Sociale Dilemma's en Speltheorie

Krzysztof R. Apt

CWI, Amsterdam

Prisoner's Dilemma

	C	D
C	$2, 2$	$0, 3$
D	$3, 0$	$1, 1$

- Elke speler heeft twee strategieën:
  C ('cooperate') and D ('defect').
- Interpretatie:
  C: Je krijgt 2€.
  D: Ik krijg 1€.
- Voorbeeld:
  Als de spelers C en D kiezen, dan krijgen zij 0€ en 3€.

Strategische Spellen: Definitie

Een strategisch spel voor $|N| \geq 2$ spelers:

$$(N, \{S_i\}_{i \in N}, \{p_i\}_{i \in N}).$$

Elke speler i heeft

- een verzameling van strategieën S_i en
- een uitbetaling-functie ('payoff function')

$$p_i : S_1 \times \cdots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Aannames:

- Spelers kiezen hun strategieën simultaan.
- Elke speler wil zijn uitbetaling maximaliseren.

Hoofd Begrippen

- Notatie:
  $s, \ (s_i, s_{-i}) \in S_1 \times \cdots \times S_n$;
  s ook geschreven als (s_i, s_{-i}).
- s_i is een beste respons t.o.v. s_{-i} als

$$\forall s_i' \in S_i : \ p_i(s_i, s_{-i}) \geq p_i(s_i', s_{-i}).$$

s_i is een beste respons van speler i t.o.v. de strategieën van de andere spelers als het tenminste zo goed is als elke andere strategie van hem.

Hoofd Begrippen (2)

- s is een Nash evenwicht als voor alle i, s_i een beste respons is t.o.v. s_{-i}.

  Een Nash evenwicht is een combinatie van strategieën van de spelers z.d.d. elke strategie een beste respons is t.o.v. de andere strategieën.
- Sociale welvaart van s:

$$SW(s) := \sum_{j=1}^{n} p_j(s).$$

- s is een sociaal optimum als $SW(s)$ maximaal is.

Voorbeeld: Prisoner's Dilemma (2)

	C	D
C	$2, 2$	$0, 3$
D	$3, 0$	$1, 1$

Waarom een dilemma?

- (C, C) is een uniek sociaal optimum.
- (D, D) is een uniek Nash evenwicht.
- Prijs van anarchie:

$$\frac{SW(C,C)}{SW(D,D)} = \frac{2+2}{1+1} = 2.$$

Quiz

Is Split or Steal een Prisoner's dilemma spel:
https://www.youtube.com/watch?v=p3Uos2fzIJ0
?

Quiz (2)

	Split	Steal
Split	$50K, 50K$	$0, 100K$
Steal	$100K, 0$	$0, 0$

Quiz (3)

	Split	Steal
Split	$50K, 50K$	$0, 100K$
Steal	$100K, 0$	$0, 0$

Dit spel heeft 3 Nash evenwichten:
(Split, Steal), (Steal, Split), (Steal, Steal),

Prisoner's Dilemma voor n Spelers

- $n > 1$ spelers,
- twee strategieën:
  1 (eerder C),
  0 (eerder D).

$$p_i(s) := \begin{cases} 2\sum_{j \neq i} s_j + 1 & \text{als } s_i = 0 \\ 2\sum_{j \neq i} s_j & \text{als } s_i = 1 \end{cases}$$

- Voor $n = 2$ krijgen we het oorspronkelijke Prisoner's Dilemma spel.
- $\sum_{j \neq i} s_j$ is gelijk aan het aantal 1 strategieën in s_{-i}.
- Zij $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$ en $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$.
- $\mathbf{0}$ is een uniek Nash evenwicht, met sociale welvaart n.
- $\mathbf{1}$ is een uniek sociaal optimum, met sociale welvaart $2n(n-1)$.
- Prijs van anarchie: $2(n-1)$.

Reiziger's dilemma

- 2 spelers,
- strategieën van elke speler: $\{2, \ldots, 100\}$,
- de uitbetaling-functies:

$$p_i(s) := \begin{cases} s_i & \text{als } s_i = s_{-i} \\ s_i + 2 & \text{als } s_i < s_{-i} \\ s_{-i} - 2 & \text{anders} \end{cases}$$

Reiziger's dilemma

- 2 spelers,
- strategieën van elke speler: $\{2, \ldots, 100\}$,
- de uitbetaling-functies:

$$p_i(s) := \begin{cases} s_i & \text{als } s_i = s_{-i} \\ s_i + 2 & \text{als } s_i < s_{-i} \\ s_{-i} - 2 & \text{anders} \end{cases}$$

Wat zijn de Nash evenwichten van dit spel?

Reiziger's dilemma (2)

- 2 spelers,
- strategieën van elke speler: $\{2, \ldots, 100\}$,
- de uitbetaling-functies:

$$p_i(s) := \begin{cases} s_i & \text{als } s_i = s_{-i} \\ s_i + 2 & \text{als } s_i < s_{-i} \\ s_{-i} - 2 & \text{anders} \end{cases}$$

- $(2, 2)$ is een uniek Nash evenwicht.

Reiziger's dilemma (2)

- 2 spelers,
- strategieën van elke speler: $\{2, \ldots, 100\}$,
- de uitbetaling-functies:

$$p_i(s) := \begin{cases} s_i & \text{als } s_i = s_{-i} \\ s_i + 2 & \text{als } s_i < s_{-i} \\ s_{-i} - 2 & \text{anders} \end{cases}$$

- $(2, 2)$ is een uniek Nash evenwicht.
- $(100, 100)$ is een uniek sociaal optimum.

Spel van Publieke Goederen

- n spelers,
- c: een vermenigvuldiger, $n \geq c > 1$,
- $S_i = [0, 1]$,
- $p_i(s) := 1 - s_i + \frac{c}{n} \sum_{j \in N} s_j$.
- 'Free riding': bijdrage 0.

Spel van Publieke Goederen

- n spelers,
- c: een vermenigvuldiger, $n \geq c > 1$,
- $S_i = [0, 1]$,
- $p_i(s) := 1 - s_i + \frac{c}{n} \sum_{j \in N} s_j$.

- 'Free riding': bijdrage 0.
- $\mathbf{0}$ is een uniek Nash evenwicht, met sociale welvaart n.

Spel van Publieke Goederen

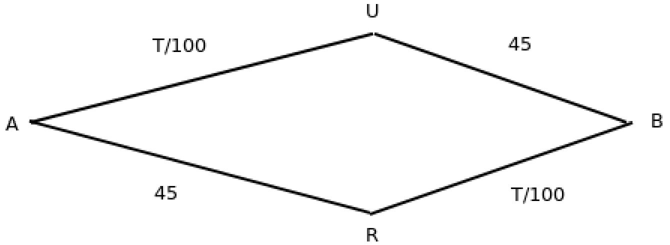
- n spelers,
- c: een vermenigvuldiger, $n \geq c > 1$,
- $S_i = [0, 1]$,
- $p_i(s) := 1 - s_i + \frac{c}{n} \sum_{j \in N} s_j$.

- ‘Free riding’: bijdrage 0.
- $\mathbf{0}$ is een uniek Nash evenwicht, met sociale welvaart n.
- $\mathbf{1}$ is een uniek sociaal optimum, met sociale welvaart cn.
- Prijs van anarchie: c.

Ander Voorbeeld

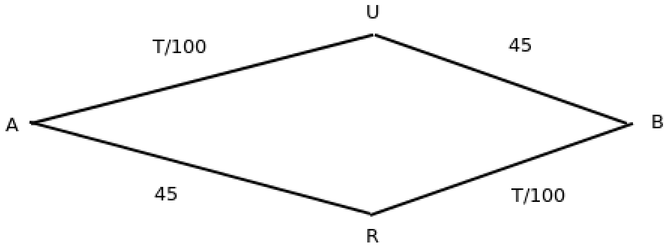
Aannames:

- 4000 bestuurders (spelers) rijden van A naar B.
- Elke bestuurder heeft 2 mogelijkheden (strategieën).



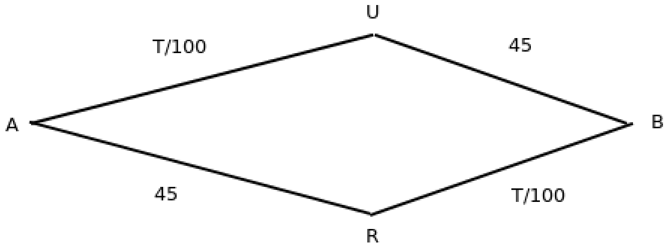
Vraag. Wat zijn hier de Nash evenwichten?
(T = aantal bestuurders, T/100 = vertraging.)

Nash Evenwicht



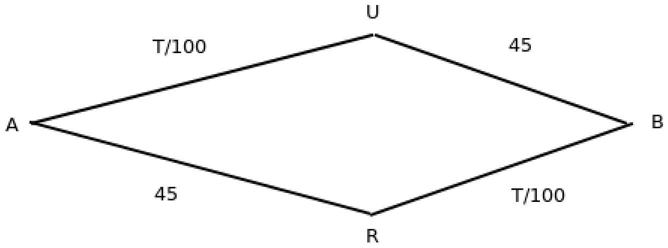
- Antwoord. 2000/2000.

Nash Evenwicht



- Antwoord. 2000/2000.
- Totale rijtijd. $2000/100 + 45 = 45 + 2000/100 = 65$.

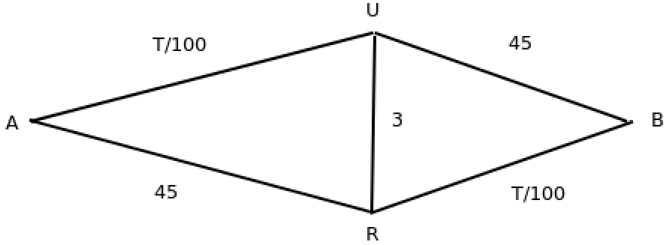
Nash Evenwicht



- Antwoord. 2000/2000.
- Totale rijtijd. $2000/100 + 45 = 45 + 2000/100 = 65$.
- Opmerking. 2000/2000 is ook een sociaal optimum.

Braess Paradox

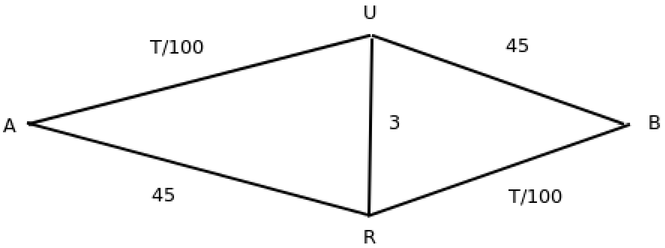
- Voeg een snelle route van U naar R toe.



- Elke bestuurder heeft nu 3 mogelijkheden (strategieën):
  A - U - B,
  A - R - B,
  A - U - R - B.

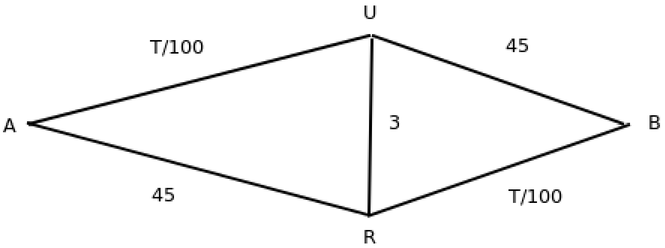
Vraag. Wat zijn hier de Nash evenwichten?

Nash Evenwicht



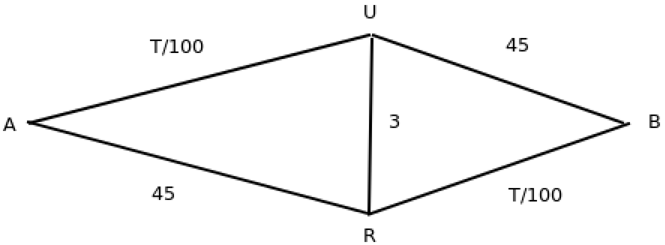
- Antwoord. Iedereen kiest de route A - U - R - B.

Nash Evenwicht



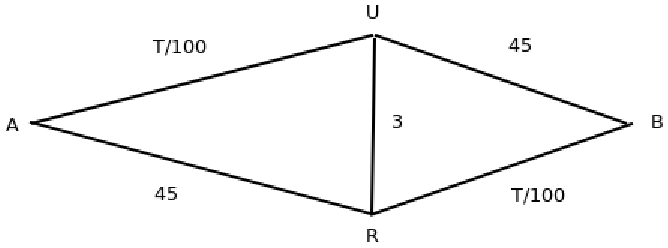
- Antwoord. Iedereen kiest de route A - U - R - B.
- Waarom? De route A - U - R - B is altijd een beste respons.

Een probleem



- Totale rijtijd: $4000/100 + 4000/100 = 80$.

Een probleem



- Totale rijtijd: $4000/100 + 4000/100 = 80$.
- Opmerking. $2000/2000$ blijft een sociaal optimum.

Gebeurt het eigenlijk?

Van Wikipedia ('Braess Paradox'):

- In Seoul, South Korea, een speeding-up in traffic around the city was seen when een motorway was removed as part of the Cheonggyecheon restoration project.
- In Stuttgart, Germany after investments into the road network in 1969, the traffic situation did not improve until a section of newly-built road was closed for traffic again.
- In 1990 the closing of 42nd street in New York City reduced the amount of congestion in the area.
- In 2008 Youn, Gastner and Jeong demonstrated specific routes in Boston, New York City and London where this might actually occur and pointed out roads that could be closed to reduce predicted travel times.

Beste Respons Dynamiek

- Kies een 'beginsituatie': elke speler kiest een strategie.
- Een 'ontevreden' speler mag een andere keuze maken via de beste respons.
- Herhaal deze procedure.
- Als het eindigt dan bereiken we een Nash evenwicht.

Beste Respons Dynamiek

- Kies een 'beginsituatie': elke speler kiest een strategie.
- Een 'ontevreden' speler mag een andere keuze maken via de beste respons.
- Herhaal deze procedure.
- Als het eindigt dan bereiken we een Nash evenwicht.
- Voorbeeld 1.

	C	D
C	$2,2$	$0,3$
D	$3,0$	$1,1$

$(C,C) \to (C,D) \to (D,D)$.

Netwerk Spellen

- Voorbeeld 2.
  Het gedrag van de bestuurders in ons 'A - U - R - B' voorbeeld, nadat de weg U - R toegevoegd werd.
- Stelling (Rosenthal, 1973)
  In netwerkspellen eindigt de beste respons dynamiek altijd.
- Conclusie. Deze spellen hebben altijd een Nash evenwicht.

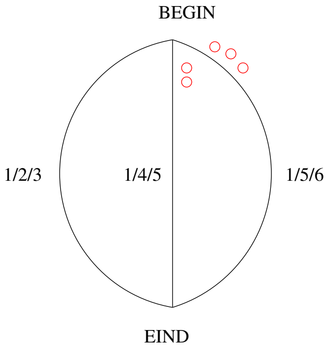
Netwerk Spellen

- Voorbeeld 2.
  Het gedrag van de bestuurders in ons 'A - U - R - B' voorbeeld, nadat de weg U - R toegevoegd werd.
- Stelling (Rosenthal, 1973)
  In netwerkspellen eindigt de beste respons dynamiek altijd.
- Conclusie. Deze spellen hebben altijd een Nash evenwicht.
- Stelling (Christodoulou, Koutsoupias, 2005)
  De prijs van anarchie van netwerkspellen met lineaire vertragingfuncties is $\frac{5}{2}$.

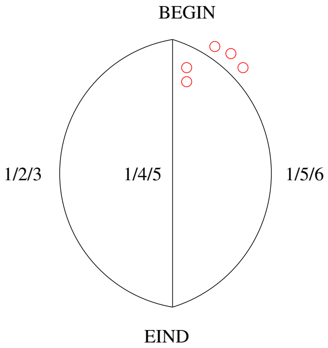
Tolweg-Spellen

Voorbeeld

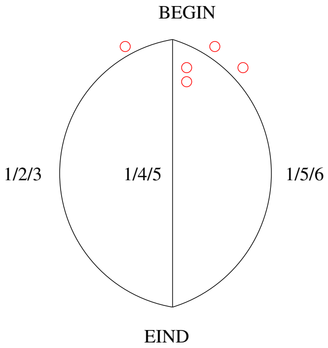
- 5 bestuurders.
- Elke bestuurder kiest een route van BEGIN naar EIND,
- Meer bestuurders kiezen dezelfde route $\Rightarrow$ de kosten worden verdeeld.



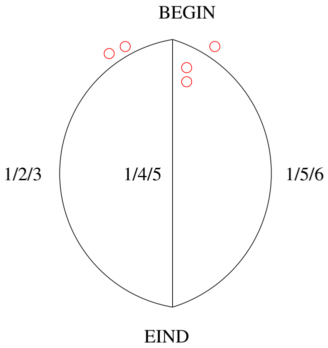
Een mogelijke evolutie (1)



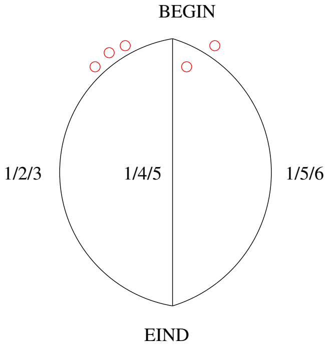
Een mogelijke evolutie (2)



Een mogelijke evolutie (3)



Een mogelijke evolutie (4)



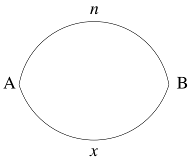
Een Nash evenwicht werd bereikt.

Opmerking. De stelling van Rosenthal geldt voor zowel netwerk als tolweg-spellen.

Prijs van Stabiliteit

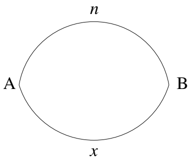
- De spelers minimaliseren nu de kosten i.p.v. maximaliseren de uitbetaling.
- Definitie.
  PvS: $\frac{\text{sociale kosten van het beste Nash evenwicht}}{\text{sociaal optimum}}$
- Vraag. Wat is de PvS van tolweg-spellen?

Voorbeeld



n - (het even) aantal spelers en de vertraging op de bovenste route.
x - het aantal bestuurders en de vertraging op de onderste route.

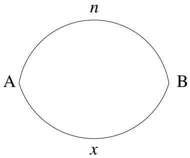
Voorbeeld (2)



n - (even) aantal spelers en de vertraging op de bovenste route.
x - aantal rijders en de vertraging op de onderste route.

- Beste Nash evenwicht
  Twee Nash evenwichten:
  $1/(n-1)$, met kosten $n + (n-1)^2$.
  $0/n$, met kosten n^2.

Voorbeeld (3)



n - (het even) aantal spelers en de vertraging op de bovenste route.

x - het aantal bestuurders en de vertraging op de onderste route.

- Beste Nash evenwicht

  Twee Nash evenwichten:

  $1/(n-1)$, met kosten $n + (n-1)^2$.

  $0/n$, met kosten n^2.

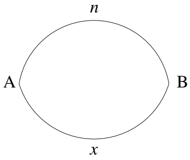
- Sociaal optimum

  Neem $f(x) = (n-x) \cdot n + x \cdot x = x^2 - n \cdot x + n^2$.

  We willen f minimaliseren.

  $f'(x) = 2x - n$, dus $f'(x) = 0$ als $x = \frac{n}{2}$.

Voorbeeld (4)

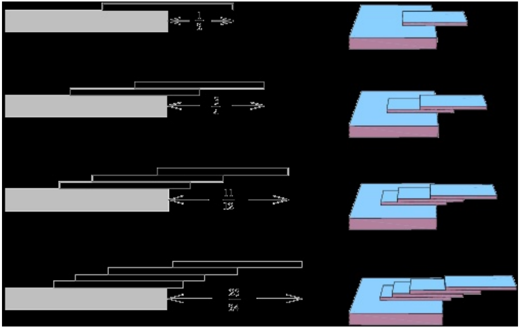


- Beste Nash evenwicht
  $1/(n-1)$, met kosten $n + (n-1)^2$.
- Sociaal optimum
  $f(x) = x^2 - n \cdot x + n^2$.
  Sociaal optimum $= f(\frac{n}{2}) = \frac{3}{4}n^2$.
- PvS $= (n + (n-1)^2) / \frac{3}{4}n^2 = \frac{4}{3}\frac{n+(n-1)^2}{n^2}$.
- $\lim_{n\to\infty}$ PvS $= \frac{4}{3}$.

Harmonische Getallen

- $H(n) = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$.
- Stelling (Oresme, circa 1350) $H(n)$ divergeert.
- Stelling (Euler, 1734) $\lim_{n\to\infty} H(n) - \ln(n) = \gamma$.

Voorbeeld. Je stapelt veilig boeken:



Vraag: Met hoeveel boeken kun je de dubbele afstand bereiken?
Antwoord: kleinste n z.d.d. $\frac{1}{2}H(n) \geq 2$.
$\frac{1}{2}H(30) = 1.99749$, $\frac{1}{2}H(31) = 2.01362$.

Bewijs van Nicolas Oresme

$$
\begin{array}{rl}
 & 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + \ldots \\
= & 1 + 1/2 + (1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) + \ldots \\
> & 1 + 1/2 + (1/4 + 1/4) + (1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8) + \ldots \\
= & 1 + 1/2 + \qquad 1/2 \qquad + \qquad\qquad 1/2 \qquad\qquad + \ldots
\end{array}
$$

PvS

- Stelling (Anshelevich et al., 2004)
  De PvS van een tolweg-spel voor n spelers is $\leq H(n)$.
- Het 'goede' Nash evenwicht wordt middels de beste respons dynamiek bereikt.
- Helaas: het kan exponentieel lang duren totdat het evenwicht bereikt wordt.

Bedankt voor uw aandacht.