

De derde afgeleide

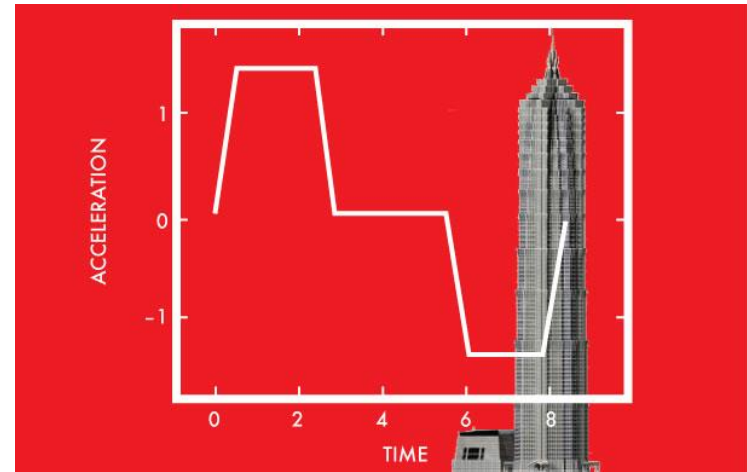
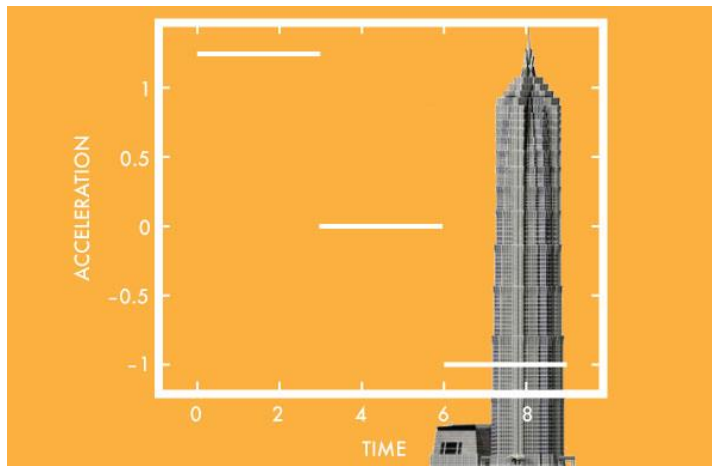
Fred Lauwers

NWD, 5 februari 2016

Google leergang '13-'14

- Ter voorbereiding op de nieuwe programma's
- Thema: *authentieke toepassingen*
- Bedoeld voor vwo 4, wiskunde B:
begin van differentiëren en integreren:
een aanpak met grafieken
- <http://www.leergangwiskunde.nl/lesmateriaal.html>

Een model voor een lift



Authentiek?

- De oplevering van de Shanghai Tower in 2014, de hoogste wolkenkrabber van Azië (632 m)
- Er werd bekendgemaakt wat de maximale snelheid, de maximale versnelling en de (maximale) verandering van de versnelling (de zogenaamde ‘jerk’) van de lift zijn
- Vraag: *Hoe lang duurt het om van de BG op de bovenste verdieping te komen?* (565,4 m)
(bron Brilliant.org)



Jerk?

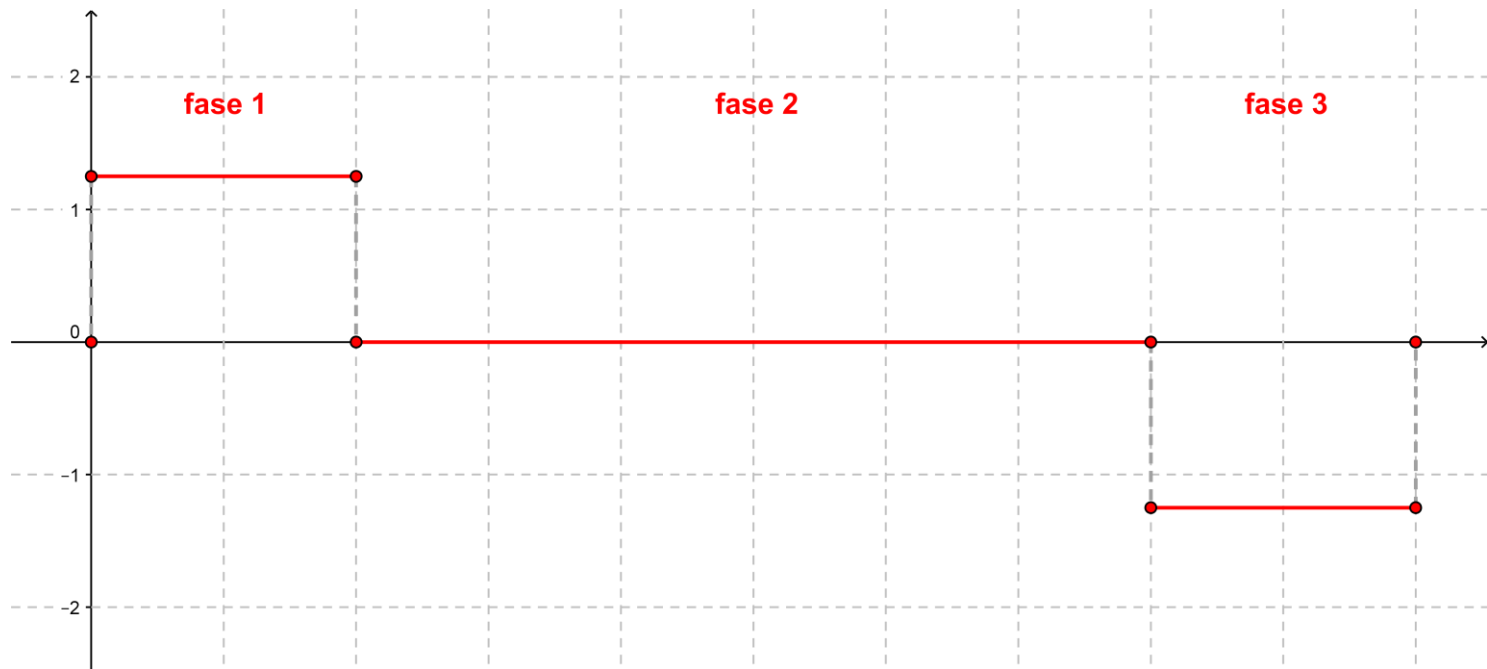
- De toren bezit 's werelds snelste lift, die een snelheid van 18 m/s kan bereiken (bijna 65 km/u!)
- Om ongelukken met zwangere vrouwen te voorkomen, is de maximaal toegestane versnelling $1,25 \text{ m/s}^2$

JerK?

- Voor het comfort van de passagiers is een **jerK** (verandering van de versnelling) toegestaan van maximaal $2,50 \text{ m/s}^3$
- Want: versnelling = kracht, niet plotseling aan- en uitzetten, gevaar voor whiplash
- Martijn Slob (NVvW-dag 2014): in de machinebouw heb je daar ook mee te maken: het veroorzaakt snelle slijtage

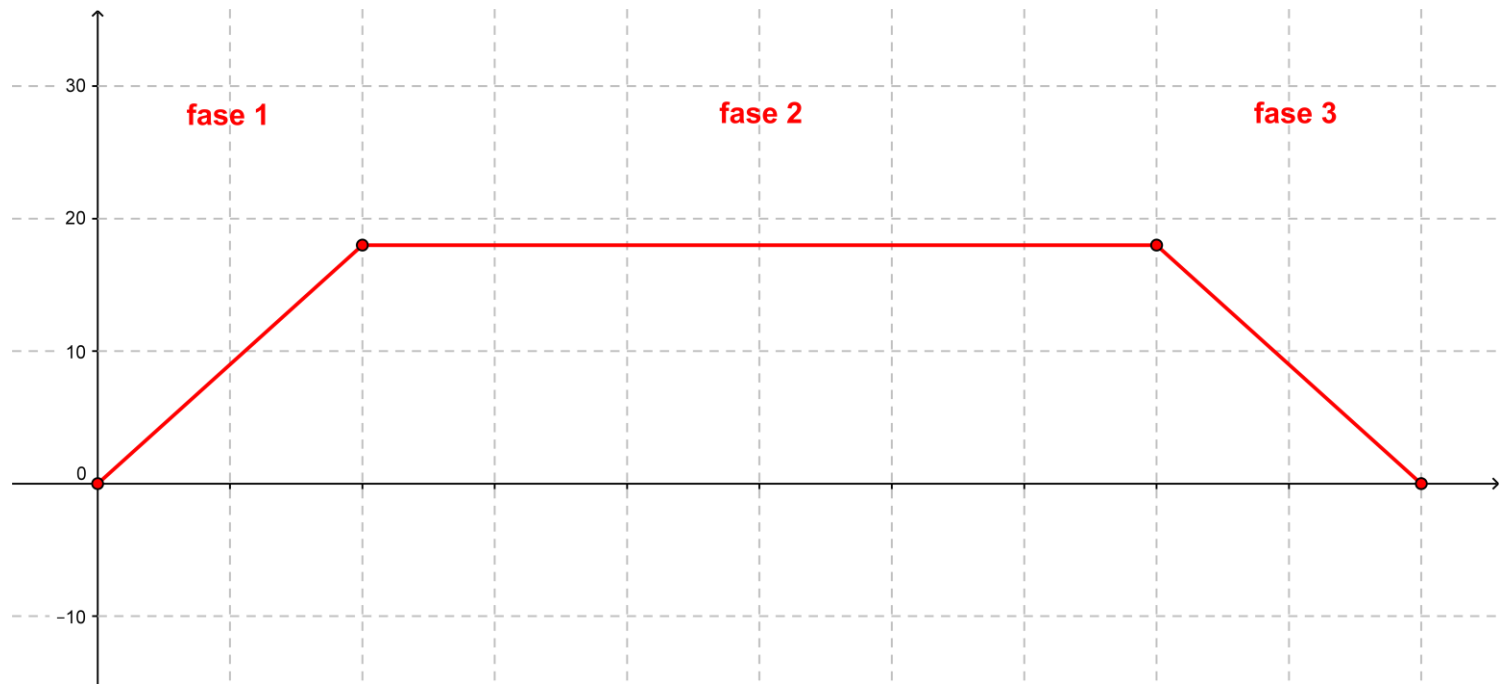
Zonder jerk

- Versnelling verandert instantaan:



Zonder jerk

- De grafiek van de snelheid:



Zonder jerk

Fase 1, aanpak

1. Bereken hoe lang het duurt om bij een versnelling van $1,25 \text{ m/s}^2$ een snelheid van 18 m/s te bereiken
2. Bereken de oppervlakte onder de grafiek van de versnelling. Waaraan is dit gelijk (eenheden)?
3. Bereken de oppervlakte onder de grafiek van de snelheid. Waaraan is dit gelijk (eenheden)?
4. Welke afstand er in fase 1 afgelegd?

Zonder jerk

Fase 2,3, aanpak

1. Bereken de tijd en de afstand voor fase 2 en 3
2. Los het probleem op (de hoogte is 565,4 m)

Zonder jerk

- De totale hoogte is 565,4 m.
- Fase 1: 129,6 m in 14,4 s; Fase 3: idem
- Fase 2: hoogte afgelegd met maximale snelheid:
 $565,4 - 2 \cdot 129,6 = 306,2$ m
- Tijd benodigd voor dat deel:
 $306,2 / 18 = 17,0$ s
- Totale tijd: $17,0 + 2 \cdot 14,4 = 45,8$ s

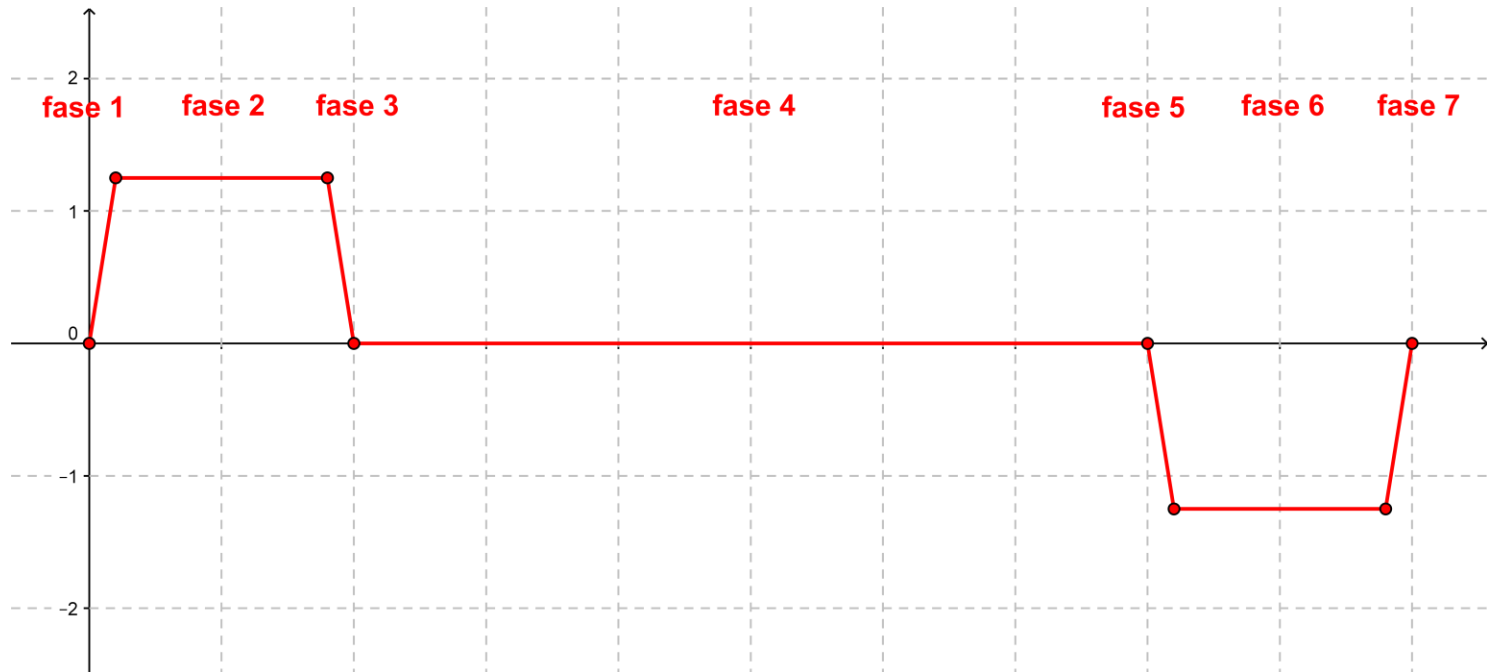
Zonder jerk

- In fase 1 geldt dus:

Afgelegde weg	$s(t) = 0,625 \cdot t^2$	$= 0,5 \cdot 1,25 t \cdot t$
Snelheid	$v(t) = 1,25 \cdot t$	$v(t) = s'(t)$
Versnelling	$a(t) = 1,25$	$a(t) = v'(t)$

Met jerk

- Versnelling verandert lineair, door het optreden van positieve of negatieve jerk:



Met jerk

- Hoe ziet de grafiek van de jerk eruit?
- Hoe ziet de grafiek van de snelheid eruit?

Met jerk

	Jerk (m/s ³)	Versnelling (m/s ²)	Snelheid (m/s)
Fase 1	2,50	Lin. Stijgend	Toen. Stijgend
Fase 2	0	1,25	Lin. Stijgend
Fase 3	-2,50	Lin. Dalend	Afn. Stijgend
Fase 4	0	0	Constant (18)
Fase 5	-2,50	Lin. Dalend	Toen. Dalend
Fase 6	0	-1,25	Lin. Dalend
Fase 7	2,50	Lin. Stijgend	Afn. Dalend

Met jerk

Fase 1, aanpak

1. Bereken hoe lang het duurt om bij een (constante) jerk van $2,50 \text{ m/s}^3$ een versnelling van $1,25 \text{ m/s}^2$ te bereiken
2. Bereken de oppervlakte onder de grafiek van de jerk. Waaraan is dit gelijk?
3. Bereken de oppervlakte onder de grafiek van de versnelling. Waaraan is dit gelijk?
4. Welke snelheid wordt er in fase 1 bereikt?

Met jerk

- In fase 1 geldt dus:

Afgelegde weg	$s(t) = \dots?$	
Snelheid	$v(t) = 1,25 \cdot t^2$	$v(t) = s'(t)$
Versnelling	$a(t) = 2,50 \cdot t$	$a(t) = v'(t)$
Jerk	$j(t) = 2,50$	$j(t) = a'(t)$

Met jerk

- Er geldt nu dat de ‘primitieve’ van de snelheid de formule voor de afgelegde weg geeft:

Afgelegde weg

$$s(t) = 1/3 * 1,25 * t^3$$

- Bereken daarmee de afgelegde weg na 0,5 s

Met jerk

Fase 2 en volgende, aanpak

1. Bereken de tijd en de afstand voor fase 2
2. Los het probleem op

Met jerk

Hint(s)

- Van het 1^e jerk-stukje weten we nu:
het duurt 0,5 s,
daarin wordt 0,052 m afgelegd,
neemt de snelheid toe met 0,3125 m/s
en neemt de versnelling toe met 1,25 m/s²

Met jerk

Hint(s)

- Van het 1^e jerk-stukje weten we nu:
het duurt 0,5 s,
daarin wordt 0,052 m afgelegd,
neemt de snelheid toe met 0,3125 m/s
en neemt de versnelling toe met 1,25 m/s²
- Aan het begin van fase 4 moet de snelheid 18 m/s zijn, dus je kunt berekenen hoe lang fase 2 duurt

	t=0	t=t	j 0	j t	a 0	a t	v 0	v t	s 0	s t
fase 1	0	0,5	2,5	2,5	0	1,25	0	0,3125	0	0,052
	0,5						0,3125		0,052	
fase 2	0,5	14,4	0	0	1,25	1,25	0,3125	17,6875	0,052	125,152
	13,9						17,375		125,1	
fase 3	14,4	14,9	-2,5	-2,5	1,25	0	17,6875	18	125,152	134,1
	0,5						0,3125		8,948	
fase 4	14,9	31,4	0	0	0	0	18	18	134,1	431,3
	16,5						0		297,2	
fase 5	31,4	31,9	-2,5	-2,5	0	-1,25	18	17,6875	431,3	440,248
	0,5						-0,3125		8,948	
fase 6	31,9	45,8	0	0	-1,25	-1,25	17,6875	0,3125	440,248	565,348
	13,9						-17,375		125,1	
fase 7	45,8	46,3	2,5	2,5	-1,25	0	0,3125	0	565,348	565,4
	0,5						-0,3125		0,052	

Met jerk

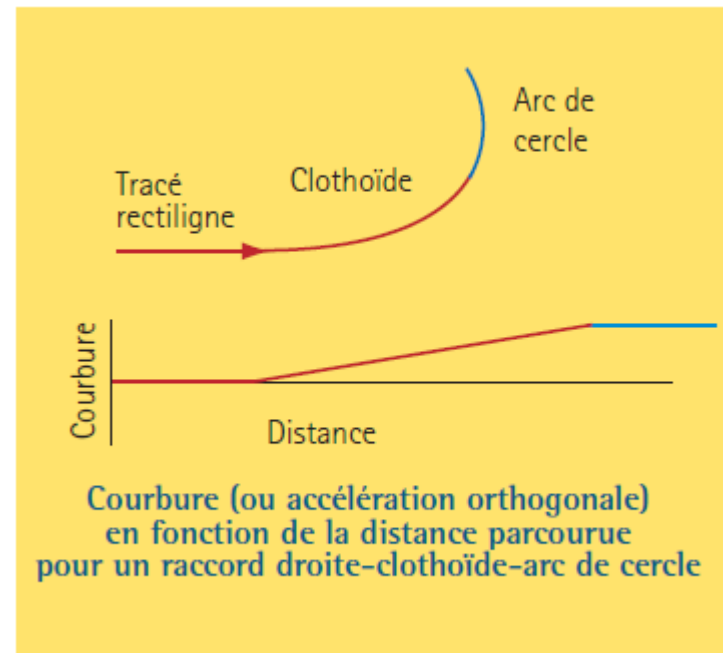
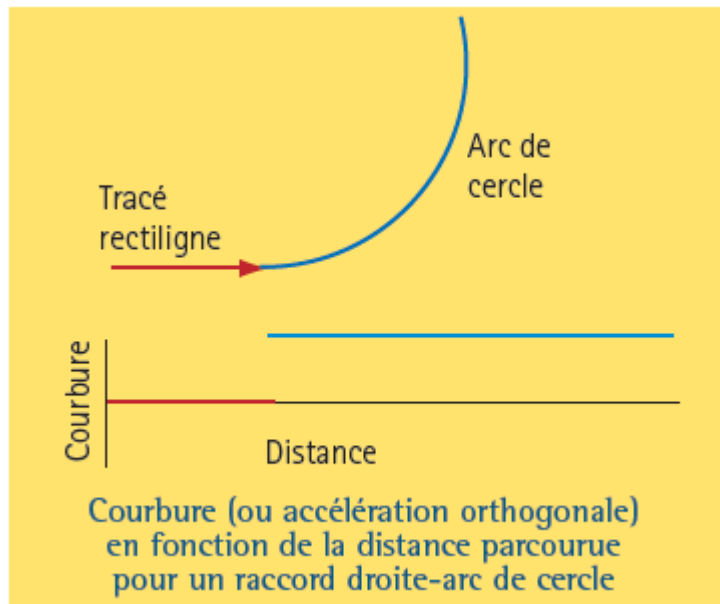
- De tijd benodigd om met de lift boven te komen in het geval waarin sprake is van jerk, bedraagt 46,3 s
- De fasen waarin jerk optreedt, duren heel kort: slechts 0,5 s. Kennelijk is dat al voldoende

Jerk

- Dit was een kennismaking met een systeem waarin de derde afgeleide een rol speelt, hetgeen typisch is voor liften, maar ook voor andere transportmiddelen zoals trams en ...

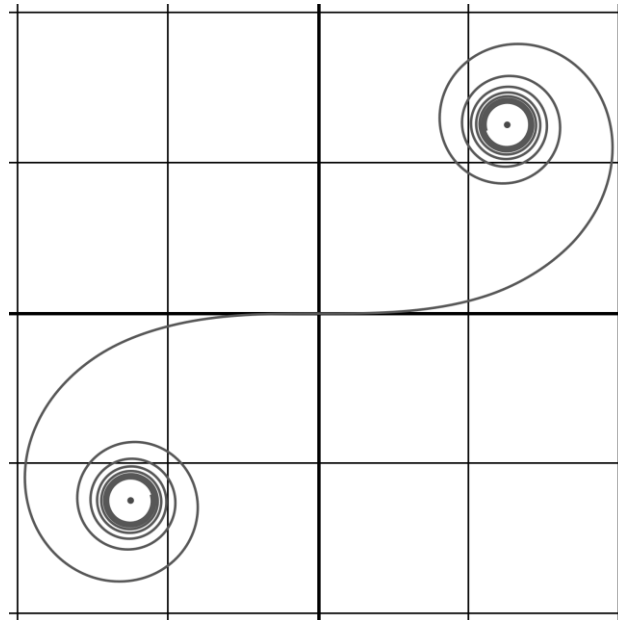
Een toepassing

- Het design van bochten in snelwegen en spoorbanen
- De middelpuntzoekende kracht wordt op een vergelijkbare manier opgebouwd in een apart gedeelte van de bocht, in de vorm van een *clothoïde*



De clothoïde

- De overgangsboog van een rechtlijnige spoorbaan naar een bocht verloopt volgens een *clothoïde*, ook bekend als de *spiraal van Cornu* (of van Euler)



De clothoïde

- De toename van de dwarsversnelling per afgelegde afstand is gelijk, waardoor de toename van de dwarsversnelling per tijdseenheid gelijk is bij constante snelheid.

Dit betekent dat bij het doorlopen van de overgangsboog een automobilist met constante snelheid het stuur kan verdraaien.

Ervaringen op school (1)

- Onlangs weer uitgevoerd in een goede klas 4 wis B
- In het begin vaak “dat hebben we bij natuurkunde al gehad”, hetgeen de leerlingen niet motiveert
- Wanneer je daar voorbij bent en de jerk meedoet, moeten ze goed opletten, want het houvast is verdwenen:
“waar hoort dit nu bij: natuurkunde of wiskunde?”
- In die fase hebben ze veel hulp nodig

Ervaringen op school (2)

- Leerlingen willen het verhaal graag helemaal afmaken met grafieken. En dat is ook mogelijk: zodra je in de eerste drie fasen de duur van de jerk-gedeelten en de snelheid gevonden hebt, kun je eenvoudig de afgelegde weg berekenen.
- En dan ben je inderdaad heel snel klaar:
in fase 2: $13,9 * 18/2 = 125,1$ m
na fase 3: $14,9 * 18/2 = 134,1$ m
- En dat is ook veel mooier...

Ervaringen op school (3)

- Het gevolg is dat het differentiëren en primitiveren niet helemaal uit de verf is gekomen. De aanpak met grafieken heeft de voorkeur. Dat aan het eind toch een primitieve nodig is, blijken ze lastig te vinden.

Vragen, suggesties?



10.3 Primitieve functies

- 32** Gegeven is de functie $f(x) = ax + b$ met $a > 0$ en $b > 0$. Voor $p > 0$ wordt het vlakdeel V_p ingesloten door de grafiek van f , de x -as, de y -as en de lijn $x = p$. Zie figuur 10.20.

De oppervlakte $O(p)$ van V_p is afhankelijk van p .

a Toon aan dat $O(p) = \frac{1}{2}ap^2 + bp$.

b Bereken $\frac{dO}{dp}$. Wat valt op?

- 33** Gegeven is de functie $f(x) = 3x^2$. De functie $O(p)$ geeft voor elke $p > 0$ de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijn $x = p$.

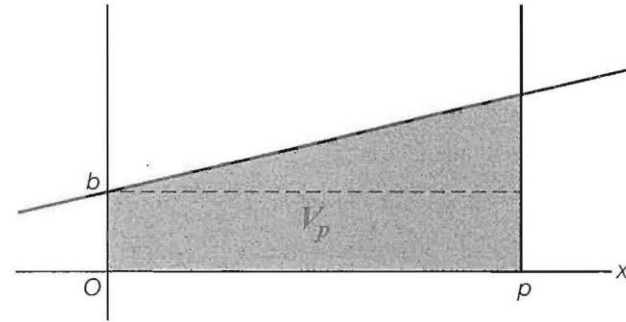
a Vul de tabel in.

p	1	2	3	4	5
$O(p)$					

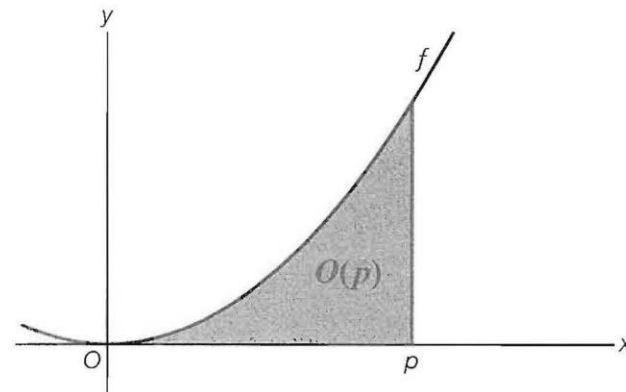
b Licht toe dat je op grond van de tabel kunt vermoeden dat $O(p) = p^3$.

c Bereken $\frac{dO}{dp}$. Wat valt op?

d Voor welke waarde van p is $\int_0^p f(x) dx = 10$?
Geef een exact antwoord.



figuur 10.20



figuur 10.21

- Vierde afgeleide: jounce (bij het ontwerp van Hubble gebruikt)