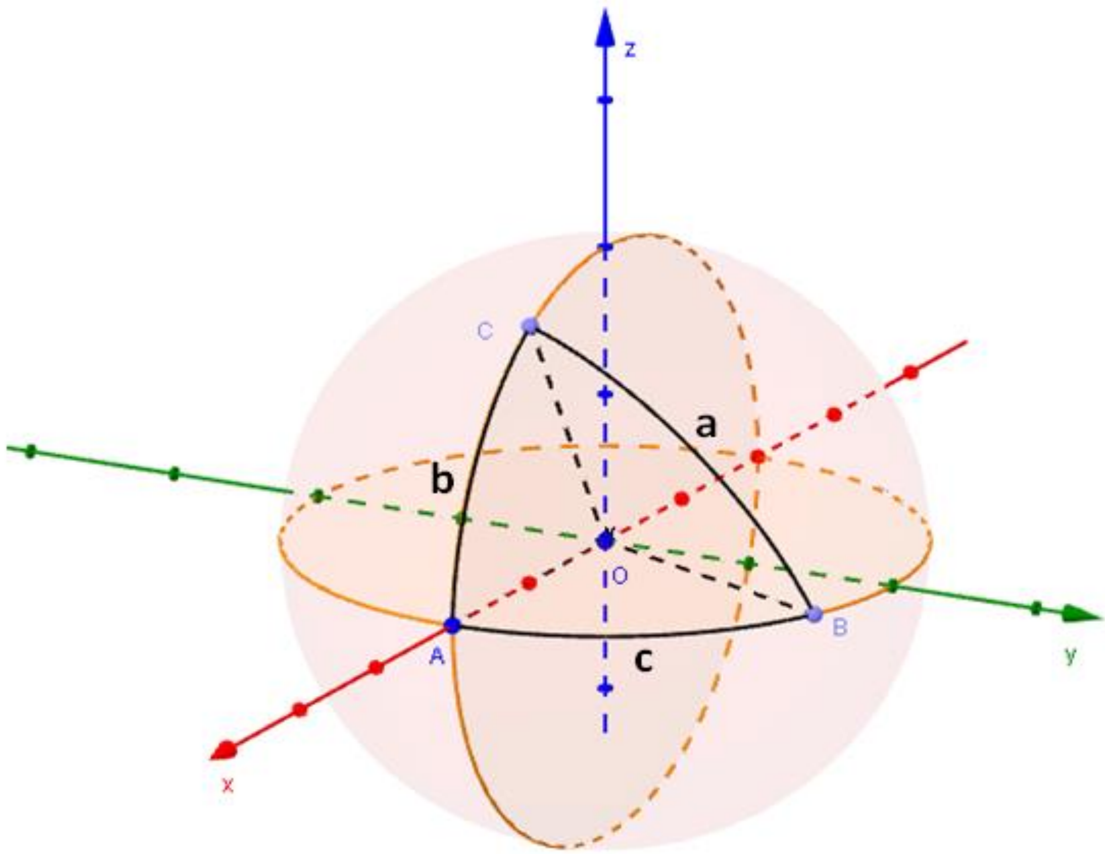
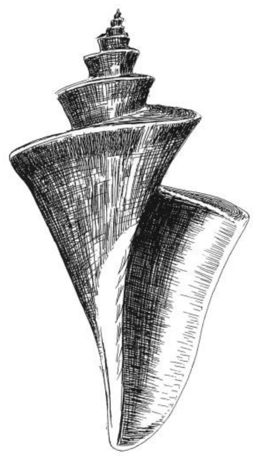
WORKSHOP BOLDRIEHOEKSMETING



VERBETERING WERKBUNDEL

Project wiskunde en cultuur 2015 – NWD 2016

Docenten: Michel Roelens & Christine Swinnen



Anne Nagels (wiskunde - biologie)

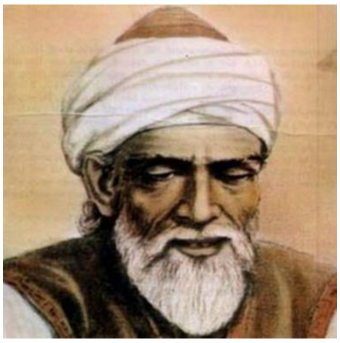
Stien Loyens (wiskunde - biologie)

Jolien Vranken (wiskunde - biologie)

Stef Andriessen (wiskunde - economie)

Cultuur

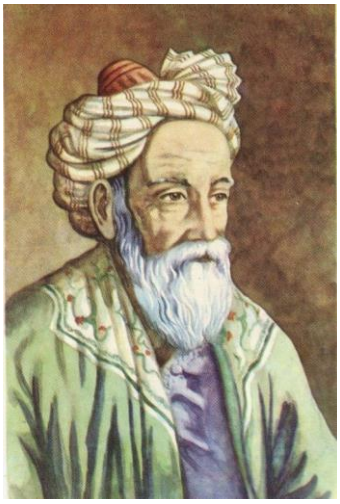
Driehoeksmeting, waarbij verhoudingen van zijden van een driehoek in verband gebracht worden met hoeken van die driehoek (sinus, cosinus, tangens...), is een typische middeleeuwse Arabische aanvulling bij de vlakke meetkunde van de Oude Grieken. Maar de Arabische wiskundigen hielden het hier niet bij. Net als de Grieken, wisten ze dat de Aarde bolvormig is. Een andere bol was de sterrenhemel: een grote hemelsfeer met de aardbol in het midden. Elke dag draait die sfeer volgens hen rond de Aarde. Vlakke meetkunde volstond dus niet voor gebruik in de scheepvaart en in de sterrenkunde; hiervoor was meetkunde op een boloppervlak nodig. Hun driehoeksmeting pasten ze aan tot 'boldriehoeksmeting', met driehoeken op een boloppervlak in de plaats van vlakke driehoeken.



Abul Wafa

Verscheidene wiskundigen doorheen de geschiedenis hebben boldriehoeksmeetkunde bestudeerd. Een aanzet was al gegeven door de Grieken Menelaus en Ptolemaeus, maar een systematische theorie kwam tot stand in de Arabische wereld.

Meer bepaald Abu al-Wafa al-Buzjani (Abul Wafa) en Abu al-Rayhan Muhammad ibn Ahmad Al-Biruni (Al-Biruni) hebben een belangrijke rol gespeeld in de ontwikkeling van de boldriehoeksmeetkunde.



Al-Biruni

Deze twee wiskundigen leefden in de 10de en 11de eeuw.

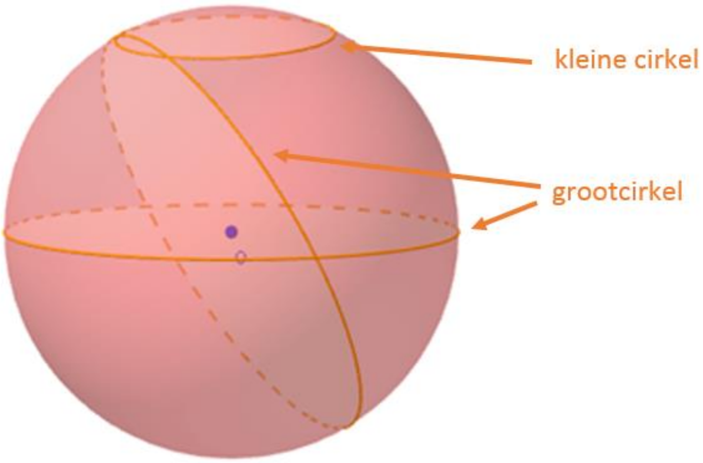
Abul Wafa werd geboren in Buzhgha, in het huidige Iran, en werkte in het astronomisch observatorium van Bagdad.

Khwarazm, in het huidige Oezbekistan, is de geboorteplaats van Al-Biruni. Deze veelzijdige wis- en natuurkundige ontwierp ook nauwkeurige zonnewijzers.

Heel lang is boldriehoeksmeting (of sferische trigonometrie) een schoolvak gebleven in wiskundige studierichtingen van het voortgezet onderwijs. Pas in de jaren 1960 is dit vak verdwenen, met de opkomst van de Moderne Wiskunde (New Maths). Boldriehoeksmeting moest plaats ruimen voor nieuwe onderwerpen: de studie van algebraïsche structuren, differentiaal- en integraalrekening...

Op de schoolbanken is het een vergeten vak, maar in de scheepvaart past men nog steeds boldriehoeksmeting toe.

Grootcirkel op het boloppervlak

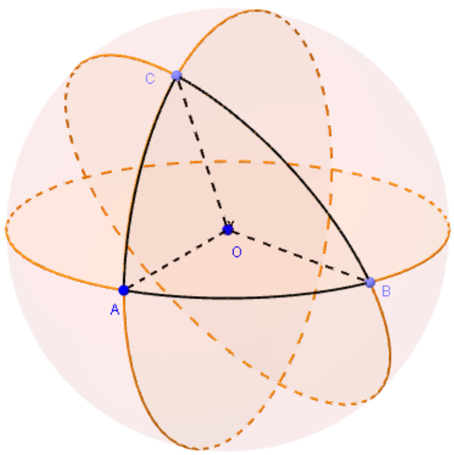


Om te weten hoe een boldriehoek gevormd wordt, moeten we eerst een belangrijk begrip onderscheiden met name *een grootcirkel op het boloppervlak*. Het is een cirkel op het boloppervlak met als middelpunt, het middelpunt van de bol. De naam 'grootcirkel' is verantwoord omdat alle andere cirkels op de bol kleiner zijn. Om de kortste afstand tussen twee punten op de bol te verkrijgen, neem je de grootcirkel door deze twee punten en meet je hierop de (kleinste) boog die de twee punten verbindt. De grootcirkels op een boloppervlak spelen de rol die de rechten spelen in een vlak.

Toepassing

De evenaar en de meridianen op de wereldbol zijn grootcirkels.

Een boldriehoek



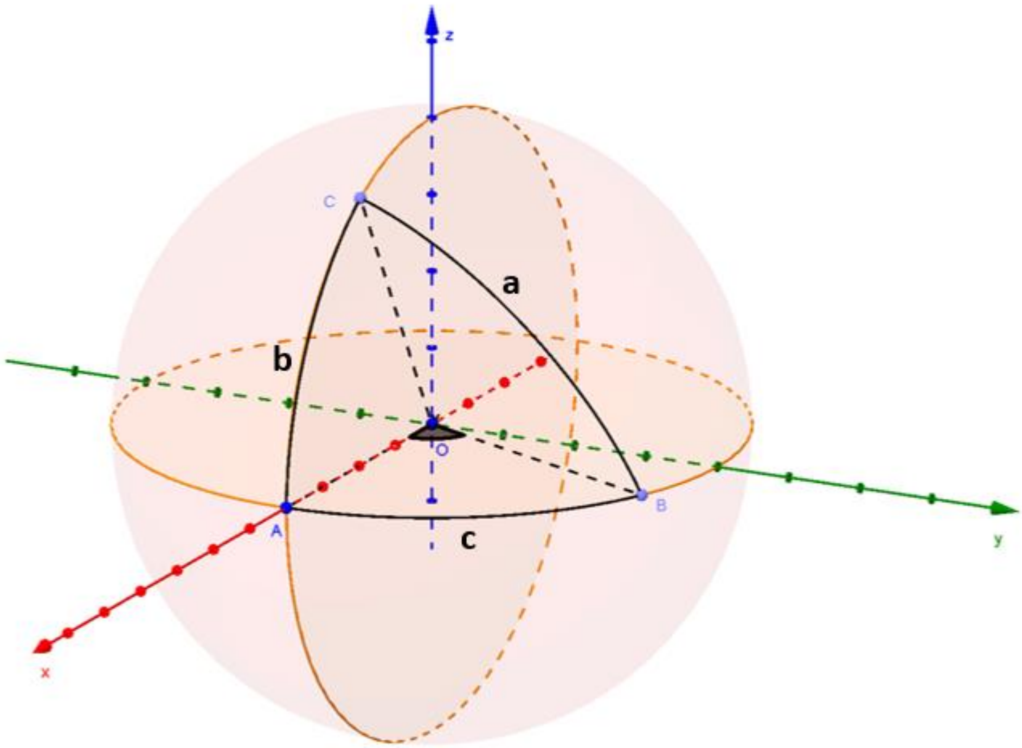
Een driehoek is een meetkundige figuur die ontstaat door drie punten die niet op een rechte lijn liggen, met elkaar te verbinden. Net zoals bij een vlakke driehoek bestaat een boldriehoek uit drie punten van een boloppervlak. Deze drie punten zijn verbonden door bogen van de grootcirkels.

Experiment

We snijden een driehoek uit de schil van een sinaasappel. Deze driehoek duwen we plat op het tafeloppervlak. Wat kunnen we zeggen over de zijden van de driehoek?

De zijden zijn niet recht maar gebogen.

Hoek en zijde van een boldriehoek



De hoek

De hoek $\hat{A}$ van een boldriehoek ABC is de hoek tussen de raaklijnen aan de (gebogen) zijden in A.

De zijde

De zijden van een boldriehoek zijn geen rechte lijnstukken, maar bogen van grootcirkels. Omdat de lengten van die bogen (op een vaste bol) evenredig zijn met de middelpuntshoeken, gaan we die bogen behandelen als hun middelpuntshoeken. Op die manier worden zijden eigenlijk hoeken, waarvan we de sinus of de cosinus kunnen nemen. Als we sin c of $\sin\widehat{AB}$ schrijven, bedoelen we eigenlijk $\sin A\hat{O}B$.

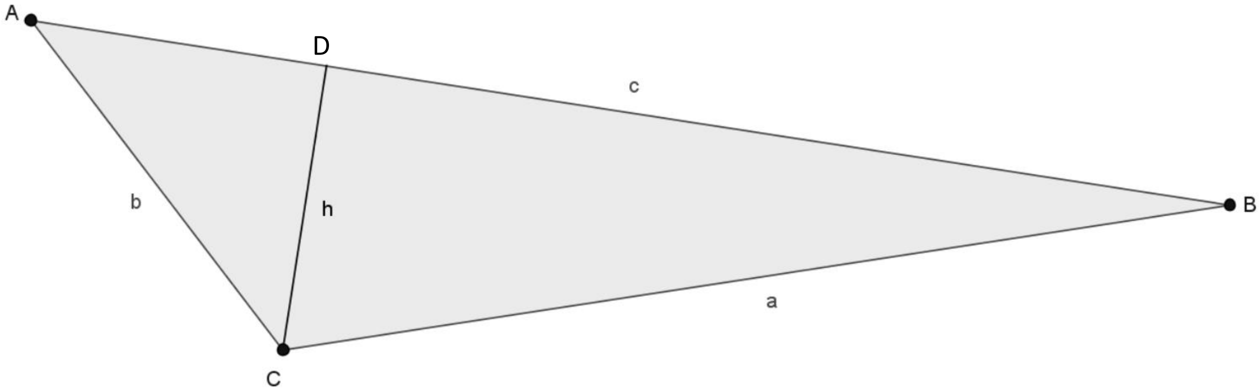
Toepassing

Onder een rechthoekige boldriehoek verstaan we een boldriehoek waarvan *minstens één* van de hoeken recht is. Waarom zeggen we '*minstens één*'? Kan een boldriehoek meer dan één rechte hoek hebben, zo ja hoeveel?

Ja, een rechthoekige boldriehoek kan zowel 1, 2 als 3 rechte hoeken hebben.

De sinusregel

De sinusregel voor een willekeurige vlakke driehoek



Gegeven: Een willekeurige driehoek ABC met zijden *a, b en c.*

Te bewijzen: $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}$

Bewijs

Noem $h = CD$ de hoogte uit C.

- $\sin\hat{A} = \frac{h}{b} \rightarrow h = b \sin\hat{A}$ (sinusregel in ΔACD)

- $\sin\hat{B} = \frac{h}{a} \rightarrow h = a \sin\hat{B}$ (sinusregel in ΔBCD)

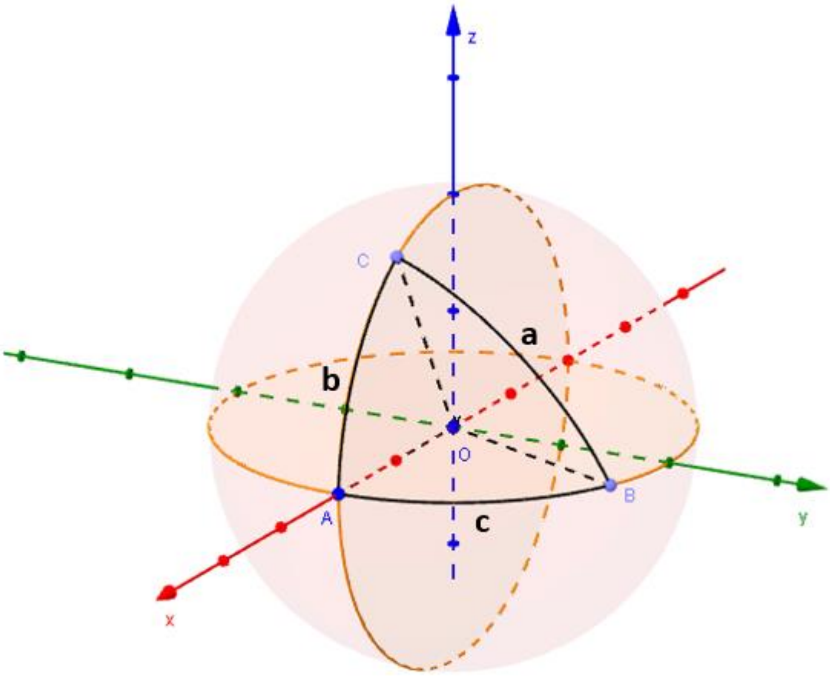
$\rightarrow b \sin\hat{A} = a \sin\hat{B} \rightarrow \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}$

Door hetzelfde te doen met een andere hoogtelijn verkrijg je ***de sinusregel voor een willekeurige vlakke driehoek:***

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

De sinusregel voor een rechthoekige boldriehoek

Voor de eenvoud tekenen we de rechthoekzijden van de rechthoekige boldriehoek als gelegen in het xy-vlak en het xz-vlak van een loodrecht assenstelsel. De redenering die we zullen maken, is algemener.



Gegeven: Een boldriehoek ABC met $\hat{A}$ = 90°.

DOEL: $\sin \hat{B}$ *uitdrukken in functie van de (kromme) zijden van de driehoek* ABC.

We zullen dit doel bereiken in drie stappen.

1. We tonen aan dat de hoek $\hat{B}$ van de boldriehoek ABC gelijk is aan de hoek tussen de vlakken vl(BOA) en vl(BOC)
2. We zoeken een geschikte vlakke rechthoekige driehoek met een hoek gelijk aan $\hat{B}$.
3. We bewijzen ten slotte: $\sin \hat{B} = \frac{\sin b}{\sin a}$

Bewijs

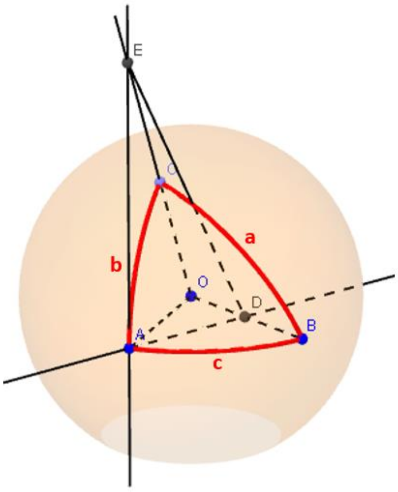
1. De hoek $\hat{B}$ van de boldriehoek ABC gelijk is aan de hoek tussen de vlakken vl(BOA) en vl(BOC):

– *Waarom is de hoek $\hat{B}$ van de boldriehoek ABC gelijk aan de hoek tussen de vlakken vl(BOA) en vl(BOC)? (TIP: de raaklijnen in B)*

De hoek $\hat{B}$ is de hoek tussen de raaklijnen in B. Deze raaklijnen staan loodrecht op de snijlijn OB van vl(BOA) en vl(BOC).

2. Op zoek naar een geschikte vlakke rechthoekige driehoek met een hoek gelijk aan $\hat{B}$.

– *In plaats van de raaklijnen zoeken we nu twee andere loodlijnen op OB die ook de hoek tussen de vlakken vl(BOA) en vl(BOC) bepalen.*



- Laat uit A een loodlijn neer op OB en noem het voetpunt D.

→ EERSTE LOODLIJN: ***AD***

- Snijd in het vl(AOC) de rechte OC met de raaklijn in A aan $\overset{\frown}{AC}$ (deze raaklijn is op onze tekening evenwijdig met de z-as) en noem het snijpunt E.

→ TWEEDE LOODLIJN: ***ED***

– *Bewijs nu dat **ED ⊥ OB**. (Tip: ED ligt in vl(AED). Het volstaat dus te bewijzen dat vl(AED) ⊥ OB.)*

vl(*AED*) bevat twee snijdende rechten die loodrecht staan op *OB*, namelijk *AD* en *AE.*

→ vl(AED) ⊥ OB

→ ED ⊥ OB

– *Welke vlakke rechthoekige driehoek hebben we nu gevonden met een hoek gelijk aan $\hat{B}$?*

Driehoek ADE.

3. $\sin \hat{B} = \frac{\sin b}{\sin a}$

$\sin\hat{B}$

$= \sin A\hat{D}E$

$= \frac{|AE|}{|DE|}$

$= \frac{\frac{|AE|}{|OE|}}{\frac{|DE|}{|OE|}}$

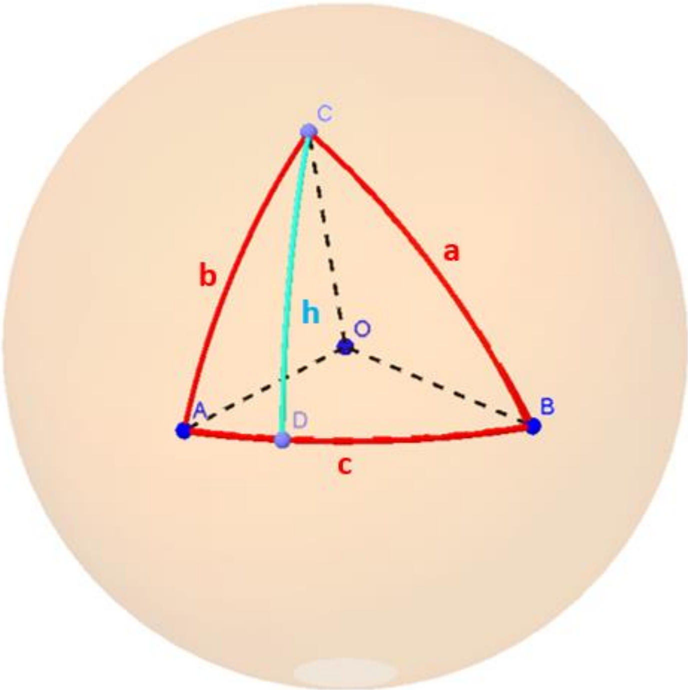
$= \frac{\sin A\hat{O}E}{\sin D\hat{O}E}$

$= \frac{\sin b}{\sin a}$ (Tip: werk eventueel van achter naar voor.)

SINUSREGEL VOOR EEN RECHTHOEKIGE BOLDRIEHOEK
In een rechthoekige boldriehoek is de sinus van een hoek gelijk aan de sinus van de overstaande 'zijde' gedeeld door de sinus van de schuine 'zijde'.

De sinusregel voor een willekeurige boldriehoek

Net zoals bij vlakke driehoeken, kun je nu uit de sinusregel voor rechthoekige boldriehoeken, een sinusregel voor willekeurige boldriehoeken afleiden.



Gegeven: willekeurige boldriehoek ABC

Bewijs: Teken door C de ‘hoogtelijn’ h (grote cirkelboog die loodrecht staat op c)

Dan geldt: *Sinusregel in $\Delta\, ACD$ en in $\Delta\, BCD$:*

$$\sin \hat{A} = \frac{\sin h}{\sin b} \quad \text{en} \quad \sin \hat{B} = \frac{\sin h}{\sin a}$$

$$\sin h = \sin \hat{A} \cdot \sin b \quad \text{en} \quad \sin h = \sin \hat{B} \cdot \sin a$$

$$\sin \hat{A} \cdot \sin b = \sin \hat{B} \cdot \sin a$$

$$\frac{\sin a}{\sin \hat{A}} = \frac{\sin b}{\sin \hat{B}}$$

Analoog vind je uiteindelijk:

$$\frac{\sin a}{\sin \hat{A}} = \frac{\sin b}{\sin \hat{B}} = \frac{\sin c}{\sin \hat{C}}$$

SINUSREGEL VOOR EEN WILLEKEURIGE BOLDRIEHOEK

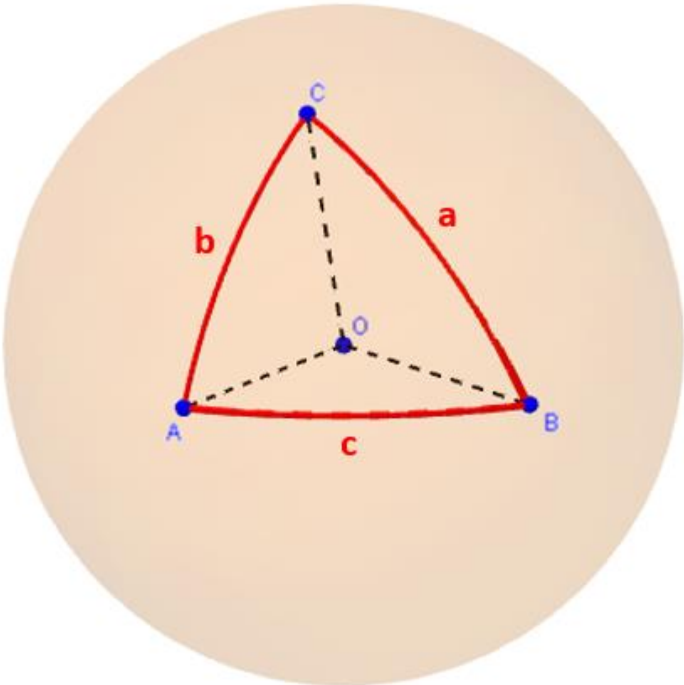
In een willekeurige boldriehoek zijn de sinussen van de 'zijden' evenredig met de sinussen van de overstaande hoeken.

De cosinusregel

Net als in het vlak, is er op een bol ook een cosinusregel. De cosinusregel kan op verschillende manieren bekomen worden (zie bv. Roelens, 2003). Hieronder wordt de cosinusregel gegeven. Deze zul je nodig hebben voor het berekenen van afstanden op de aardbol.

De cosinusregel in een willekeurige boldriehoek

$$\cos \boldsymbol{a} = \cos \boldsymbol{b} \cdot \cos \boldsymbol{c} + \sin \boldsymbol{b} \cdot \sin \boldsymbol{c} \cdot \cos \widehat{\boldsymbol{A}}$$



Toepassing: Afstandsbepaling op de aardbol

De coördinaten van Oezbekistan (Tasjkent) zijn 41° 20' NB en 69° 8' OL. De coördinaten van Iran (Teheran) zijn 35° 42' NB en 51° 25' OL. De afstand tussen Oezbekistan en Iran moet worden gemeten op een grootcirkel. Daarvoor passen we de cosinusregel toe in de boldriehoek *ONI* met als 3de hoekpunt de Noordpool. Hierbij staat O voor Oezbekistan, N voor Noordpool en I voor Iran.

Gegeven:

Oezbekistan: 41° 20' NB → b_1

69° 8' OL → l_1

Iran: 35° 42' NB → b_2

51° 25' OL → l_2

1. Bereken de nodige gegevens van de boldriehoek $O\hat{N}I$.

   $ON = 90° - 41° 20' = 48° 40'$
   $IN = 90° - 35° 42' = 54° 18'$
   $n = l_1 - l2 = 69° 8' - 51° 25' = 17° 43' = O\hat{N}I$

2. Bereken de lengte van de boldriehoekszijde *OI* in graden, minuten en seconden.

   $\text{Cos } OI = \cos IN \cdot \cos ON + \sin IN \cdot \sin ON \cdot \cos O\hat{N}I$
   $= \cos 54° 18' \cdot \cos 48° 40' + \sin 54° 18' \cdot \sin 48° 40' \cdot \cos 17° 43'$
   $= 0{,}9662505527$
   $OI = 14° 55' 40{,}602''$

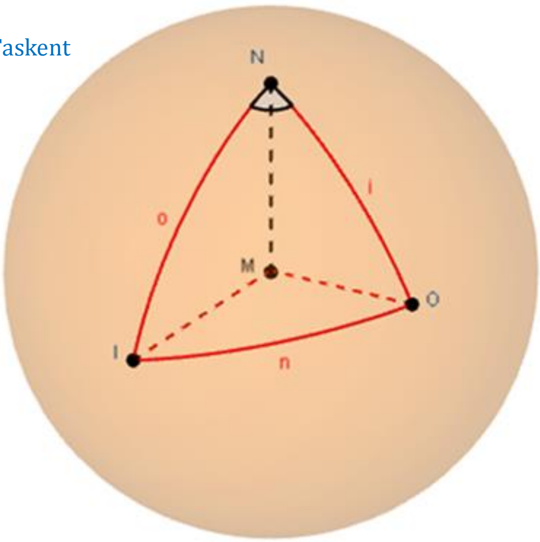
3. Bereken de lengte van de boldriehoekszijde *OI* in kilometer. We nemen aan dat de omtrek van de aarde 40 000 km is.

   omtrek aarde = 40 000 km

   $\text{lengte } OI = OI \cdot \frac{40\,000 \text{ km}}{360°}$
   $= 14° 55' 40{,}602'' \cdot \frac{40\,000 \text{ km}}{360°}$
   $= 1658{,}660556 \text{ km}$
   $= 1658{,}66 \text{ km}$

   Luchtleiding: 1664,13 km

http://nl.distance.to/Teheran/Taskent



Bibliografie

(sd). Opgehaald van Distance.to: http://nl.distance.to/Teheran/Taskent

Hogendijk, J. (2010). *Sources relating to Arabic-Islamic science*. Opgehaald van jphogendijk: http://www.jphogendijk.nl/arabsci.html

Hogendijk, J. (2015). *Abu Rayhan Muhammad ibn Ahmad al-Biruni*. Opgehaald van albiruni: http://www.albiruni.nl/

Rogers, L. (sd). *history of trigonometry*. Opgehaald van NRICH: http://nrich.maths.org/6908

Van den Broeck, L. (2006). Boldriehoeken tussen hemel en aarde. *Uitwiskeling 22/4*, 11-39.

Roelens, M. (2003). Boldriehoeksmeetkunde. *Uitwiskeling 20/1*, 42-51.