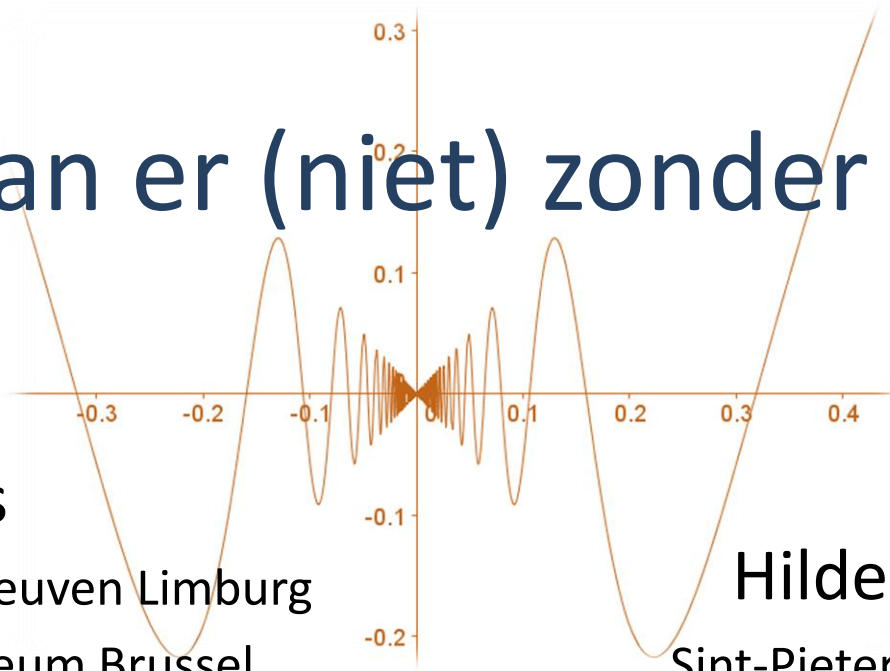


Oneindig klein.

Wat kan er (niet) zonder ε - δ ?



Michel Roelens

University Colleges Leuven Limburg

Maria-Boodschaplyceum Brussel

Hilde Eggermont

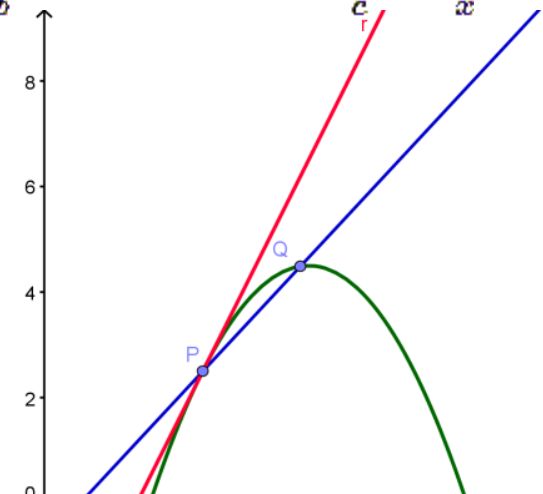
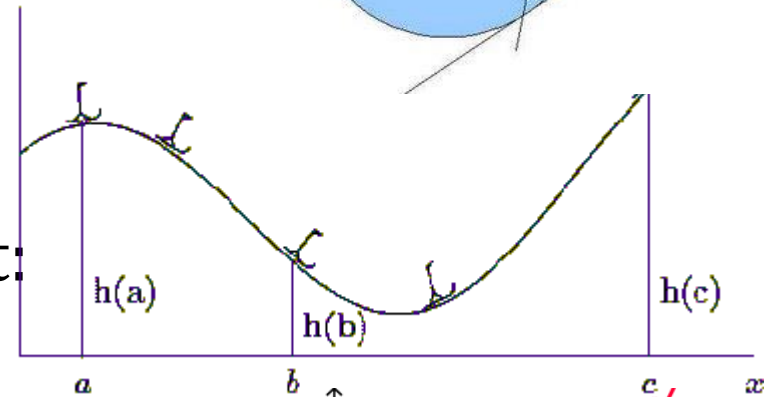
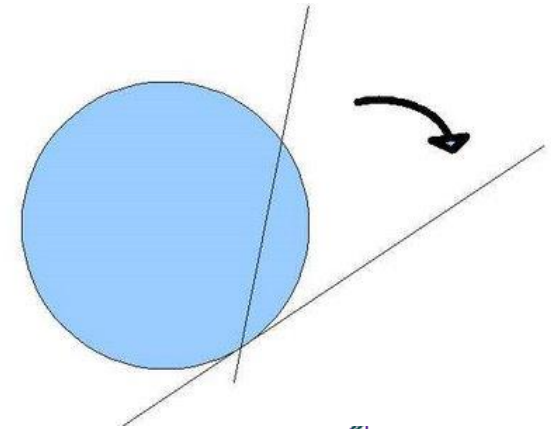
Sint-Pieterscollege Leuven

Redactie Uitwiskeling



Afgeleide aanbrengen

- Contexten:
 - Helling van een berg (skilatten)
 - Raaklijn aan een cirkel
 - Snelheid
- Gemeenschappelijk aspect:
van snijlijn naar raaklijn



Afgeleide aanbrengen

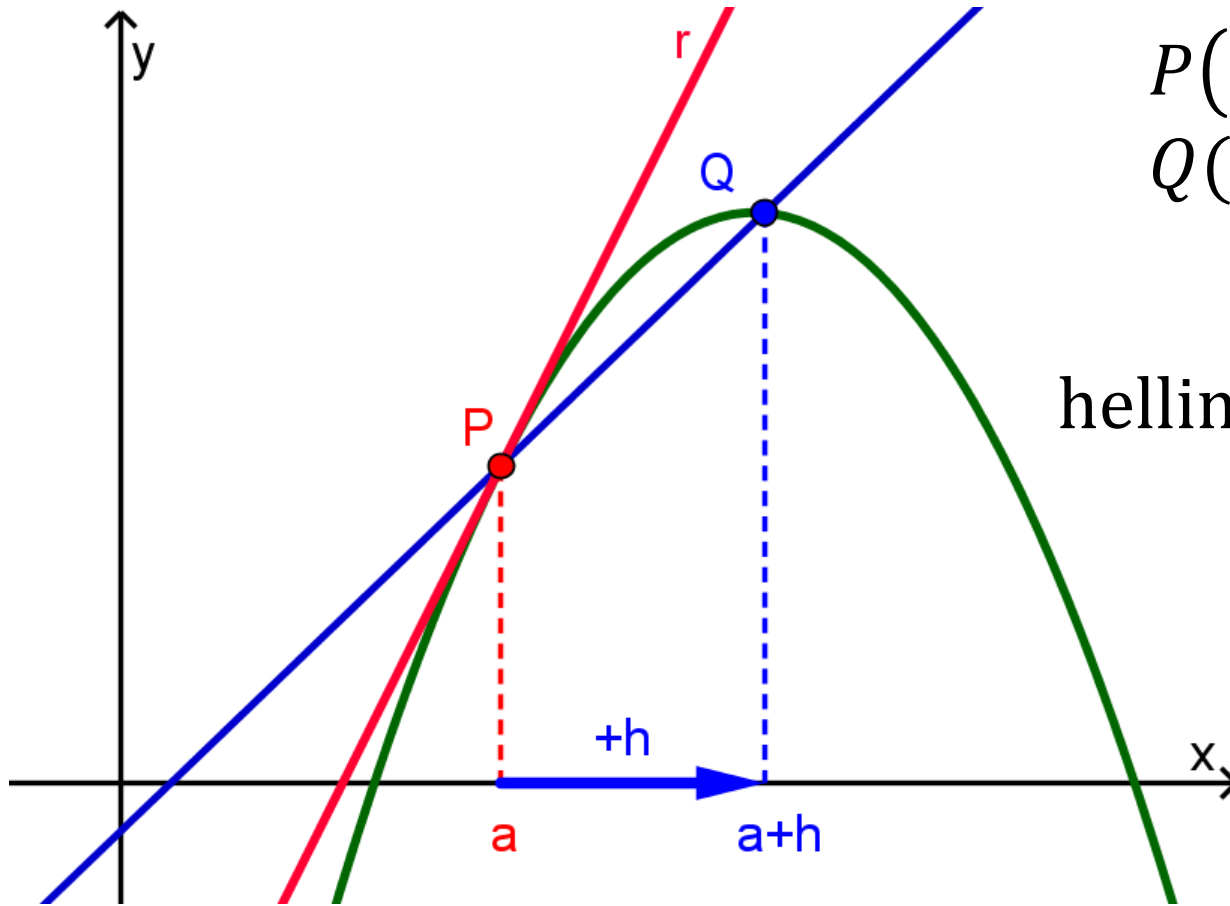
De afgeleide van een functie f in a is de **helling van de raaklijn** van f in het punt $P(a, f(a))$.

Notatie: $f'(a)$

Geen 'meetkundige interpretatie' maar de DEFINITIE!



Afgeleide berekenen



$$P(a, f(a))$$
$$Q(a + h, f(a + h))$$

helling $PQ =$

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Dan $h \rightarrow 0$



Afgeleide berekenen

- met formule:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

“ $h \rightarrow 0$ ”

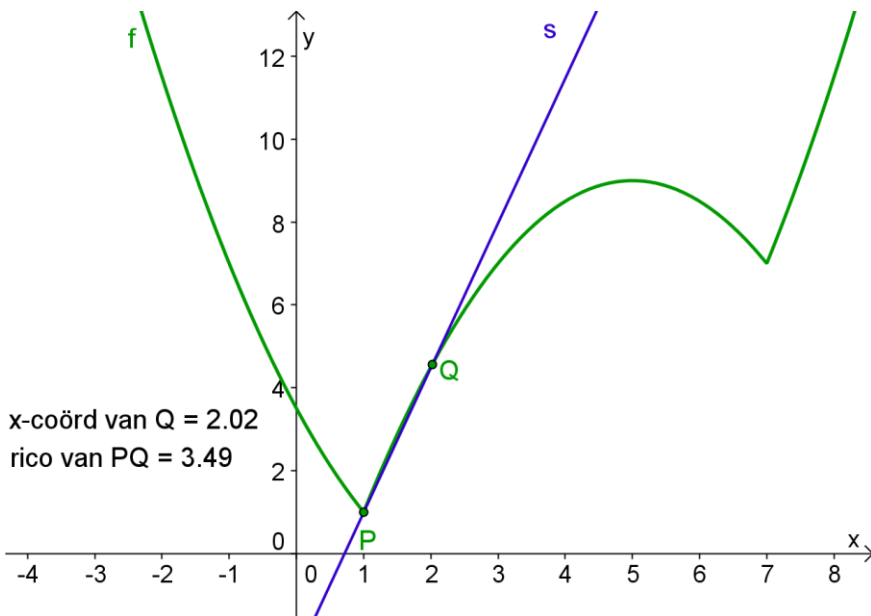
“limiet”

- differentiequotiënt
- gemiddelde toename
- helling van de snijlijn

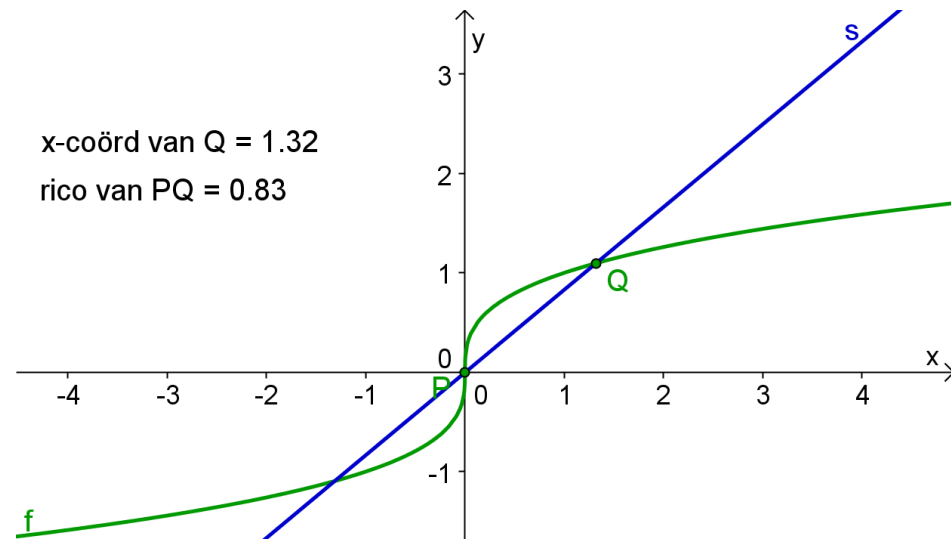


Afgeleide berekenen

- Functies met een knik



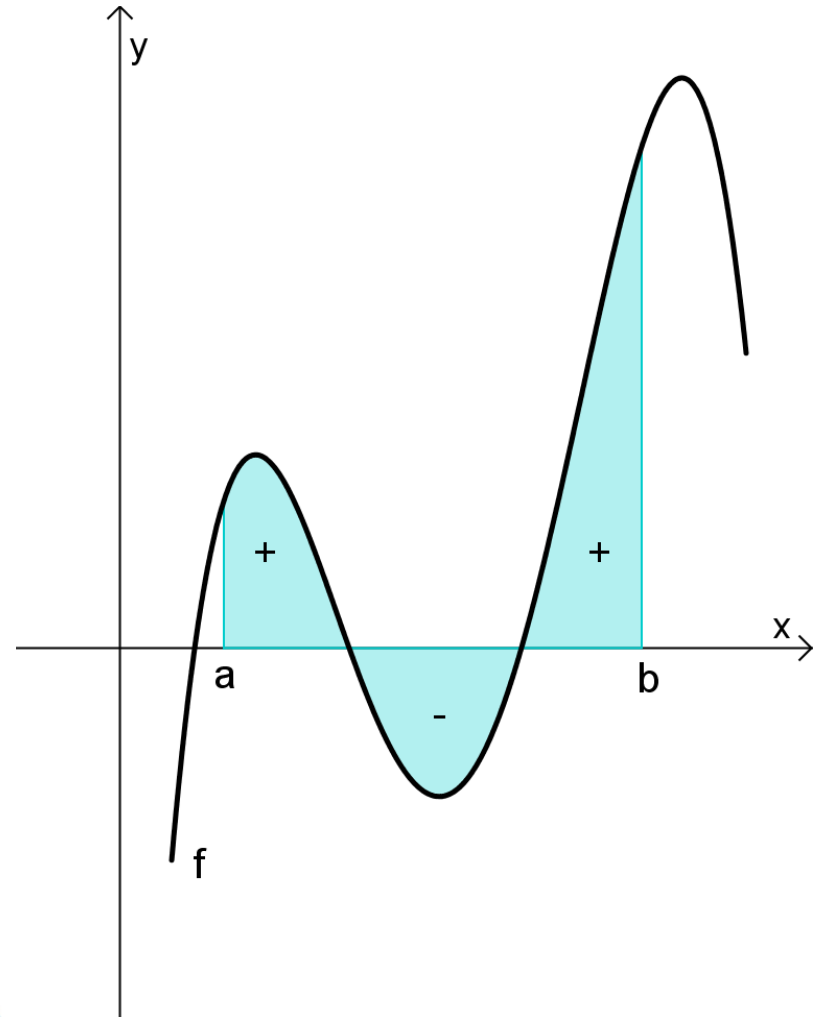
- Functies met een verticale raaklijn



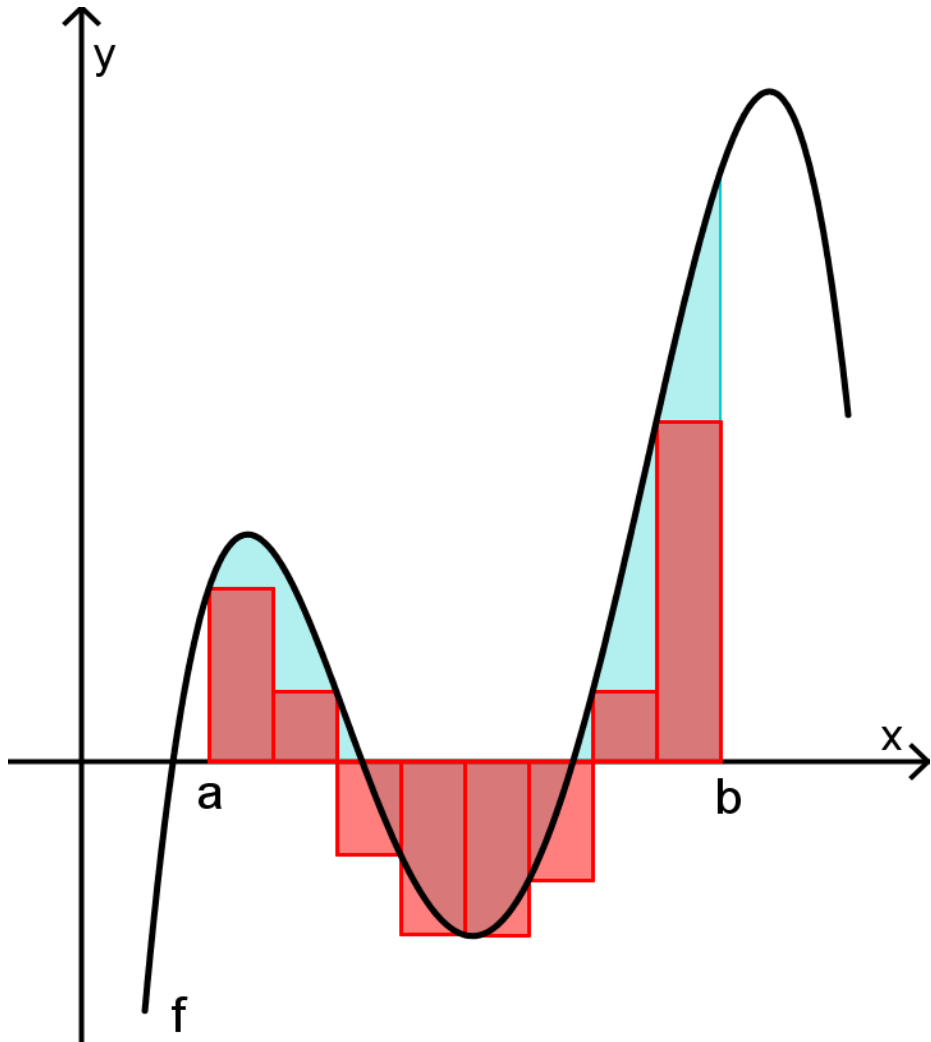
Integraal

- De integraal van f van a tot b is de **georiënteerde oppervlakte** tussen de grafiek van f en de x -as.
- Notatie: $\int_a^b f(x)dx$

DEFINITIE!



Integraal berekenen



Ondersommen

Bovensommen

Riemannsommen

**BEREKENINGS-
WIJZE!**



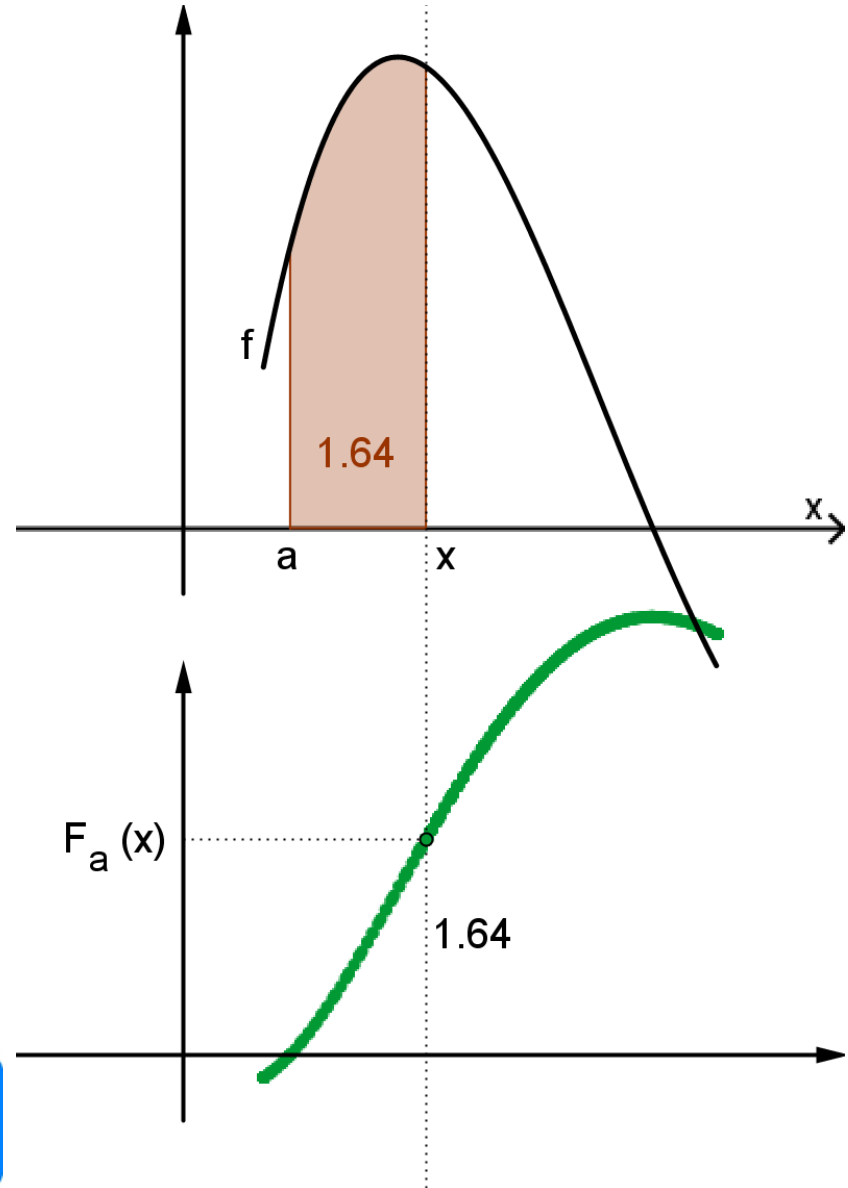
De hoofdstelling

- Integraalfunctie

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$$

- Hoofdstelling

$$F'_a(x) = f(x)$$

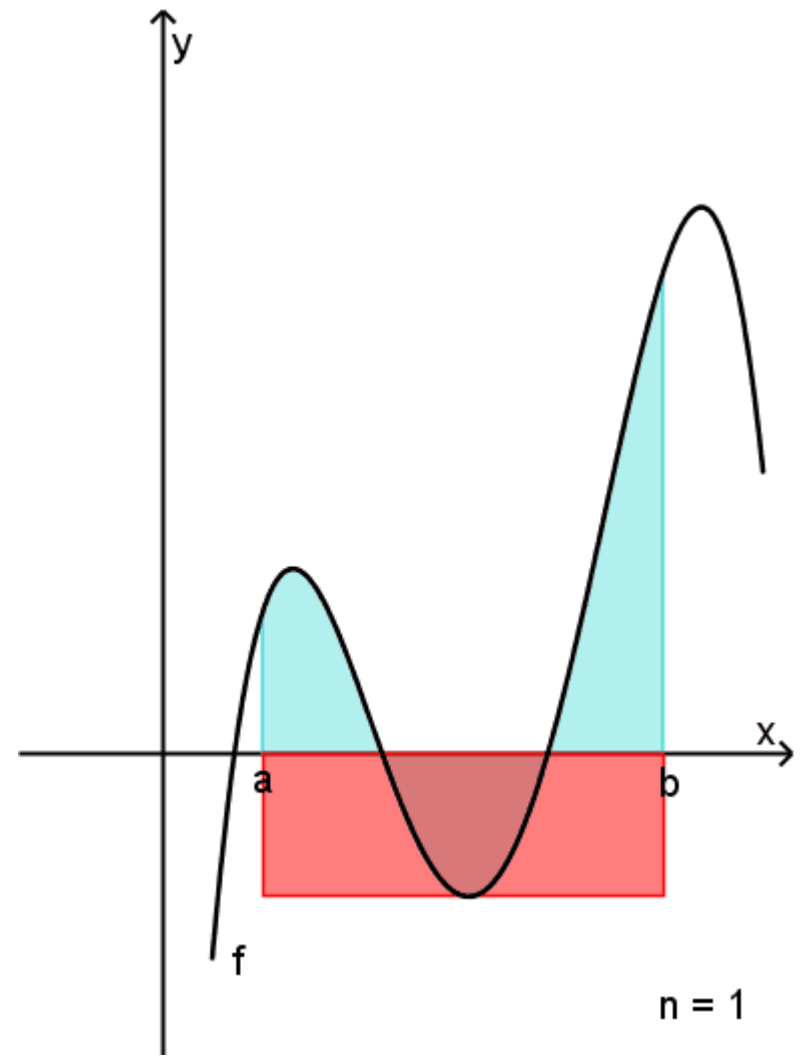
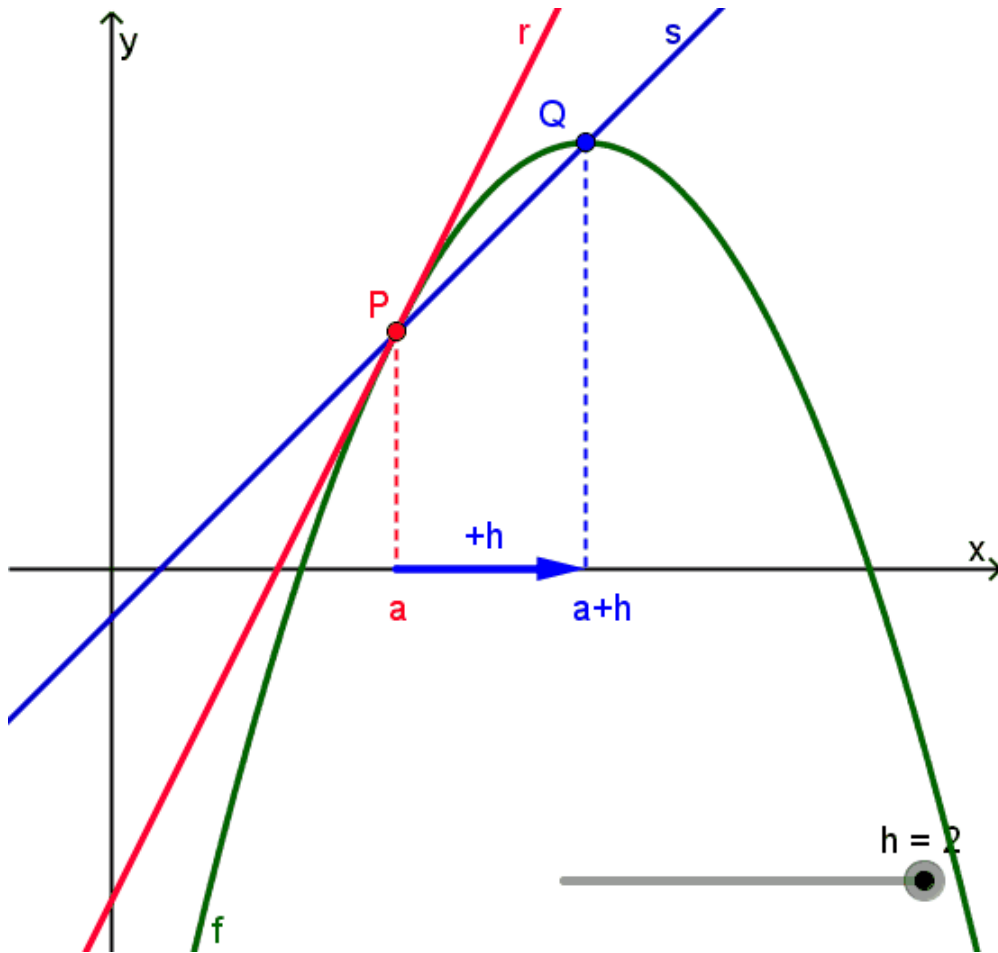


Vervolg integralen

- Primitieve functies
- Integralen berekenen met een primitieve functie
- Rekentechnieken om primitieve functies te vinden (onbepaalde integralen)
- Toepassingen: oppervlakteberekeningen, volume, manteloppervlakte, toepassingen uit de fysica en economie...

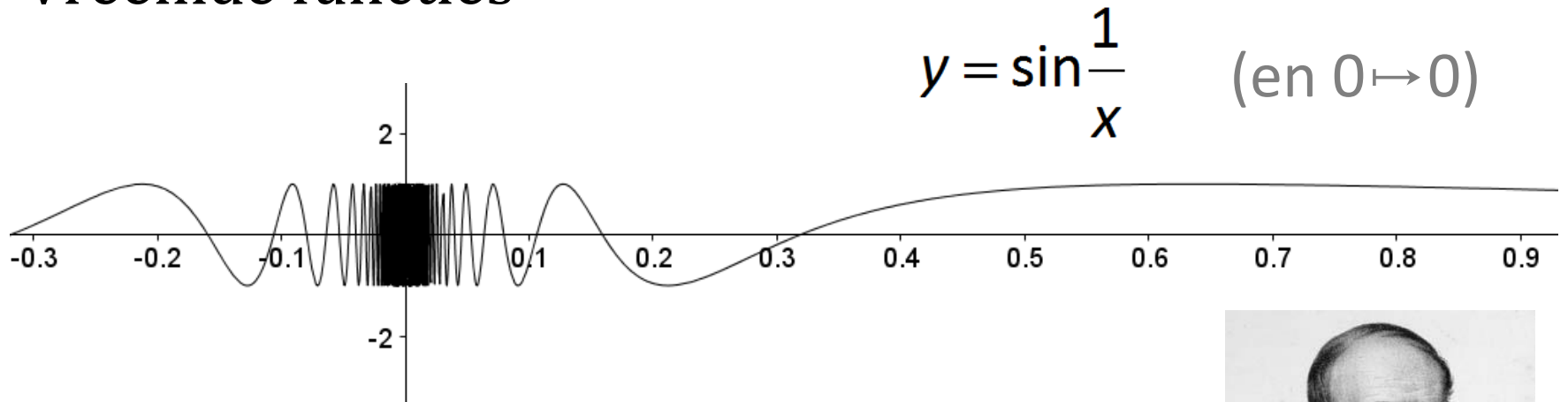


Gemeenschappelijk aspect



Problemen met visuele definities

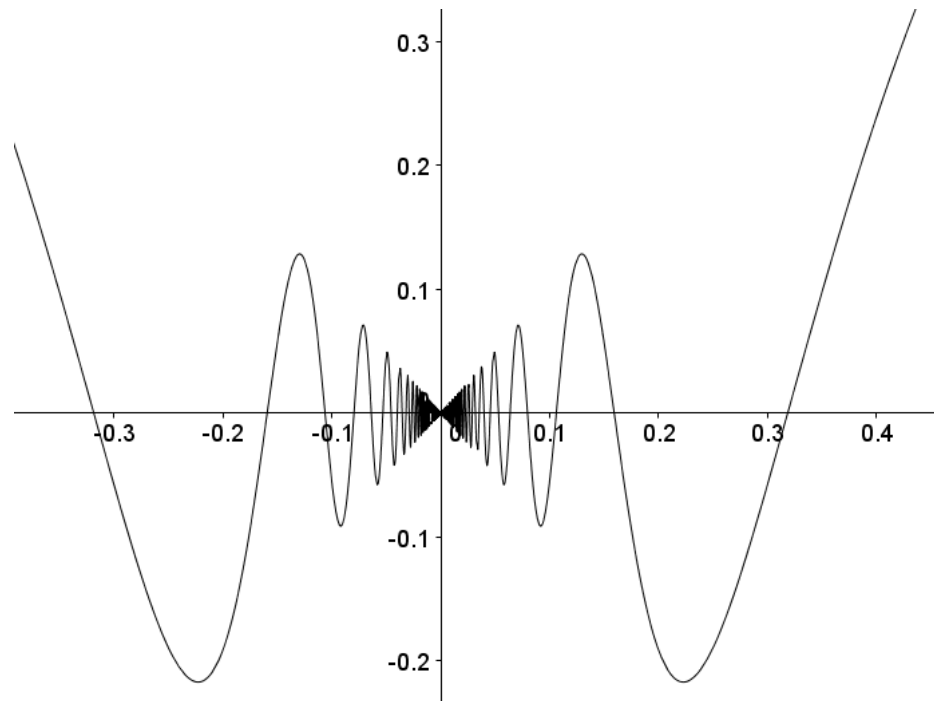
Vreemde functies



Augustin-Louis Cauchy
(19^{de} eeuw)



Problemen met visuele definities



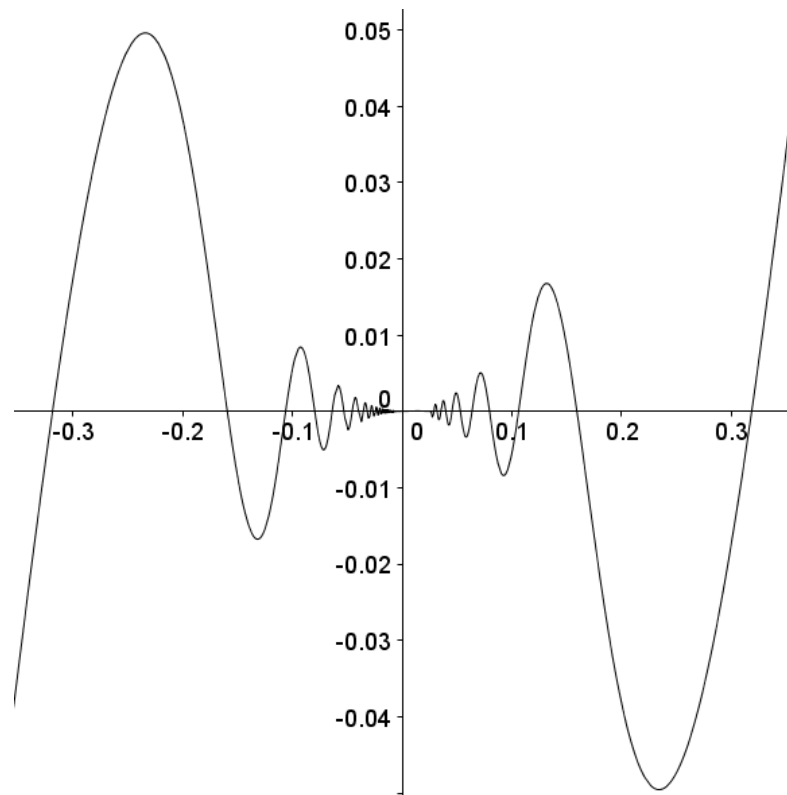
$$y = x \sin \frac{1}{x} \quad (\text{en } 0 \mapsto 0)$$



Karl Weierstrass
(19^{de} eeuw)



Problemen met visuele definities

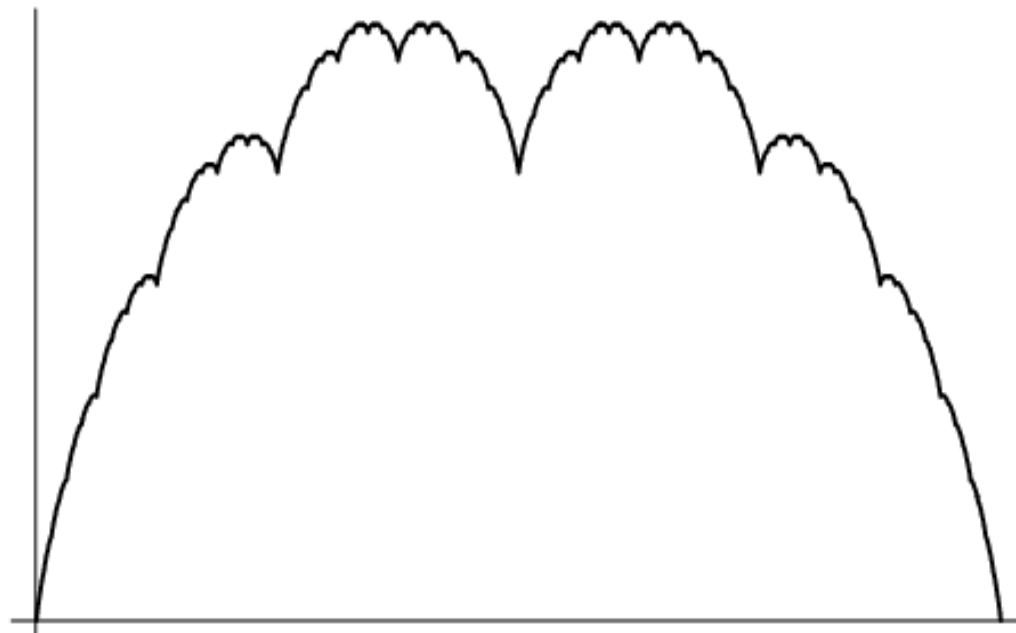
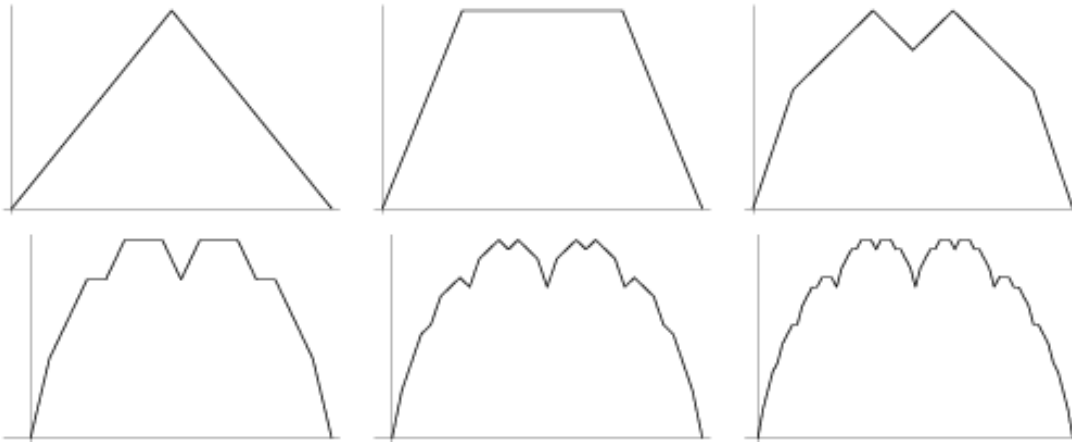


$$y = x^2 \sin \frac{1}{x}$$

(en $0 \mapsto 0$)



Problemen met visuele definities

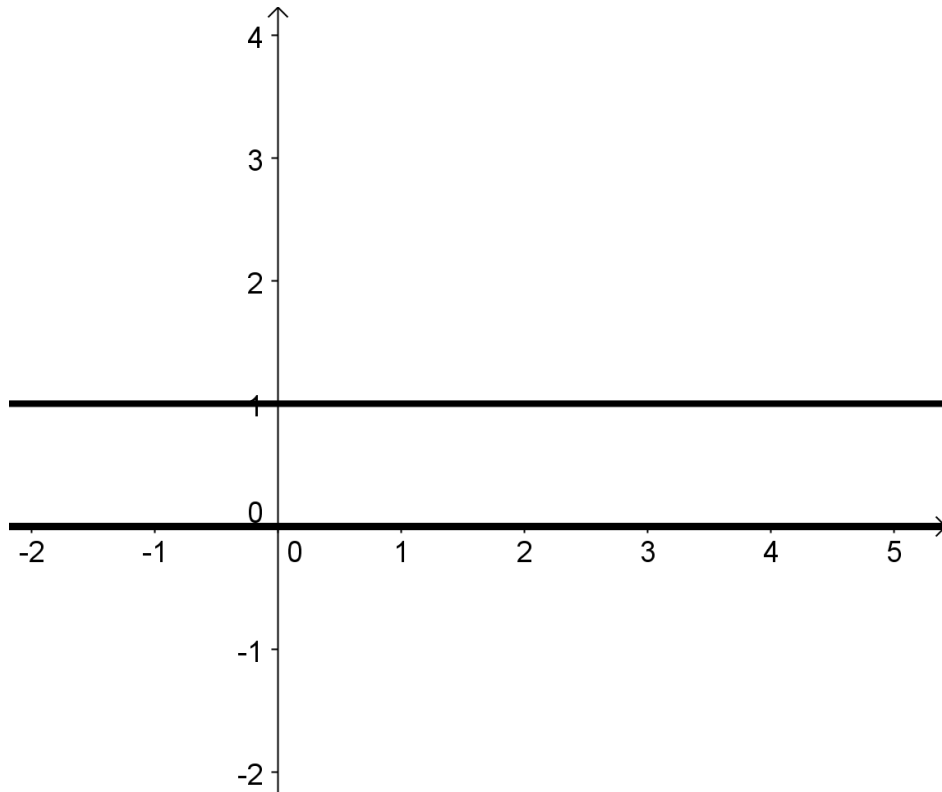


Blanc-mangerfunctie



高木 貞治
Teiji Takagi
(20^{de} eeuw)

Problemen met visuele definities



$$d(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ rationaal}) \\ 0 & (x \text{ irrationaal}) \end{cases}$$



Johann Dirichlet
(19^e siècle)



Verfijnde definities

- Rare functies: problemen met begrippen raaklijn en oppervlakte, ononderbroken grafiek.
- Afgeleide, integraal, continu **definiëren met limieten**. Hiermee raaklijn en oppervlakte definiëren.
- Dus: verfijnde **definitie van limiet** nodig!



Verfijnde definities: limiet

We gaan op zoek naar een definitie van limiet die (in principe) niet steunt op het visuele.

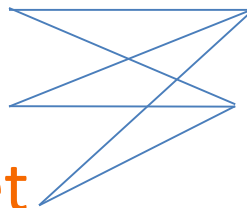
Bij dit 'zoeken naar' gebruiken we nog wel visuele inspiratie.

Gevallen:

Limiet in een punt

Limiet in oneindig

Linker-, rechterlimiet

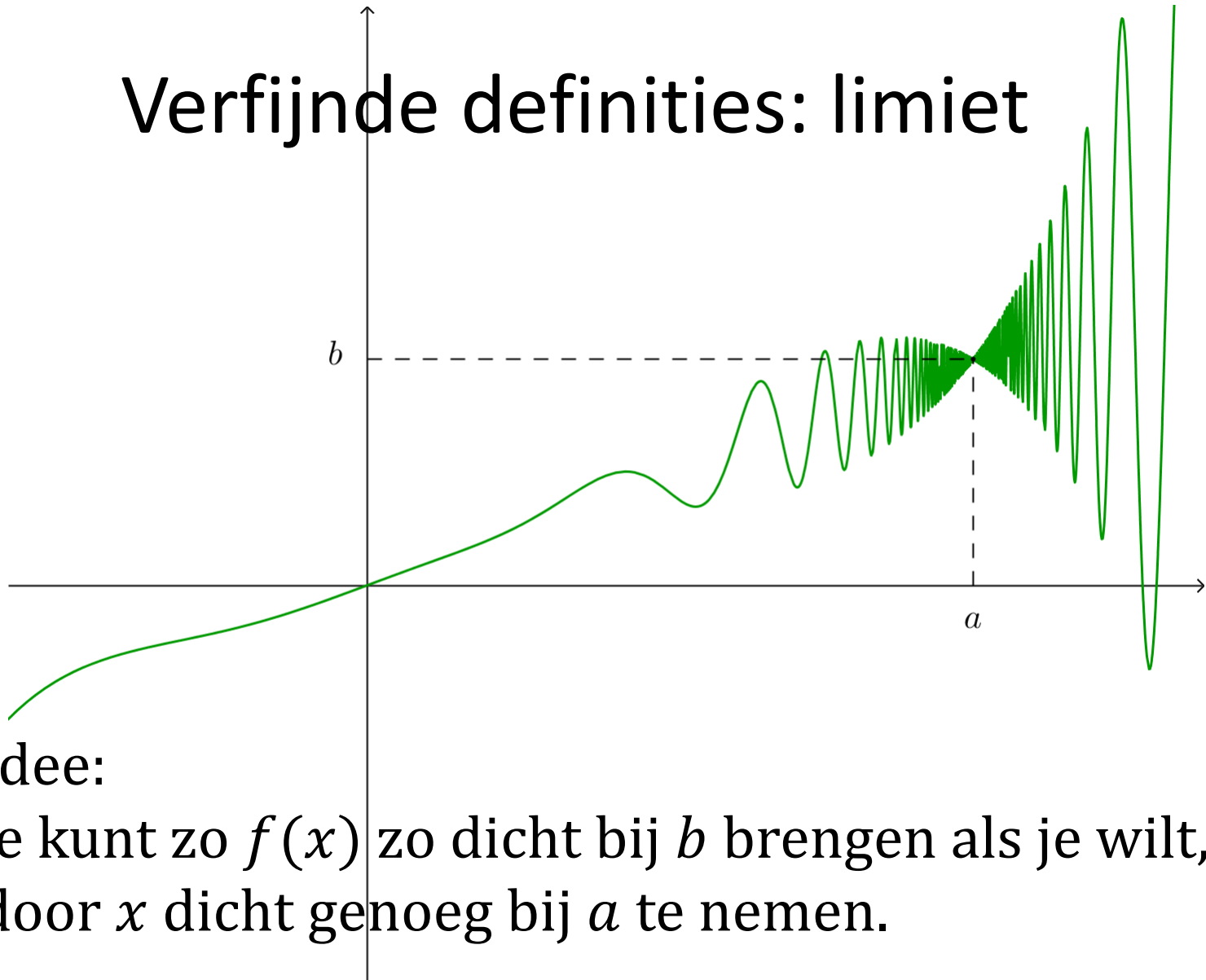


Limiet is getal

Limiet is oneindig



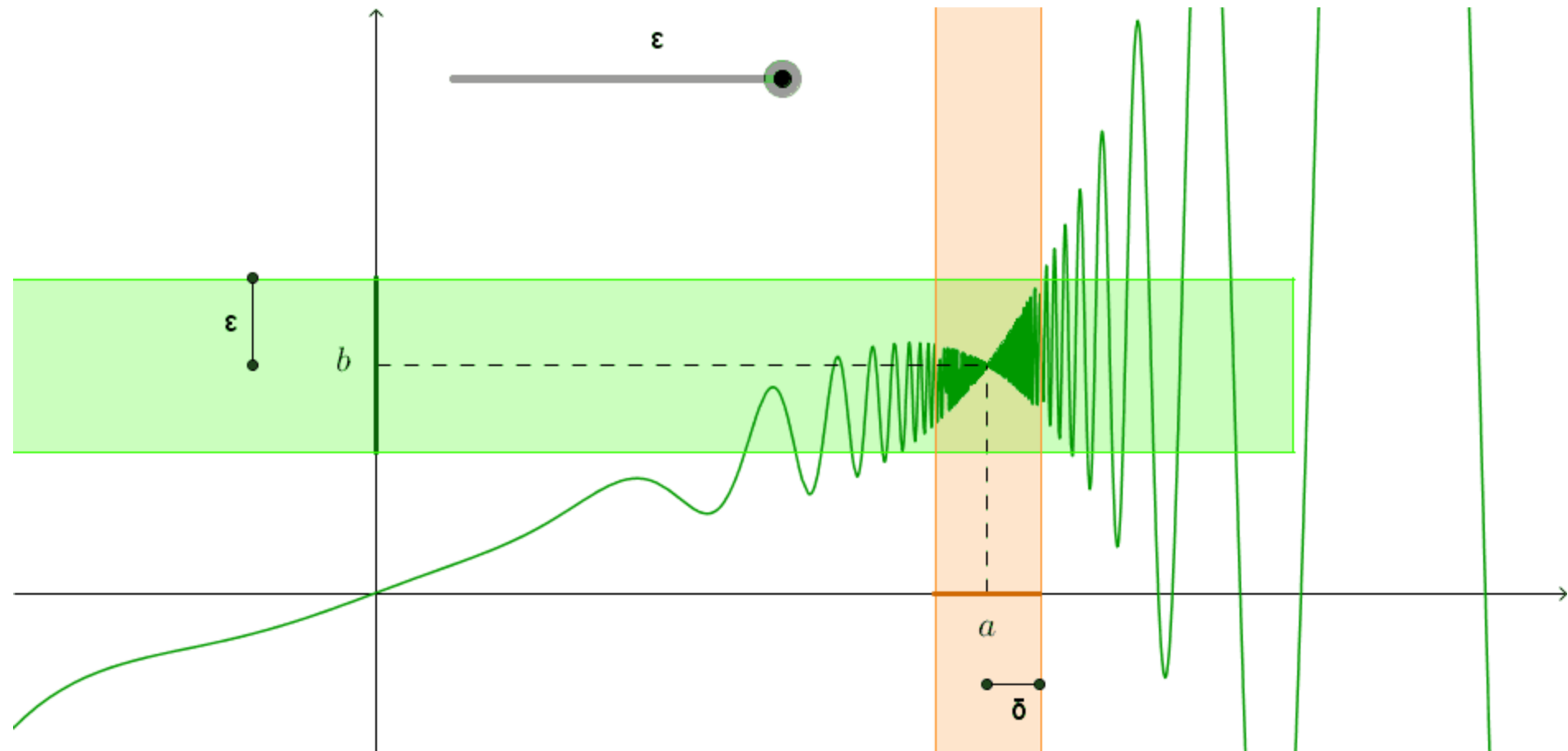
Verfijnde definities: limiet



Idee:

je kunt zo $f(x)$ zo dicht bij b brengen als je wilt,
door x dicht genoeg bij a te nemen.





$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

betekent:

$$\forall \varepsilon > 0:$$

$$\exists \delta > 0:$$

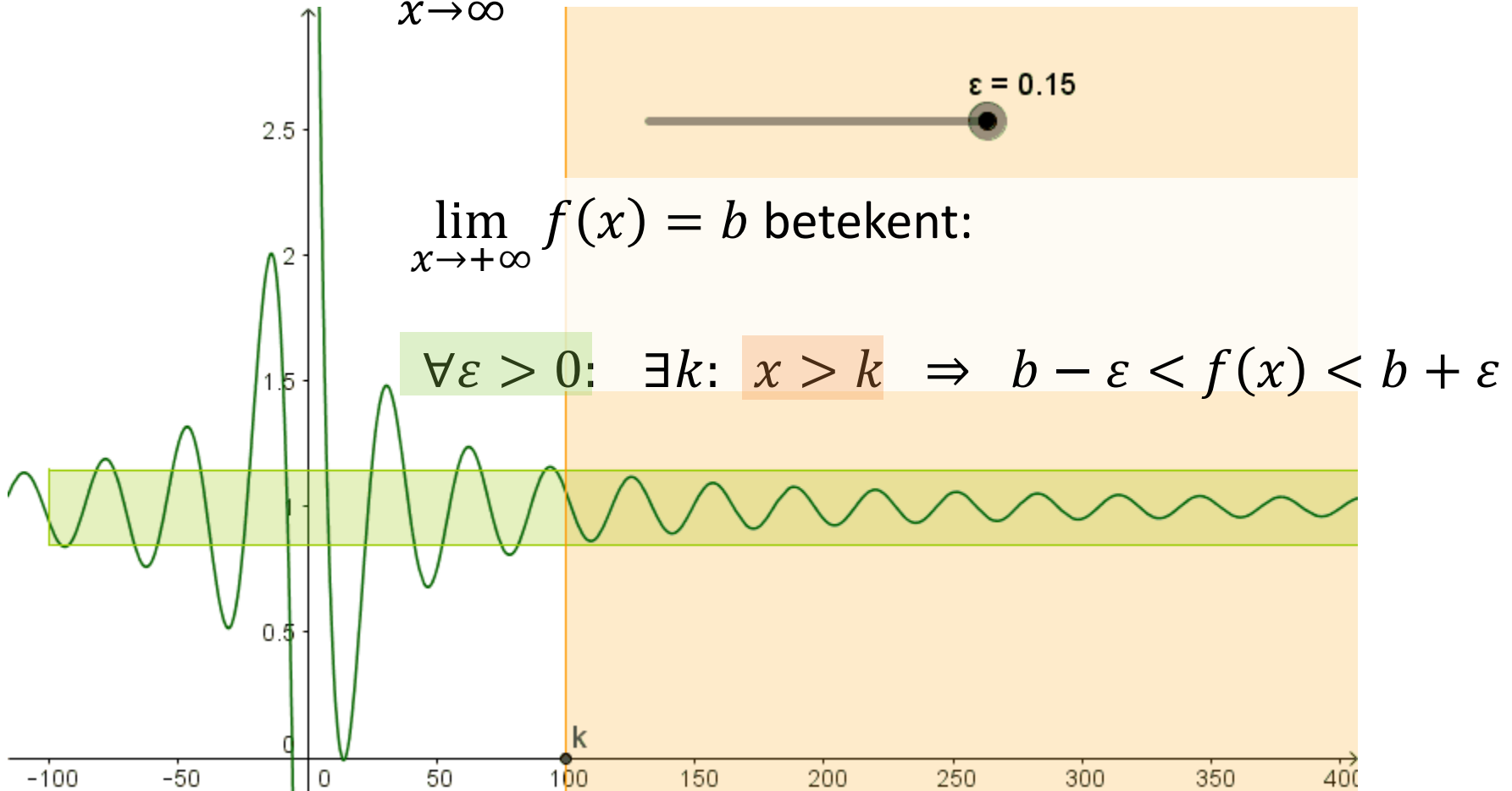
$$a - \delta < \underbrace{x}_{\neq a} < a + \delta$$

$$\Rightarrow$$

$$b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$$

Verfijnde definities: limiet

Analoog voor $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ en voor limiet van een rij.



Verfijnde definities: continuïteit

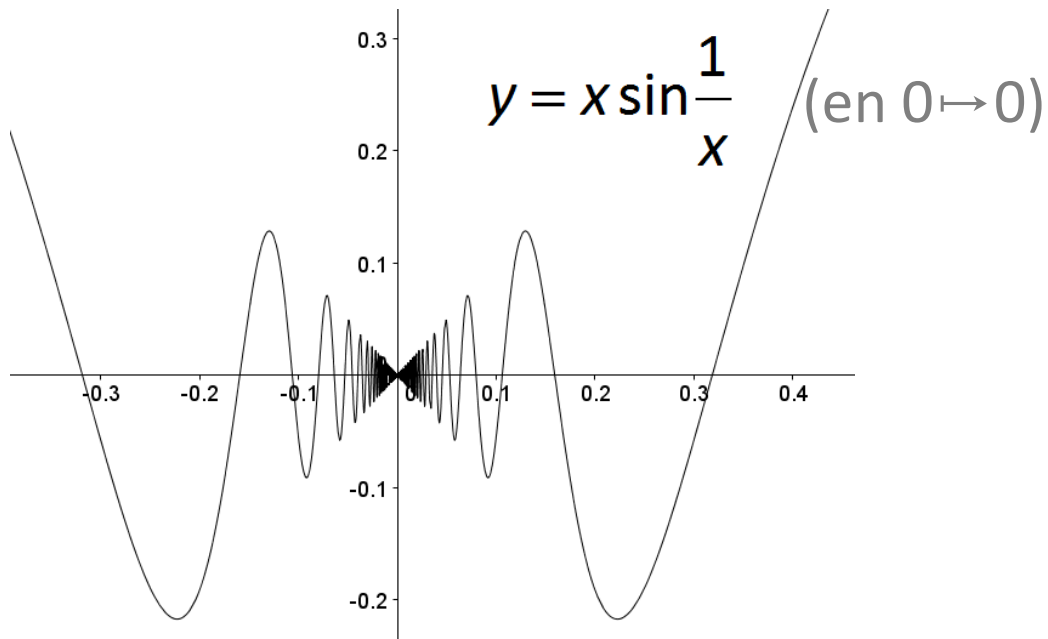
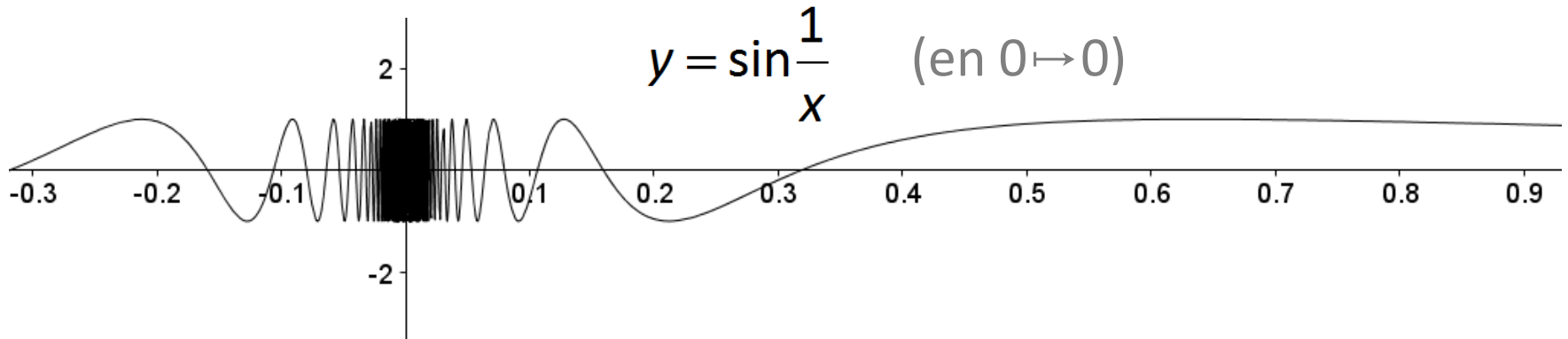
f is **continu** in a

betekent

de limiet van f in a bestaat
en is gelijk aan $f(a)$.



Verfijnde definities: continuïteit



Verfijnde definities: afgeleide

Als $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ bestaat en gelijk is aan een getal,

dan noemen we dit getal de **afgeleide** van f in a .

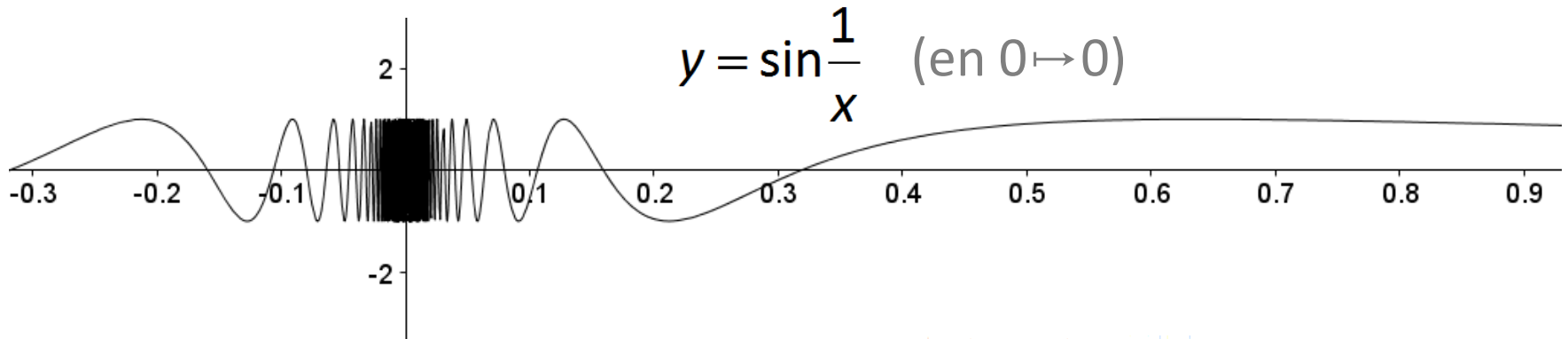
Notatie: $f'(a)$.

De **raaklijn** in $(a, f(a))$ is per definitie de rechte

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$



Verfijnde definities: afgeleide



$$g(x) = x \sin \frac{1}{x} \quad (\text{en } 0 \mapsto 0)$$

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \sin \frac{1}{h} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{1}{h}$$

$$g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \quad (\text{en } 0 \mapsto 0)$$

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h}$$

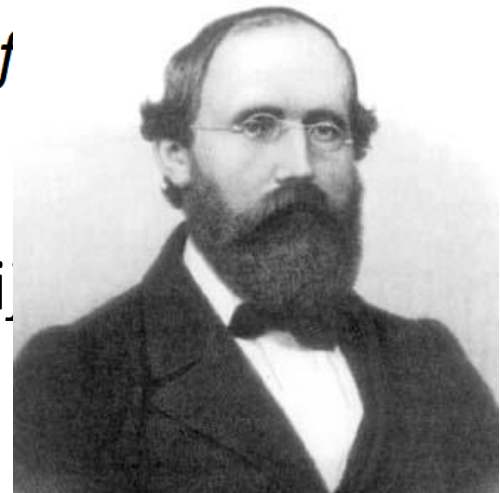


Verfijnde definities: integraal

- f begrensd; $[a, b]$ in het domein.
- Verdeel $[a, b]$ in n gelijke stukjes (breedte Δx).
- **Ondersom** $s_n = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x$; **bovensom** $S_n = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x$

met $m_k = \inf f[x_{k-1}, x_k]$ en $M_k = \sup f$

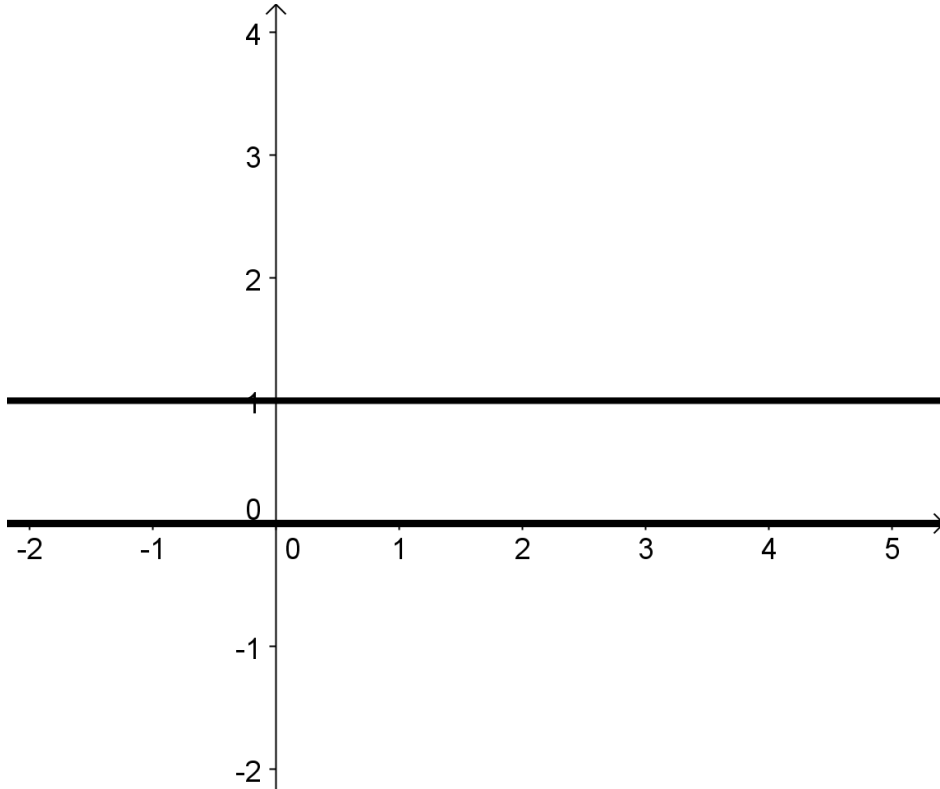
- f is **integreerbaar** als $\lim s_n$ en $\lim S_n$ gelijk
hetzelfde getal. Dit getal is de integraal



Berhard Riemann
(19^{de} eeuw)



Verfijnde definities: integraal



$$d(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ rationaal}) \\ 0 & (x \text{ irrationaal}) \end{cases}$$

Neem $[0, 1]$.

$$s_n = 0$$

$$S_n = 1$$

$$\lim s_n = 0$$

$$\lim S_n = 1$$



Niet integreerbaar.

Bewijzen in deze nieuwe wereld

- Wat blijft er nog overeind van de visuele fase?
- Strikt genomen: alles opnieuw doen
- Exemplarisch uitwerken
- Niet voor iedereen!



Voorbeeld bewijs nieuwe wereld

Limiet van een som

Stel $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ en $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$

Dan: $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = b + c$

Te bewijzen:

$\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \text{voor } x \neq a:$

$$-\delta < x - a < \delta \implies$$

$$-\varepsilon < (f(x) + g(x)) - (b + c) < \varepsilon$$



Bewijzen met de verfijnde definities

TB: $\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \text{voor } x \neq a:$

$$-\delta < x - a < \delta \Rightarrow -\varepsilon < f(x) + g(x) - b - c < \varepsilon \quad (*)$$

Neem ε willekeurig.

We weten:

$$\forall \varepsilon_1: \exists \delta_1: \forall x \neq a: -\delta_1 < x - a < \delta_1 \Rightarrow -\varepsilon_1 < f(x) - b < \varepsilon_1$$

$$\forall \varepsilon_2: \exists \delta_2: \forall x \neq a: -\delta_2 < x - a < \delta_2 \Rightarrow -\varepsilon_2 < g(x) - c < \varepsilon_2$$

We zoeken δ zo dat (*) waar is.

VERBAND?



Bewijzen met de verfijnde definities

ongelijkheden optellen:

$$-\varepsilon_1 < f(x) - b < \varepsilon_1$$

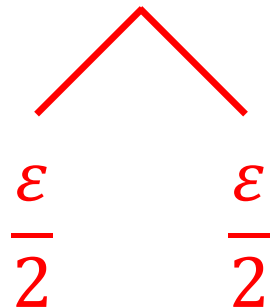
$$-\varepsilon_2 < g(x) - c < \varepsilon_2$$

+

$$-\varepsilon_1 - \varepsilon_2 < f(x) + g(x) - b - c < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$



Verdeel ε



Het zou goed zijn
als dit gelijk was
aan ε ...



Bewijzen met de verfijnde definities

Hoe krijgen we $-\frac{\varepsilon}{2} < f(x) - b < \frac{\varepsilon}{2}$?

$$\forall \varepsilon_1: \exists \delta_1: \forall x \neq a: -\delta_1 < x - a < \delta_1 \Rightarrow -\varepsilon_1 < f(x) - b < \varepsilon_1$$

Neem $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ dan

$$\exists \delta_1: \forall x \neq a: -\delta_1 < x - a < \delta_1 \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < f(x) - b < \frac{\varepsilon}{2}$$

En analoog:

$$\exists \delta_2: \forall x \neq a: -\delta_2 < x - a < \delta_2 \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < g(x) - c < \frac{\varepsilon}{2}$$



Bewijzen met de verfijnde definities

x moet 'dicht genoeg bij a ' liggen voor beide functies, dus:

$$-\min\{\delta_1, \delta_2\} < x - a < \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

Neem bijgevolg

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$$



Bewijzen met de verfijnde definities

Dan geldt als $x \neq a$ en $-\delta < x - a < \delta$:

$$\begin{aligned} -\frac{\varepsilon}{2} < f(x) - b < \frac{\varepsilon}{2} \\ -\frac{\varepsilon}{2} < g(x) - c < \frac{\varepsilon}{2} \\ + \hline \end{aligned}$$

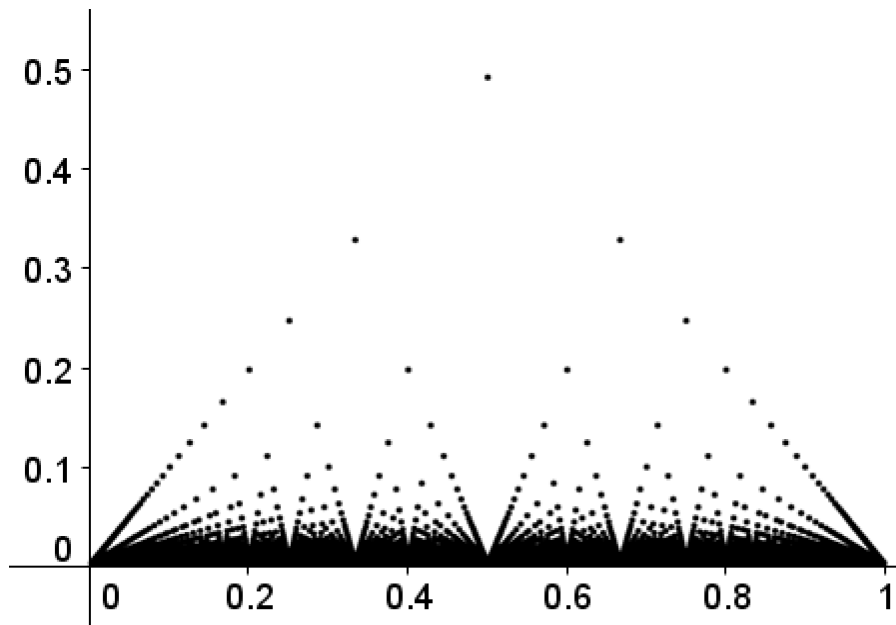
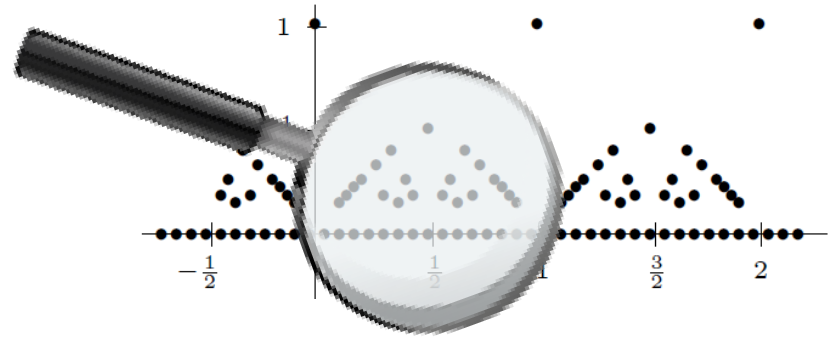
$$-\varepsilon < f(x) + g(x) - b - c < \varepsilon$$

Wat we wilden bewijzen!



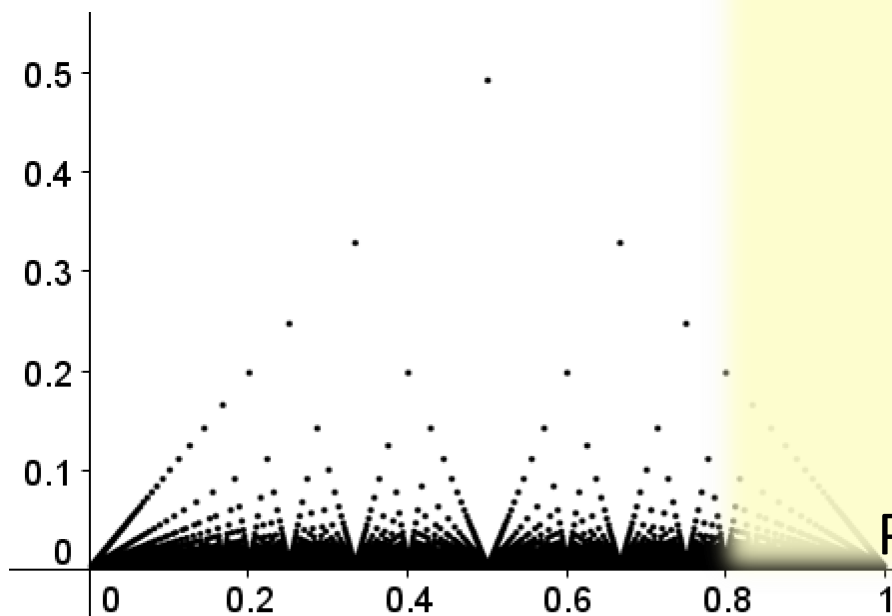
Problemen met visuele definities

$$t(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & (x = \frac{p}{q}, \text{ vereenvoudigd}) \\ 0 & (x \text{ irrationaal}) \end{cases}$$



Karl Johannes Thomae
(19^{de} en 20^{de} eeuw)

$$t(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & (x = \frac{p}{q}, \text{ vereenvoudigd}) \\ 0 & (x \text{ irrationaal}) \end{cases}$$



$$t\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$t\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$t\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$$

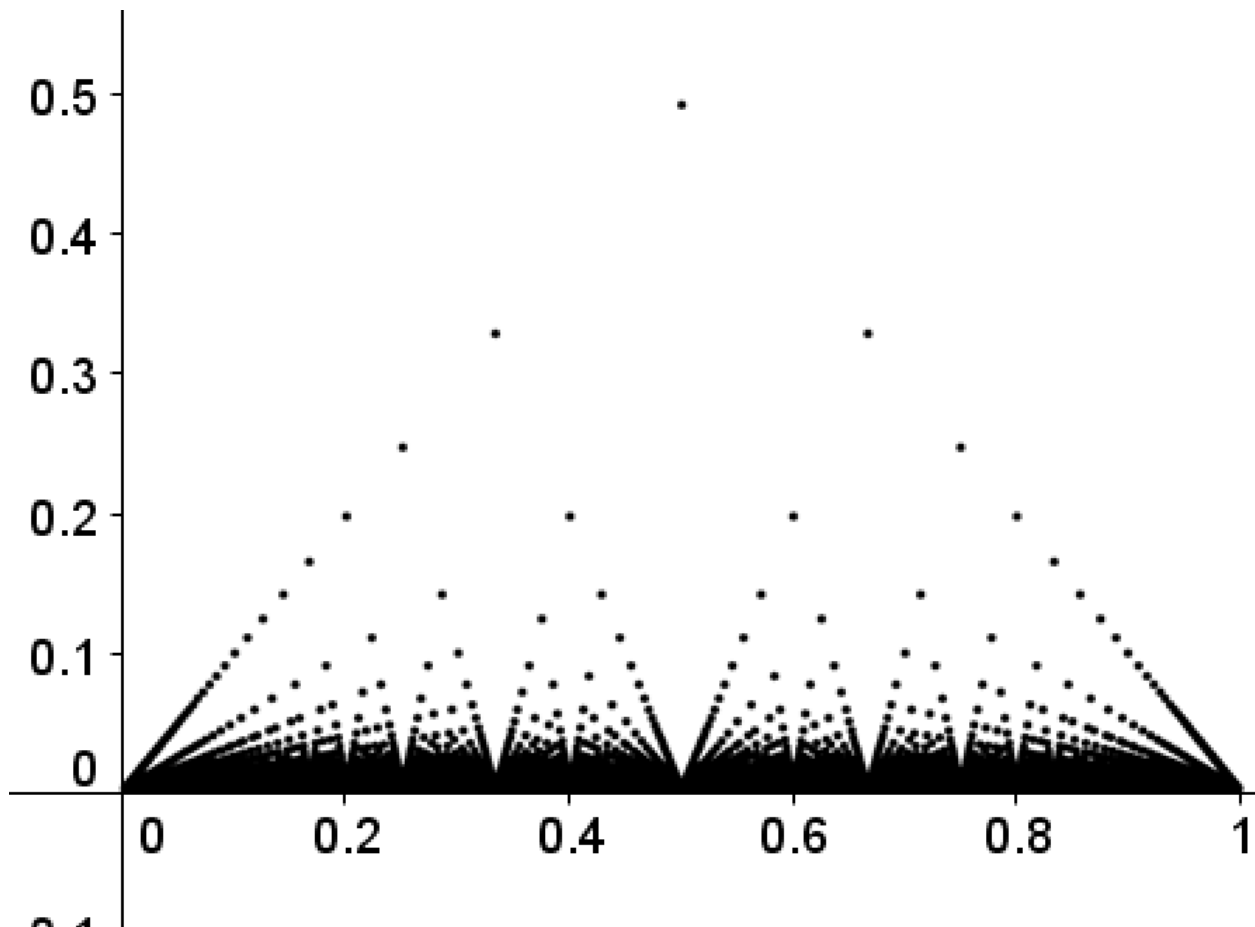
$$t(1) = 1$$

$$t(-0,03) = \frac{1}{100}$$

$$t(3,14) = \frac{1}{50}$$

Periodiek? Ja; periode = 1.

Verfijnde definities: limieten



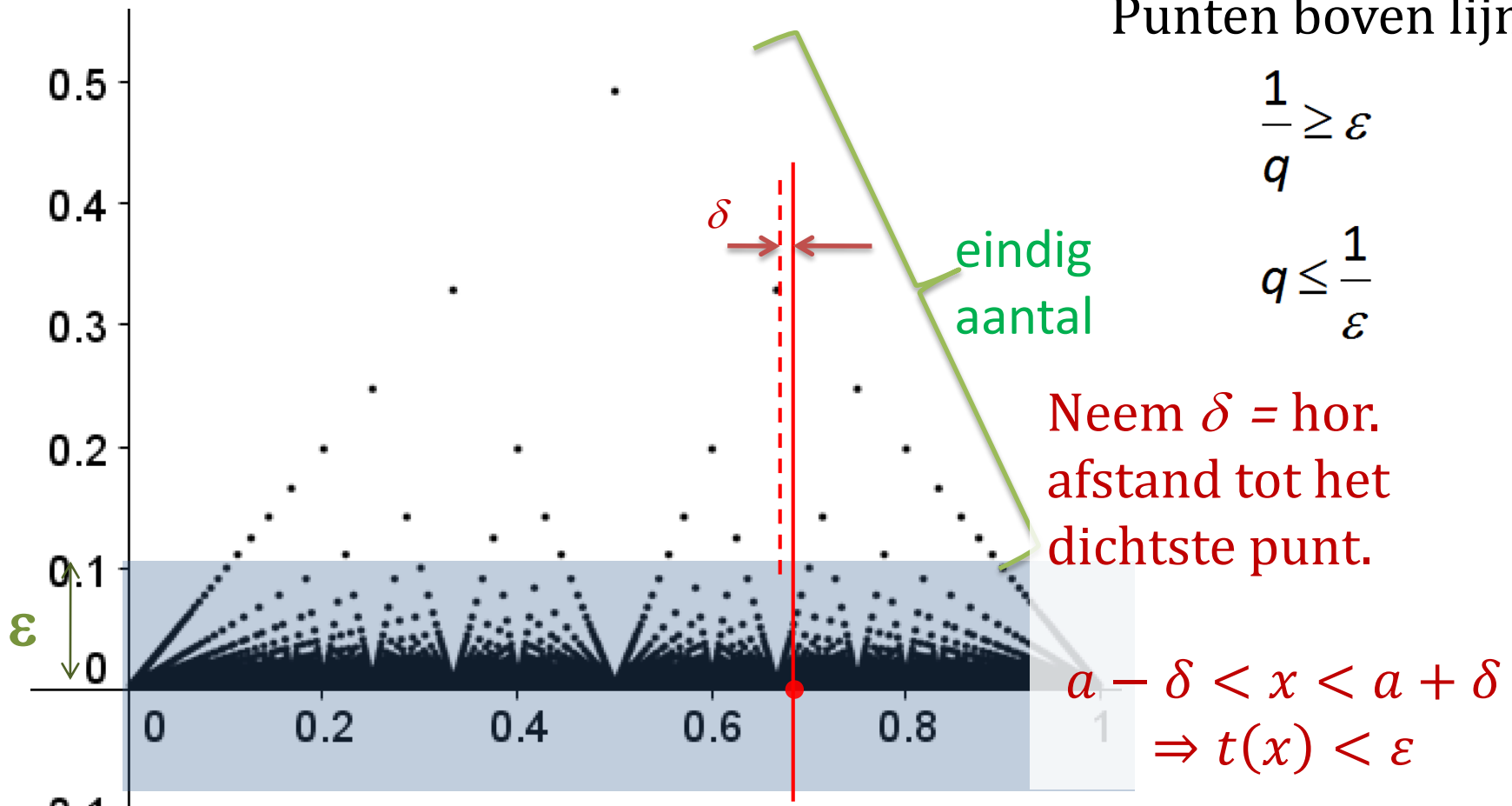
Verfijnde definities: limieten

$$\lim_{x \rightarrow a} (x) = 0$$

Punten boven lijn:

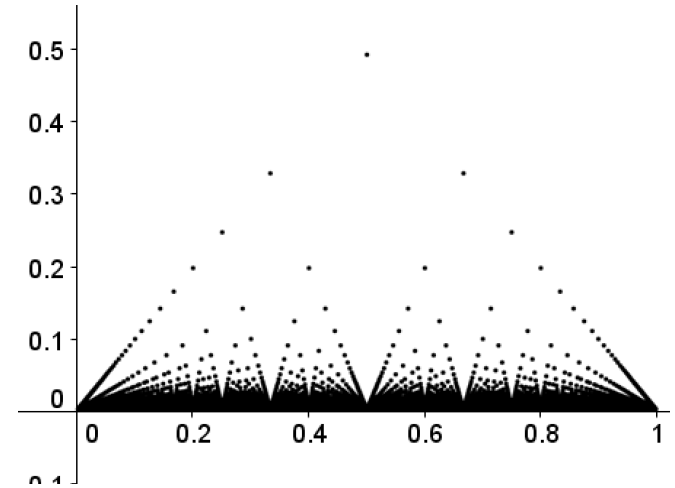
$$\frac{1}{q} \geq \varepsilon$$

$$q \leq \frac{1}{\varepsilon}$$



Verfijnde definities: limieten

- Dus: limiet in elk getal is nul.

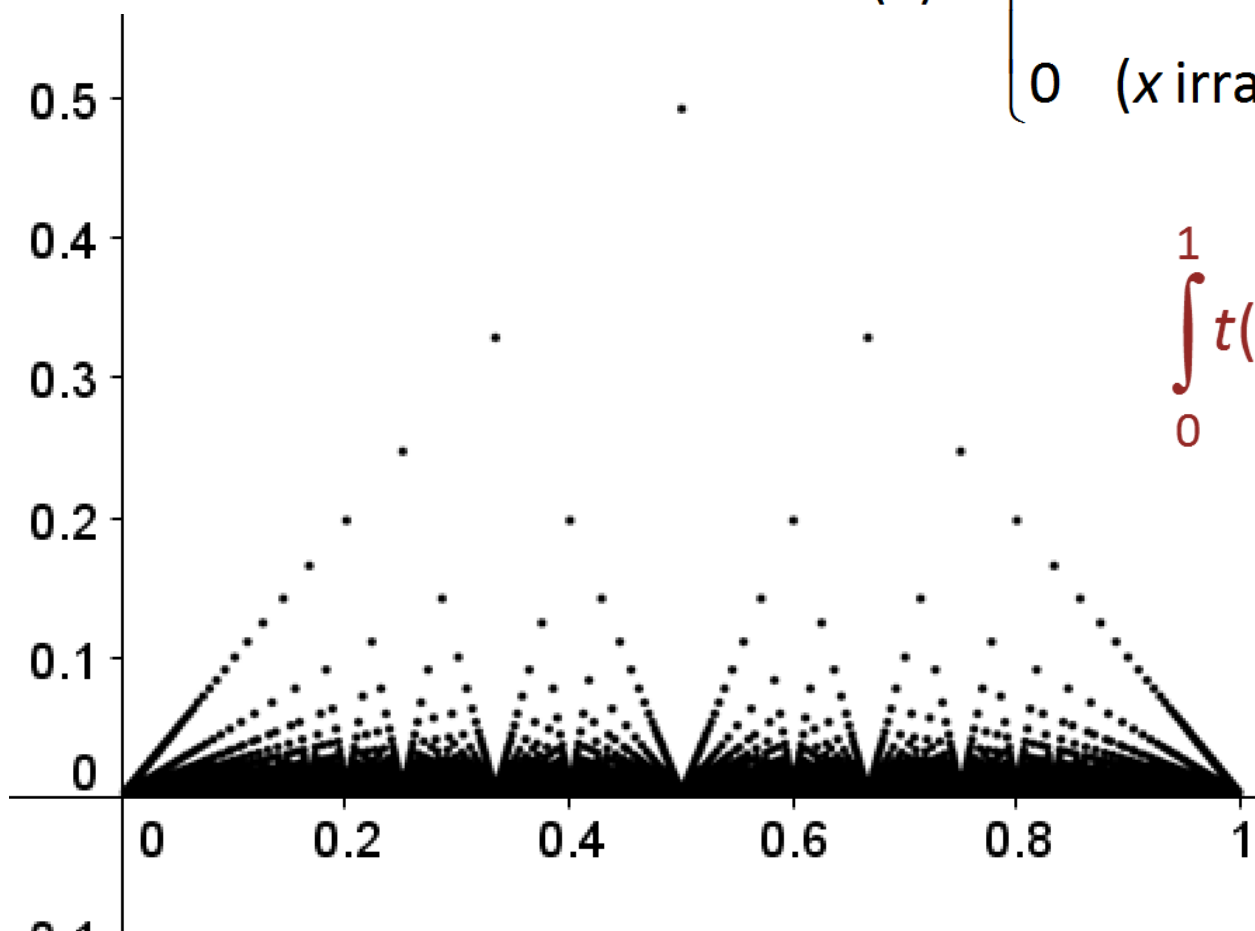


- Voor irrationale getallen is dat ook de functiewaarde. Voor rationale niet.
- Dus: de functie is **continu in elk irrationaal getal** en **discontinu in elk rationaal getal**.



Verfijnde definities: integraal

$$t(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & (x = \frac{p}{q}, \text{ vereenvoudigd}) \\ 0 & (x \text{ irrationaal}) \end{cases}$$



$$\int_0^1 t(x) dx ?$$



Verfijnde definities: integraal

We willen bewijzen: $\int_0^1 t(x)dx = 0$

ondersom

Er geldt: $\lim s_n = 0$.

We moeten dus aantonen: $\lim S_n = 0$,

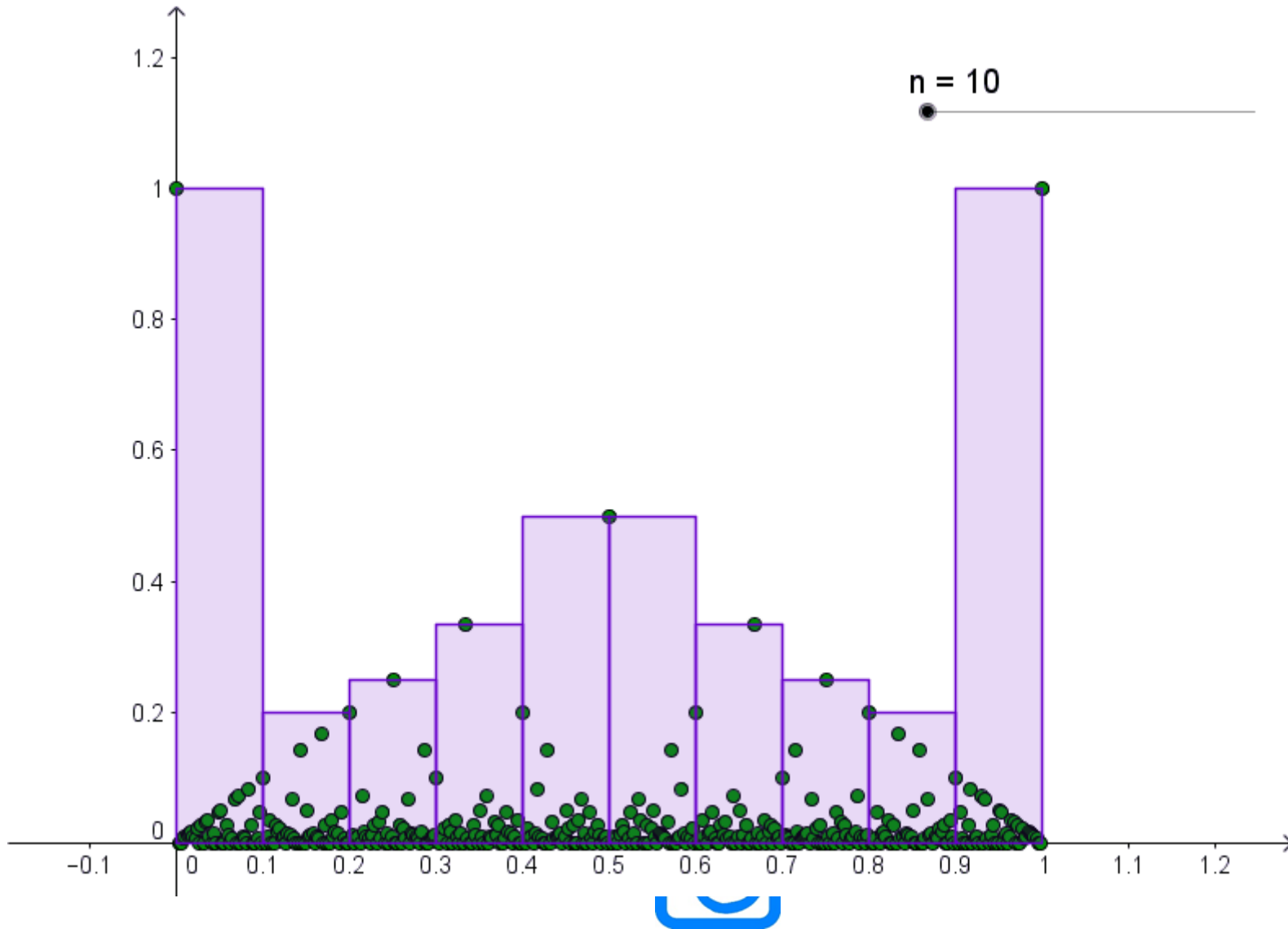
wat betekent:

$$\forall \varepsilon > 0: \exists k: n > k \Rightarrow S_n < \varepsilon$$

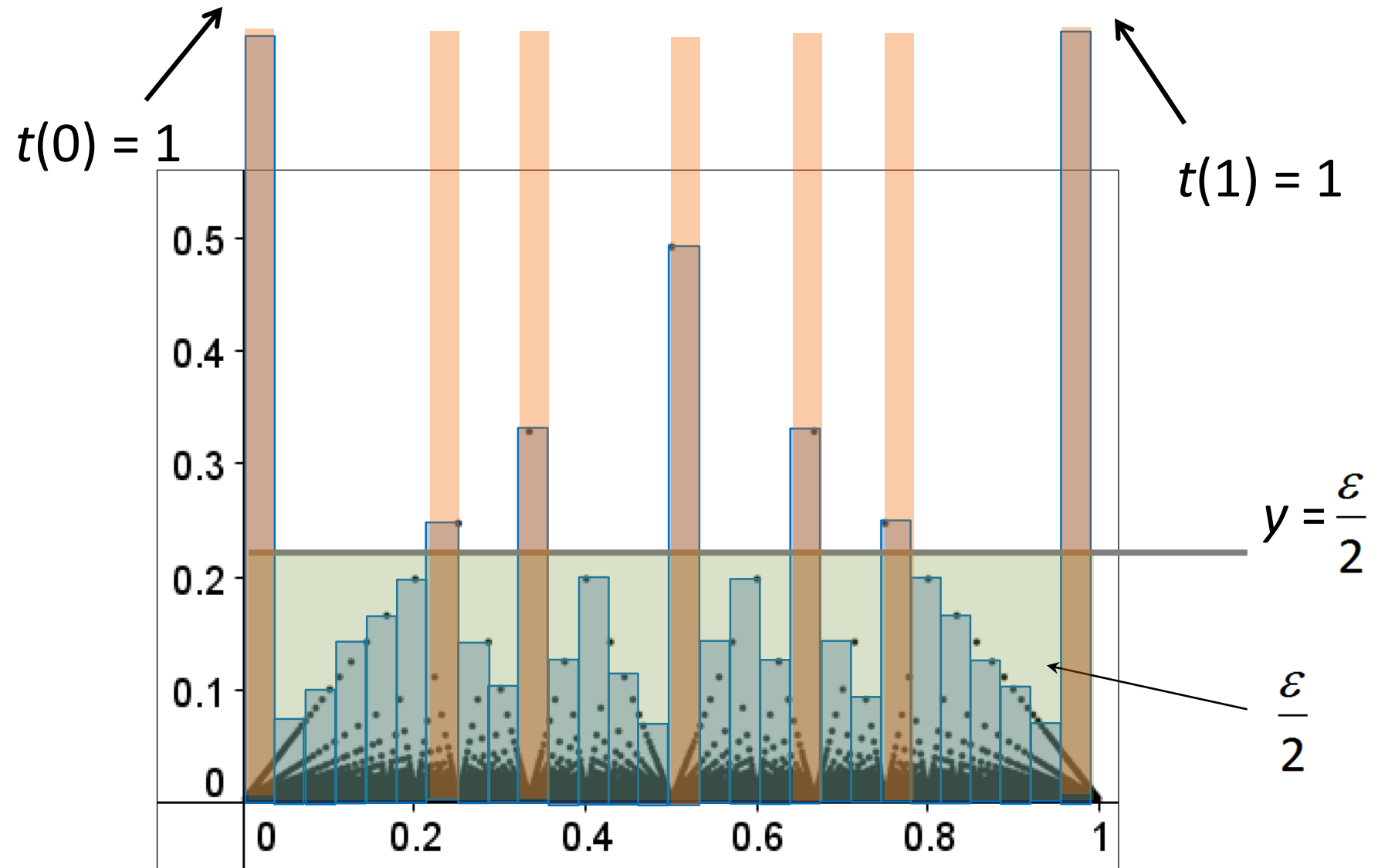
bovensom



Verfijnde definities: integraal



Verfijnde definities: integraal



Verfijnde definities: integraal

We willen bewijzen: $\int_0^1 t(x)dx = 0$

Er geldt: $\lim s_n = 0$.

We moeten dus aantonen: $\lim S_n = 0$,

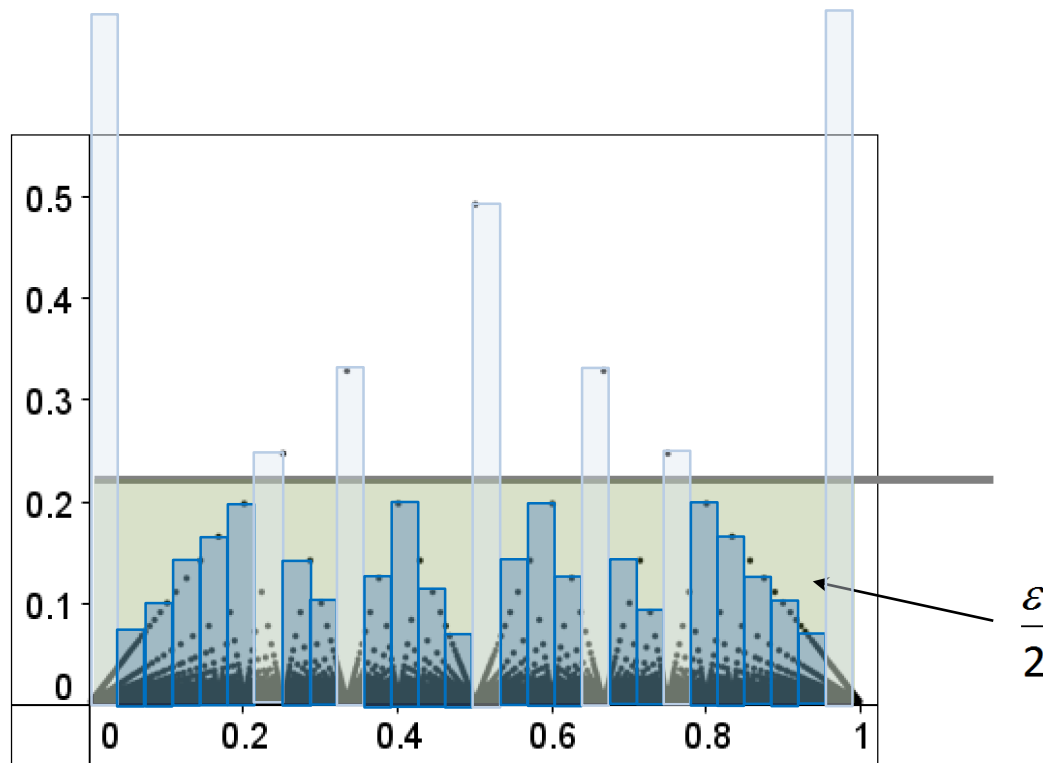
wat betekent:

$$\forall \varepsilon > 0: \exists k: n > k \Rightarrow S_n < \varepsilon$$

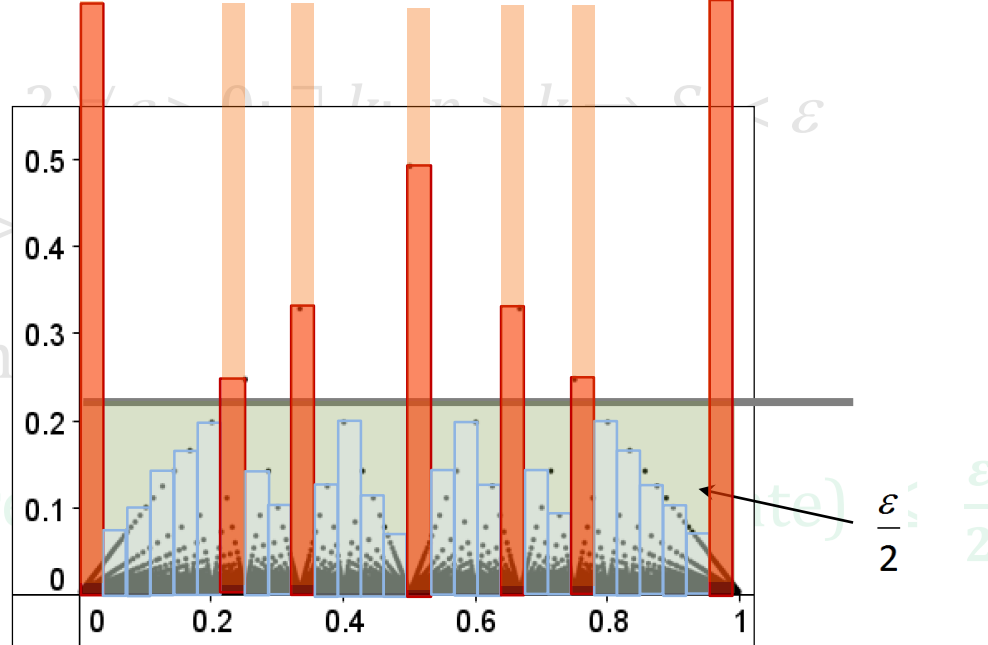


$$? \forall \varepsilon > 0: \exists k: n > k \Rightarrow S_n < \varepsilon$$

- Beschouw $\varepsilon > 0$, willekeurig klein.
- Teken de rechte $y = \frac{\varepsilon}{2}$.
- Totale opp. (rechthoeken onder de rechte) $\leq \frac{\varepsilon}{2}$



- Beschouw $\varepsilon > 0$
- Teken de rechthoeken
- Totale opp. (re...



- Eindelijk aantal rechthoeken (m) steken boven de rechte uit.
- Totale opp. (rechthoeken die uitsteken) $\leq m \cdot \frac{1}{n}$
- Neem dus n zo dat $m \cdot \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$, of nog: $n > \frac{2m}{\underbrace{\varepsilon}_k}$.
- Dan: $n > k \Rightarrow S_n \leq \frac{\varepsilon}{2} + m \cdot \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Fasen

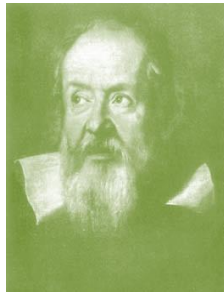
Historisch



4. Bewijzen met de
verfijnde definities

3. Verfijnde definities

19^{de} eeuw: **Cauchy, Weierstrass, Riemann**



2. Problemen met
de visuele definities

17^{de} eeuw: Galilei, Huygens, **Newton, Leibniz**

1. Visueel



Bibliografie

- Bressoud, D. (1994). *A radical approach to analysis*. MAA, Washington.
- Hairer, E., Wanner, G. (1996). *Analysis by its history*, Springer, New York.
- Eggermont, H., Roelens, M. (2009). Begrippen definiëren in de analyse, *Uitwisseling 25/4*, 13-54.
- Eggermont, H., Roelens, M. Définir les concepts de l'analyse: une approche phasée, *Losanges 13*, 28-38.
- Eggermont, H., Roelens, M. (2011). Defining derivatives, integrals and continuity in secondary school: a phased approach inspired by history. In: Barbin, E., Kronfellner, M., Tzanakis, C. (editors), *History and Epistemology in Mathematics Education: Proceedings of the Sixth European Summer University (ESU 6)*, Wien 2010. Verlag Holzhausen GmbH Wien.





Bedankt!

Wist je dat...

Ook Nederlanders een abonnement mogen nemen op
UITWISKELING?