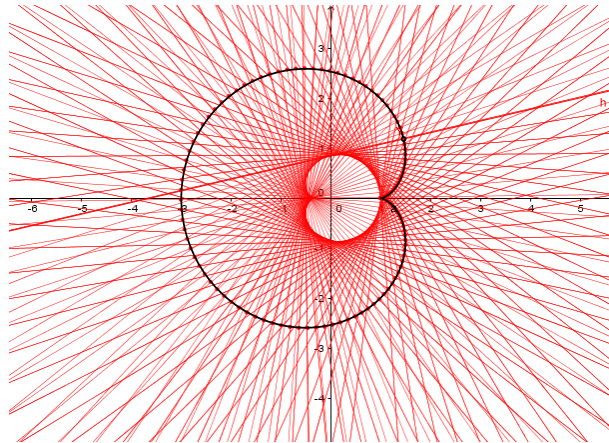


FIGURE 26. De evolute van de cardioïde

5.2. De evolute van de deltoïde. We passen deze techniek toe om de evolute van de deltoïde te bepalen, figuur 25. Daartoe bekijken we de familie van de normalen van de deltoïde. Na dapper rekenen ontdek je dat de evolute weer een deltoïde is, maar dan drie keer zo groot en gespiegeld in de y -as.

5.3. De evolute van de cardioïde. Met dezelfde techniek en met even grote inspanning vind je: de evolute van de cardioïde is weer een cardioïde, maar dan 3 keer zo klein als de oorspronkelijke, figuur 26.

5.4. Zomaar. Zie figuur 27.

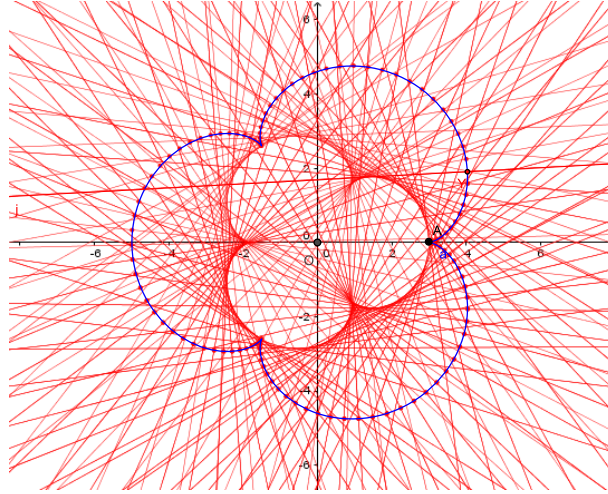


FIGURE 27. Evolute van een epicycloïde

5.5. **De exponentiële spiegel.** Zij E de grafiek van de exponentiële functie

$$E = \{(x, a \exp(\frac{x}{a}) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Een lichtbundel valt verticaal op de spiegel E . De vraag is nu: wat is de omhullende van de bundel van teruggekaatste stralen? Die omhullende wordt in dit verband de **caustische kromme** genoemd.

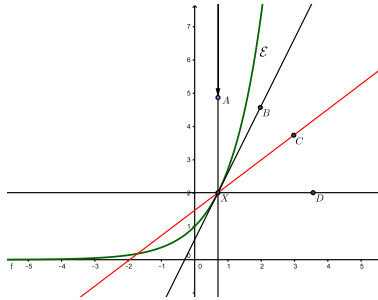


FIGURE 28. De exponentiële spiegel

Kies een punt op de grafiek $X = (t, a \exp(t/a))$, figuur 28. Een vector langs de raaklijn XB is $(1, \exp(t/a))$. Hierbij hoort de eenheidsvector

$$(\sin(\varphi), \cos(\varphi)) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \exp(2t/a)}}, \frac{\exp(t/a)}{\sqrt{1 + \exp(2t/a)}} \right).$$

De hoek CXA is het dubbele van hoek BXA en gelijk aan 2φ . Voor de eenheidsvector langs XC komt er

$$(\sin(2\varphi), \cos(2\varphi)) = \left(\frac{2 \exp(t/a)}{1 + \exp(2t/a)}, \frac{\exp(2t/a) - 1}{1 + \exp(2t/a)} \right).$$

De lijn XC van de teruggekaatste straal vindt men door spiegeling van de lijn XA in de raaklijn XB . De richtingscoëfficiënt van de teruggekaatste straal is gelijk aan de tangens van de hoek DXC , dat is gelijk aan de cotangens van hoek CXA . Zo vinden we

$$\tan(DXC) = \frac{\exp(2t/a) - 1}{2 \exp(t/a)} = \sinh(t/a).$$

De lijn van de teruggekaatste straal in dit punt X zij $\ell(t)$. De lijn $\ell(t)$ heeft de vergelijking:

$$y - a \exp(t/a) = \sinh(t/a)(x - t), \text{ oftewel}$$

$$\ell(t): y = x \sinh(t/a) - t \sinh(t/a) + a \exp(t/a).$$

Na differentiëren van $\ell(t)$ naar t komt er

$$\begin{aligned} \ell'(t): 0 &= x \frac{\cosh(t/a)}{a} + \exp(t/a) - \sinh(t/a) - t \frac{\cosh(t/a)}{a} \\ &= \frac{\cosh(t/a)}{a} (x - t) + \cosh(t/a). \end{aligned}$$

Hieruit volgt $x = t - a$. Uit de vergelijking van $\ell(t)$ volgt nu

$$y = \cosh(t/a) = \cosh\left(\frac{x}{a} + 1\right)$$

.

5.6. De holle spiegel. Een evenwijdige lichtbundel valt in op een holle spiegel. De spiegel heeft de vorm van een bolkapje. Had de spiegel de vorm van een parabolöide-kapje, dan werden alle stralen van de bundel evenwijdig aan de as teruggekaatst naar het brandpunt. Maar bij de cirkel ontstaat er een brandkromme, figuur 29. Het is een deel van een epicycloïde met twee keerpunten.

5.7. De cardioïde als brandkromme. Nu zetten we een lichtbron op de rand van een cirkel. Dan valt er een divergente bundel op de holle spiegel. De spiegel heeft de vorm van een bolkapje. Dan is de brandkromme een cardioïde, figuur 30.

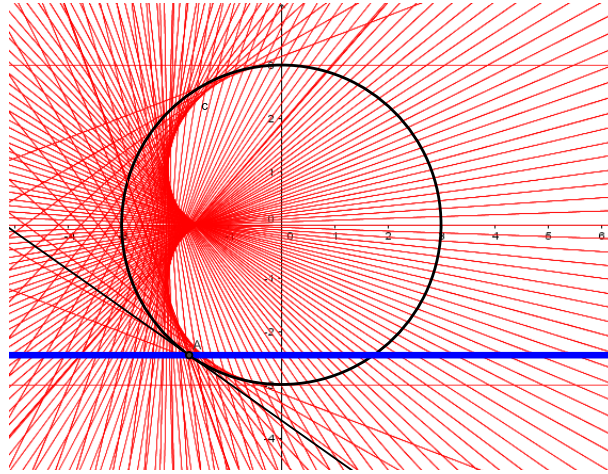


FIGURE 29. De holle spiegel

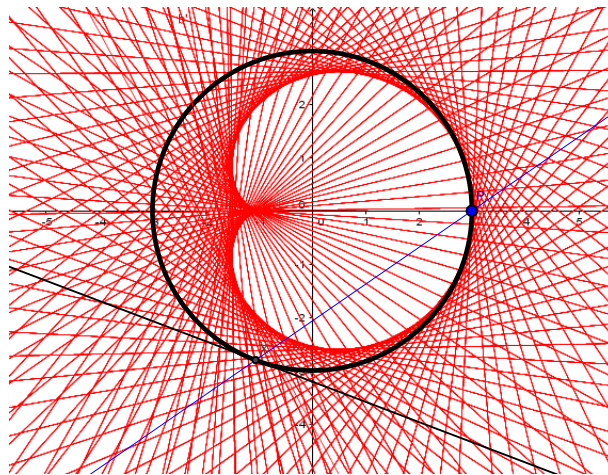


FIGURE 30. De cardioïde als brandkromme

Boekenlijst

J.M. AARTS, *Plane and solid Geometry*, Springer

J.M. AARTS, *Christiaan Huygens: Het Slingeruurwerk. Een studie*

J.D. LAWRENCE, *A Catalog of special plane curves*, Dover

J.W. RUTTER, *Geometry of curves*, Chapman& Hall

E.W. WEISSTEIN, *CRC Encyclopedia of Mathematics*, Chapman& Hall

TU DELFT