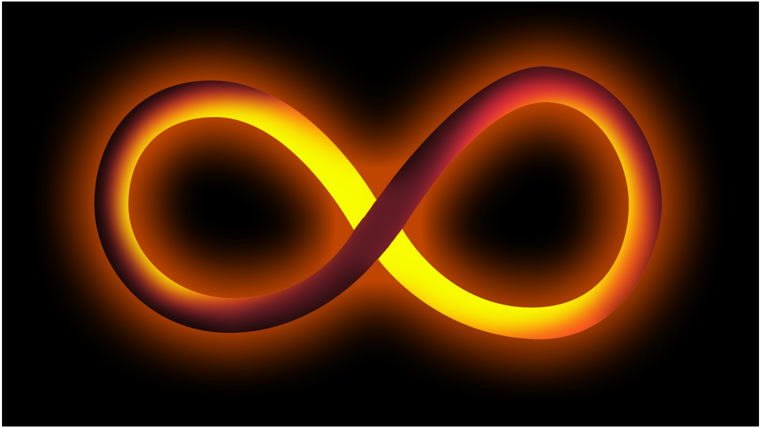
Rekenen en Redeneren met Oneindig

Jeroen Spandaw

Faculteit EWI, Technische Wiskunde

12 februari 2016

Wat is oneindig en wat kun je ermee?



Logica: Bewijzen over bewijzen

- Als je iets wiskundigs bewijst, dan is het waar.
- Maar als iets waar is, kun je het nog niet altijd bewijzen. . .
- . . . omdat je niet slim genoeg bent . . .
- . . . of **omdat het onmogelijk is om het te bewijzen!**
- Vandaag: Een voorbeeld van een ware bewering . . .
- . . . waarvan je kunt bewijzen dat je haar niet kunt bewijzen.
- Maar hoe weet je dan dat het waar is?

Rekenen en Redeneren met Oneindig

- Goodstein-rijtjes
- Bewijs met oneindig
- Logica en meta-mathematica
- en Hercules en de Hydra

Hercules en de Hydra

Goodstein-rijtjes

Rijtje g_2, g_3, g_4, ...

- Kies startgetal g_2. Bijvoorbeeld: $g_2 = 100$.
- Schrijf g_2 in basis 2: $100 = 2^6 + 2^5 + 2^2$
- Schrijf de exponenten ook in basis 2:
  $g_2 = 2^{2^2+2} + 2^{2^2+1} + 2^2$
- Vervang grondtal 2 door 3:
  $3^{3^3+3} + 3^{3^3+1} + 3^3 = 228.767.924.549.637$
- Trek 1 af en resultaat is $g_3 = 228.767.924.549.636$

Goodstein-rijtjes: naar g_4

- Schrijf g_3 in basis 3: $g_3 = 3^{30} + 3^{28} + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2$
- Schrijf exponenten ook in basis 3:
  $g_3 = 3^{3^3+3} + 3^{3^3+1} + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2$
- Vervang grondtal 3 door 4: $4^{4^4+4} + 4^{4^4+1} + 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 2$
- Trek 1 af en resultaat is
  $g_4 = 4^{4^4+4} + 4^{4^4+1} + 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 1$
- Hoeveel cijfers heeft g_4 ongeveer?

Goodstein-rijtjes: g_4

$$
\begin{aligned}
g_4 &= 4^{4^4+4} + 4^{4^4+1} + 2\cdot 4^2 + 2\cdot 4 + 1 \\
&= 3.486.030.061.785.075.245.889.246.499.533. \\
&\qquad 519.993.144.635.113.354.022.278.208.125. \\
&\qquad 975.367.658.647.819.122.213.968.487.317. \\
&\qquad 523.394.891.199.408.283.128.486.373.221. \\
&\qquad 976.009.531.106.108.186.072.748.741.581. \\
&\qquad 865.001 \\
&\approx 3 \times 10^{156}
\end{aligned}
$$

157 cijfers!

Hoe kunnen we ons een voorstelling van 10^{157} maken?

Aantal deeltjes $< 10^{100}$

Goodstein-rijtjes: van g_4 naar g_5

- Schrijf g_4 in basis 4: $g_4 = 4^{4^4+4} + 4^{4^4+1} + 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 1$
- Vervang grondtal 4 door 5: $5^{5^5+5} + 5^{5^5+1} + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 1$
- Trek 1 af en resultaat is $g_5 = 5^{5^5+5} + 5^{5^5+1} + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5$
- Hoeveel cijfers heeft g_5 ongeveer?
- $g_5 \approx 5^{3130} \approx 6 \times 10^{2187}$ heeft 2188 cijfers

Goodstein-rijtjes: naar g_6, g_7, ...

- Schrijf g_5 in basis 5: $g_5 = 5^{5^5+5} + 5^{5^5+1} + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5$
- Vervang grondtal 5 door 6: $6^{6^6+6} + 6^{6^6+1} + 2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6$
- Trek 1 af en resultaat is $g_6 = 6^{6^6+6} + 6^{6^6+1} + 2 \cdot 6^2 + 6 + 5$
- Hoeveel cijfers heeft g_6 ongeveer?
- $g_6 \approx 6^{46.662} \approx 1 \times 10^{36.310}$ heeft 36.311 cijfers
- Vervolgens 6 vervangen door 7 en 1 aftrekken:
- $g_7 \approx 7^{7^7+7}$ heeft 695.981 cijfers
- Enzovoorts!

Aantal cijfers van g_n

n	# cijfers g_n
2	3
3	15
4	157
5	2.188
6	36.311
7	695.981
8	15.151.344
$\vdots$	$\vdots$

Wat gebeurt er met g_n als $n \to \infty$?

Hercules en de Hydra

Stelling van Goodstein

Stelling (Goodstein)

Voor ieder startgetal g_2 geldt $g_n = 0$ voor voldoende grote n!

Bewijs?

Stelling (Kirby-Paris)

Hercules wint van iedere draak, ongeacht zijn strategie. (Maar het duurt bij de meeste draken wel heel lang. . . .)


To infinity
and beyond...

Bewijs Stelling van Goodstein

Doortellen voorbij oneindig:

- $1, 2, 3, \ldots$
- $\omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots$
- $2\omega, 2\omega + 1, 2\omega + 2, \ldots$
- $\ldots$
- $\omega^2, \omega^2 + 1, \ldots$
- $\omega^2 + \omega, \omega^2 + \omega + 1, \ldots$
- $\ldots$
- $2\omega^2, 2\omega^2 + 1, \ldots$
- $\ldots$
- $\omega^3, \omega^3 + 1, \ldots, \omega^3 + \omega, \ldots$
- $\ldots$
- ω^ω
- $\ldots$, ω^{ω^ω}, $\ldots$

Bewijs Stelling van Goodstein

Bewijsidee: vervang grondtal door ω

n	g_n	G_n
2	$2^{2^2+2} + 2^{2^2+1} + 2^2$	$\omega^{\omega^\omega+\omega} + \omega^{\omega^\omega+1} + \omega^\omega$
3	$3^{3^3+3} + 3^{3^3+1} + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2$	$\omega^{\omega^\omega+\omega} + \omega^{\omega^\omega+1} + 2\omega^2 + 2\omega + 2$
4	$4^{4^4+4} + 4^{4^4+1} + 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 1$	$\omega^{\omega^\omega+\omega} + \omega^{\omega^\omega+1} + 2\omega^2 + 2\omega + 1$
5	$5^{5^5+5} + 5^{5^5+1} + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5$	$\omega^{\omega^\omega+\omega} + \omega^{\omega^\omega+1} + 2\omega^2 + 2\omega$
6	$6^{6^6+6} + 6^{6^6+1} + 2 \cdot 6^2 + 6 + 5$	$\omega^{\omega^\omega+\omega} + \omega^{\omega^\omega+1} + 2\omega^2 + \omega + 5$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
11	$11^{11^1 1+11} + 11^{11^{11}+1} + 2 \cdot 11^2 + 11$	$\omega^{\omega^\omega+\omega} + \omega^{\omega^\omega+1} + 2\omega^2 + \omega$
12	$12^{12^{12}+12} + 12^{12^{12}+1} + 2 \cdot 12^2 + 11$	$\omega^{\omega^\omega+\omega} + \omega^{\omega^\omega+1} + 2\omega^2 + 11$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
23	$23^{23^{23}+23} + 23^{23^{23}+1} + 2 \cdot 23^2$	$\omega^{\omega^\omega+\omega} + \omega^{\omega^\omega+1} + 2\omega^2$
24	$24^{24^{24}+24} + \cdots + 24^2 + 23 \cdot 24 + 23$	$\omega^{\omega^\omega+\omega} + \omega^{\omega^\omega+1} + \omega^2 + 23\omega + 23$

Bewijs Stelling van Goodstein

We zien:

- $g_n \leq G_n$
- $G_2 > G_3 > G_4 > \cdots$
- Dus $G_n = 0$ voor heel grote n.
- Dus $g_n = 0$ voor heel grote n.

Bewijs Stelling van Goodstein

We zien:

- $g_n \leq G_n$
- $G_2 > G_3 > G_4 > \cdots$
- Dus $G_n = 0$ voor heel grote n.
- Dus $g_n = 0$ voor heel grote n.

Hoe groot ongeveer is de kleinste n met $g_n = 0$?

Bij startgetal $g_2 = 4$ is dat $n \approx 7 \times 10^{121.210.694}$

Logica

Wiskunde: Stellingen over wiskundige objecten, zoals getallen

Logica: Stellingen *over* wiskundige stellingen
en stellingen *over* wiskundige bewijzen

Stelling (Gödel)

Er bestaan onbewijsbare waarheden:
d.w.z. wiskundige beweringen die waar zijn,
maar waarvoor desondanks geen bewijs bestaat!

Voorbeeld van zo'n Onbewijsbare Waarheid

De Stelling van Goodstein is een wiskundige waarheid waarvan is bewezen dat je haar niet kunt bewijzen. Preciezer:

Stelling (Kirby en Paris)

De stelling van Goodstein kan niet worden bewezen, tenminste niet zonder gebruik te maken van ω.

Samenvatting

- Je kunt tellen voorbij oneindig.
- Met oneindig kun je rekenen.
- Oneindig kun je gebruiken om stellingen te bewijzen.
- Er zijn stellingen die zonder oneindig niet te bewijzen zijn.
- Die onbewijsbaarheid is bewezen!

Voor de kenners

- Je kunt eigenlijk niet zeggen 'Goldstein is waar', want 'waarheid' hangt af van keuze van model bij axiomasysteem.
- Omdat Goldsteins bewering onbeslisbaar is in Peano, bestaan er ook modellen van Peano-getaltheorie waarin deze bewering niet waar is.
- Je kunt binnen Peano bewijzen dat Goldsteins rijtje afbreekt voor startgetal $g_2 = 2, 3, 4, \ldots$. Maar Goldsteins bewering '$\forall m$: Goldsteinrijtje bij startgetal $g_2 = m$ breekt af' is niet bewijsbaar binnen Peano.