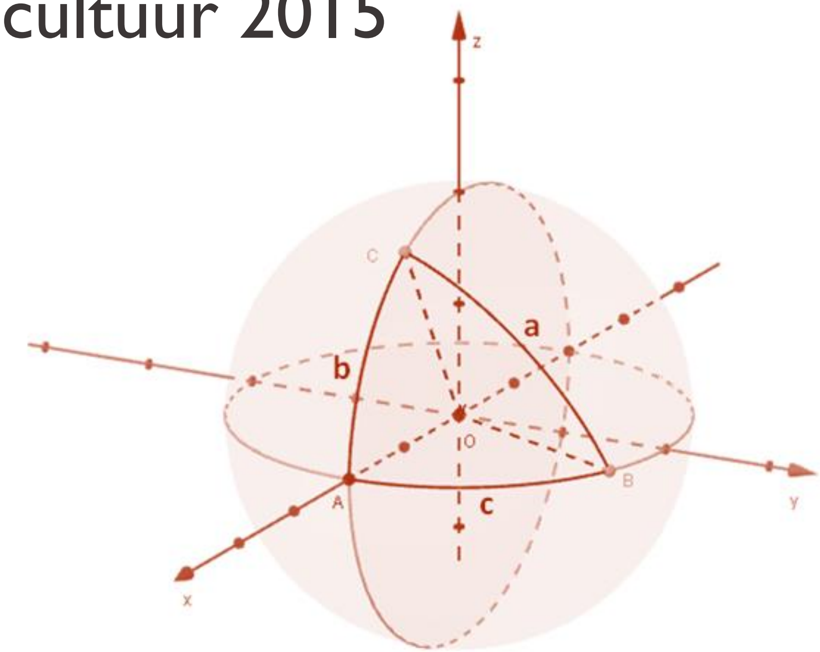
BOLDRIEHOEKSMETING

Project wiskunde en cultuur 2015

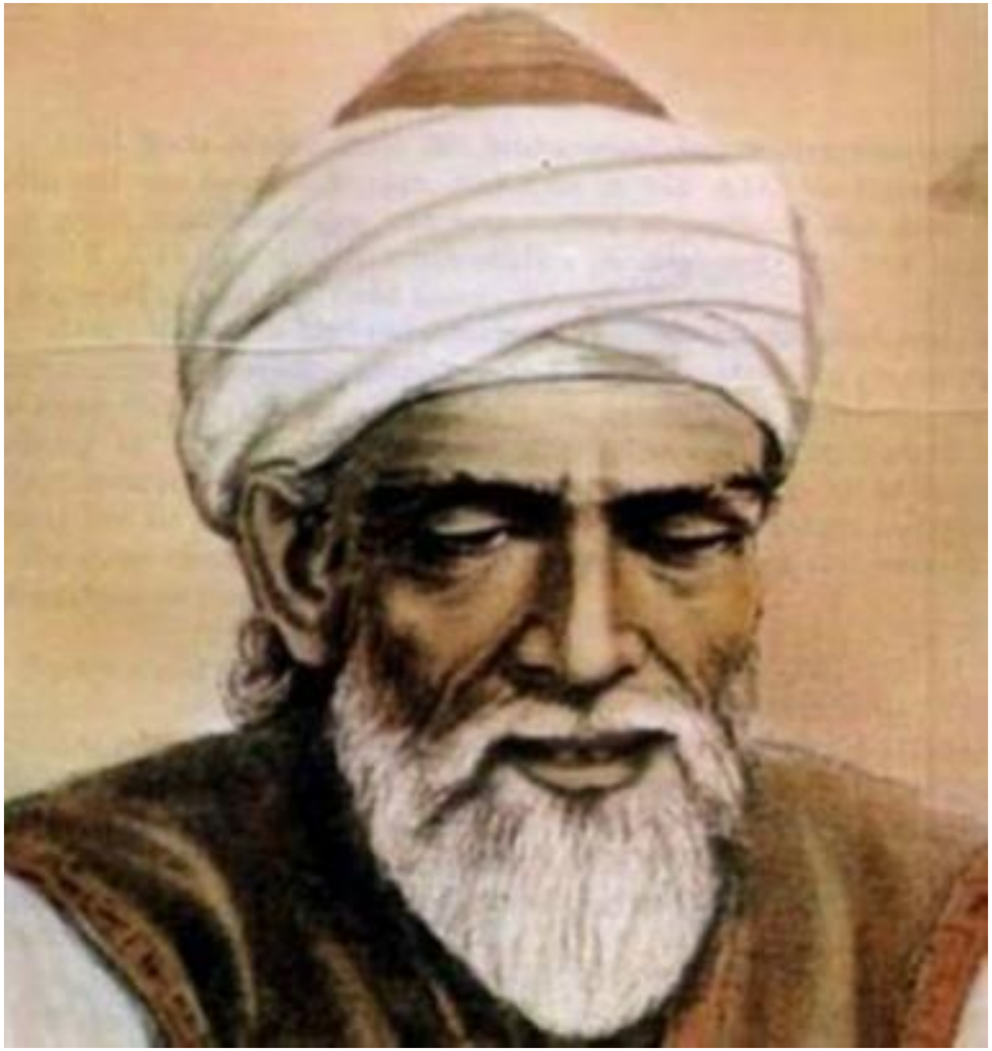
NWD 2016



Anne Nagels
Stien Loyens
Jolien Vranken
Stef Andriessen

Docenten: Michel Roelens & Christine Swinnen

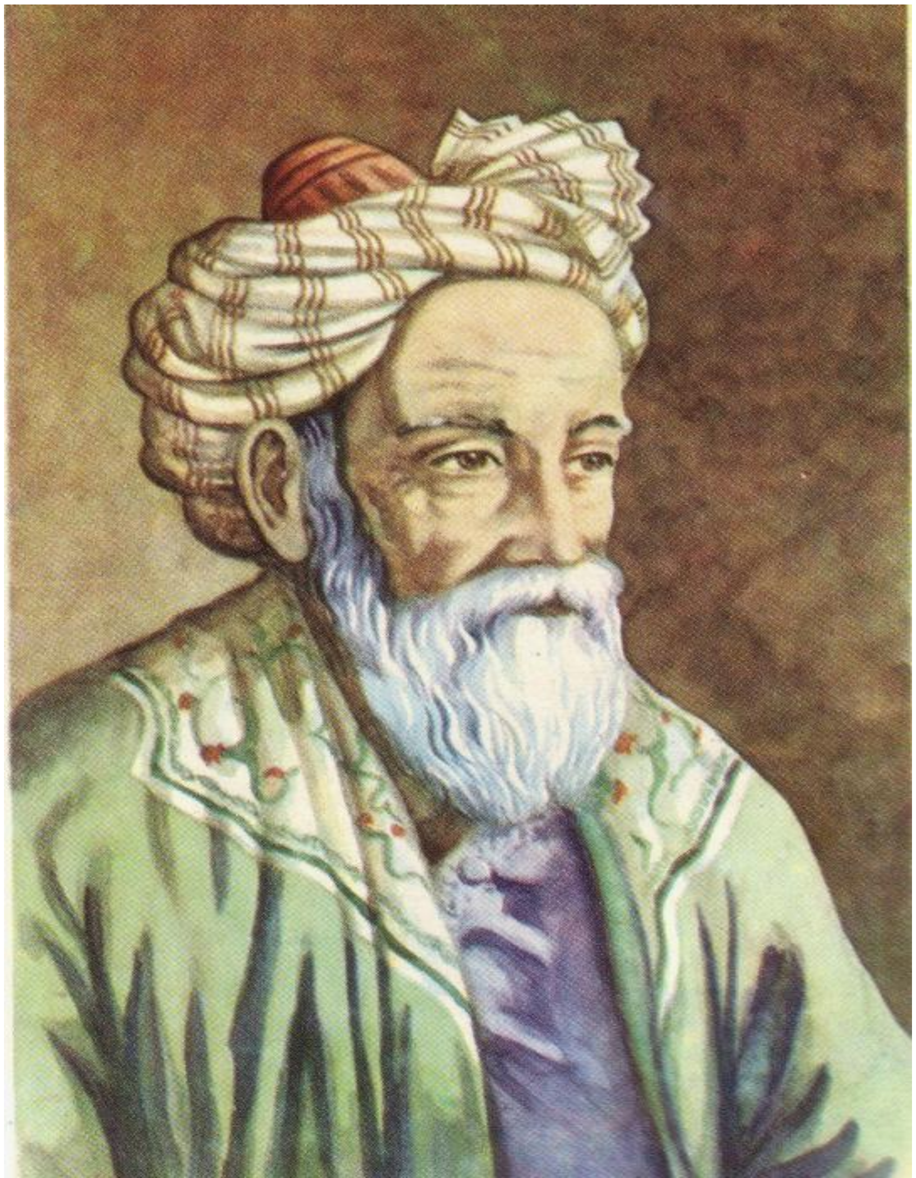
CULTUUR – **ABUL WAFA**



°940 Buzhghan (huidige Iran)

†998 Bagdad

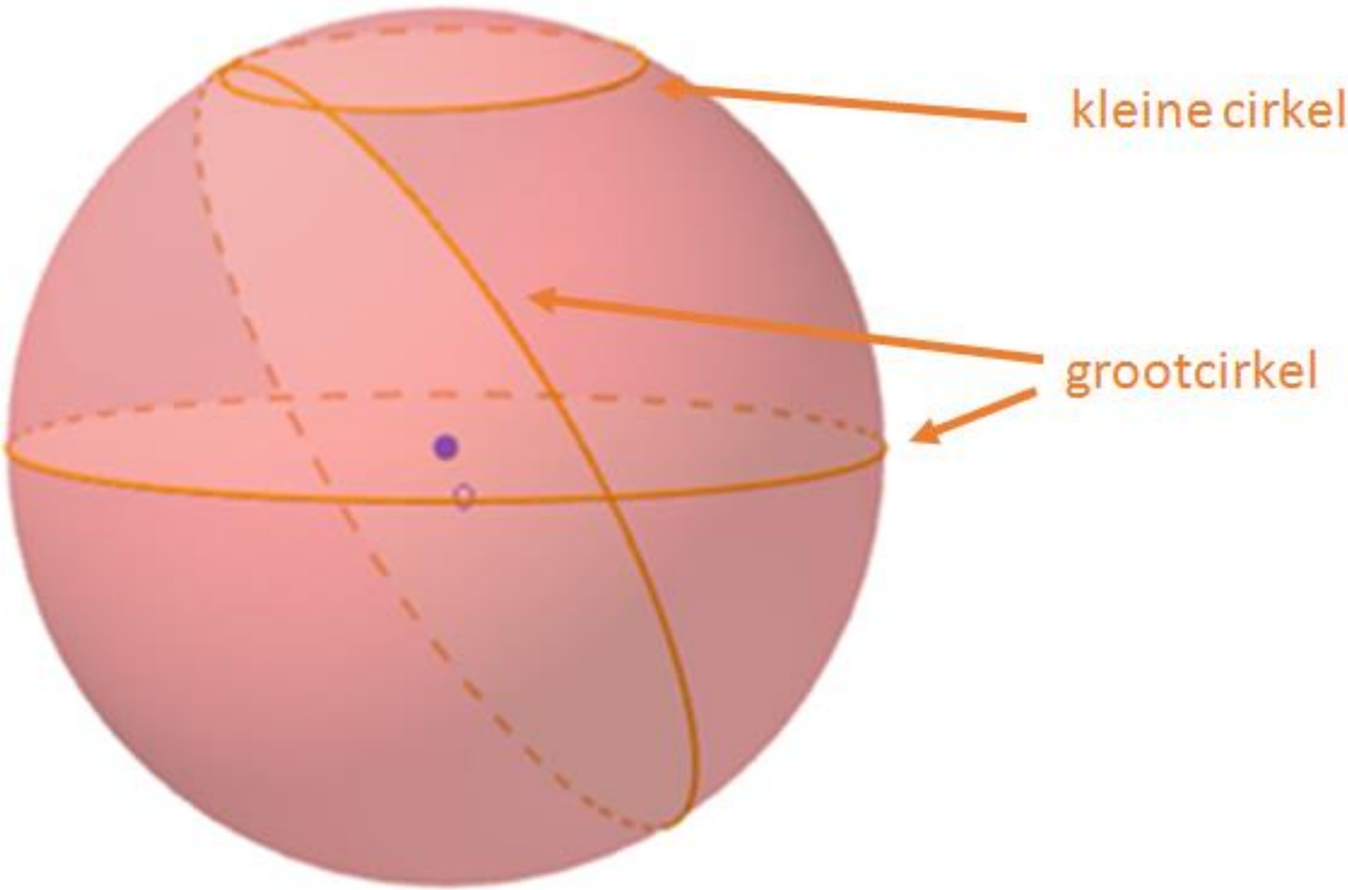
CULTUUR – **AL-BIRUNI**



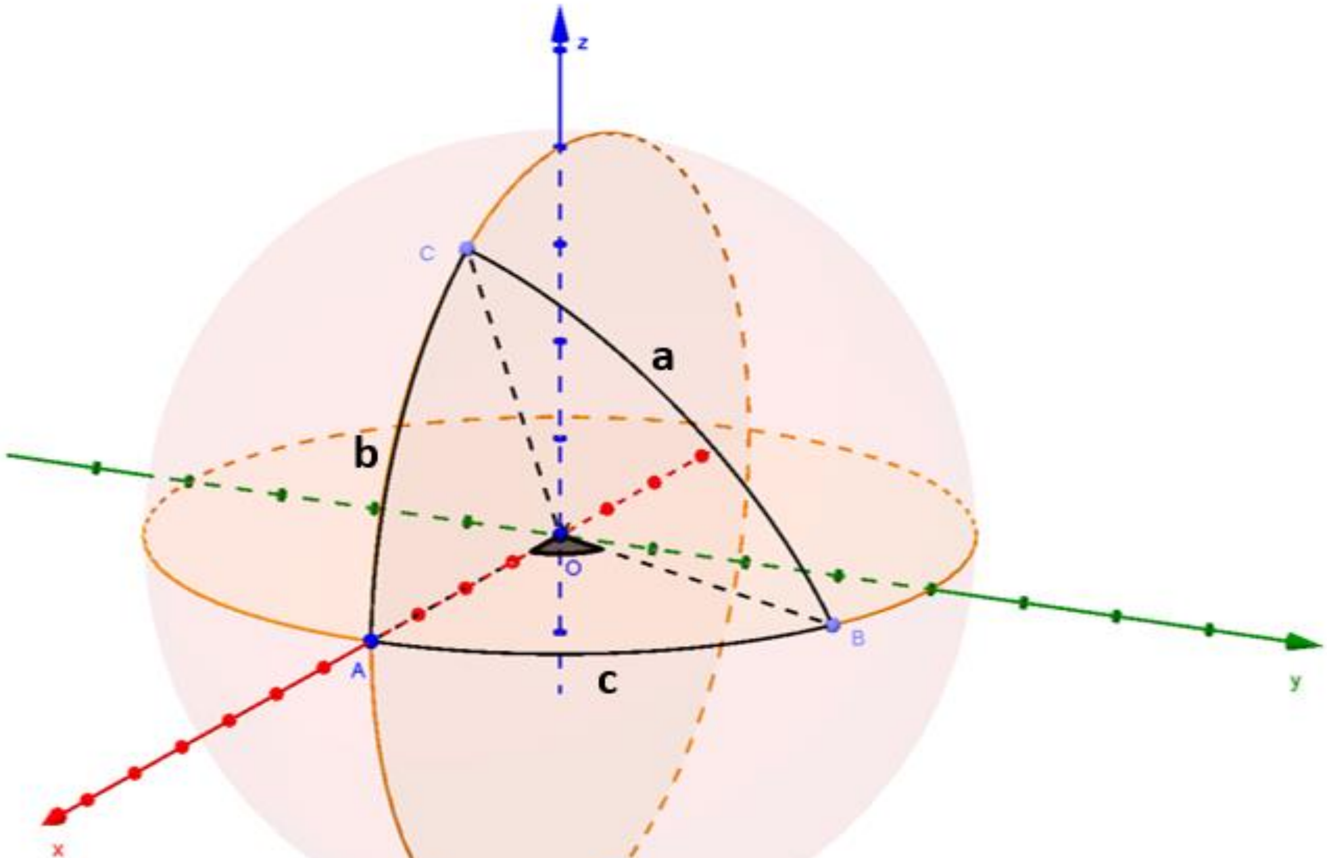
°973 Khwarazm (huidige Oezbekistan)

†1048

GROOTCIRKEL



BOLDRIEHOEK



BEWIJS SINUSREGEL - werking

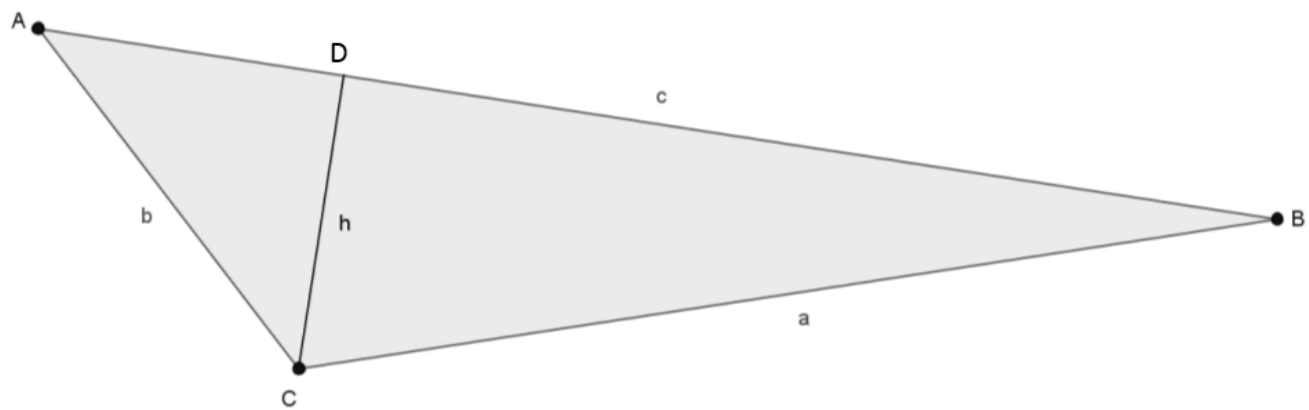
Rechthoekige driehoek VLAK	**Willekeurige driehoek VLAK**
Rechthoekige driehoek BOL	**Willekeurige driehoek BOL**

SINUSREGEL
WILLEKEURIGE VLAKKE DRIEHOEK

Gegeven: Een willekeurige driehoek *ABC* met zijden *a, b en c* en de hoogtelijn *h* uit *C*.

Te bewijzen: $\frac{\mathrm{a}}{\sin \hat{\mathrm{A}}} = \frac{\mathrm{b}}{\sin \hat{\mathrm{B}}}$

Bewijs:

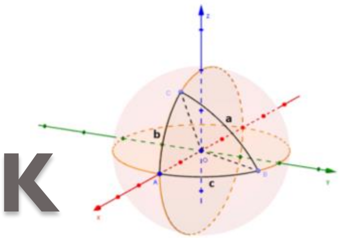


- $\sin\hat{A} = \frac{h}{b} \rightarrow \mathrm{h} = \mathrm{b} \sin\hat{A}$ (sinusregel in ΔACD)

- $\sin\hat{B} = \frac{h}{a} \rightarrow \mathrm{h} = \mathrm{a} \sin\hat{B}$ (sinusregel in ΔBCD)

$\rightarrow \mathrm{b} \sin\hat{A} = \mathrm{a} \sin\hat{B} \rightarrow \frac{a}{sin\ \hat{A}} = \frac{b}{sin\ \hat{B}}$

SINUSREGEL
RECHTHOEKIGE BOLDRIEHOEK



Gegeven: Een boldriehoek ABC met $\hat{A} = 90°$.

DOEL: $\sin \hat{B}$ *uitdrukken in functie van de (kromme) zijden van de driehoek* ABC.

We zullen dit doel bereiken in drie stappen.

1. We tonen aan dat de hoek $\hat{B}$ van de boldriehoek ABC gelijk is aan de hoek tussen de vlakken vl(BOA) en vl(BOC)
2. We zoeken een geschikte vlakke rechthoekige driehoek met een hoek gelijk aan $\hat{B}$.
3. We bewijzen ten slotte: $\sin \hat{B} = \dfrac{\sin b}{\sin a}$

Bewijs

1. De hoek $\hat{B}$ van de boldriehoek ABC gelijk is aan de hoek tussen de vlakken vl(BOA) en vl(BOC):

– *Waarom is de hoek $\hat{B}$ van de boldriehoek ABC gelijk aan de hoek tussen de vlakken vl(BOA) en vl(BOC)? (TIP: de raaklijnen in B)*

De hoek $\hat{B}$ is de hoek tussen de raaklijnen in B. Deze raaklijnen staan loodrecht op de snijlijn OB van vl(BOA) en vl(BOC).

2. Op zoek naar een geschikte vlakke rechthoekige driehoek met een hoek gelijk aan $\hat{B}$.

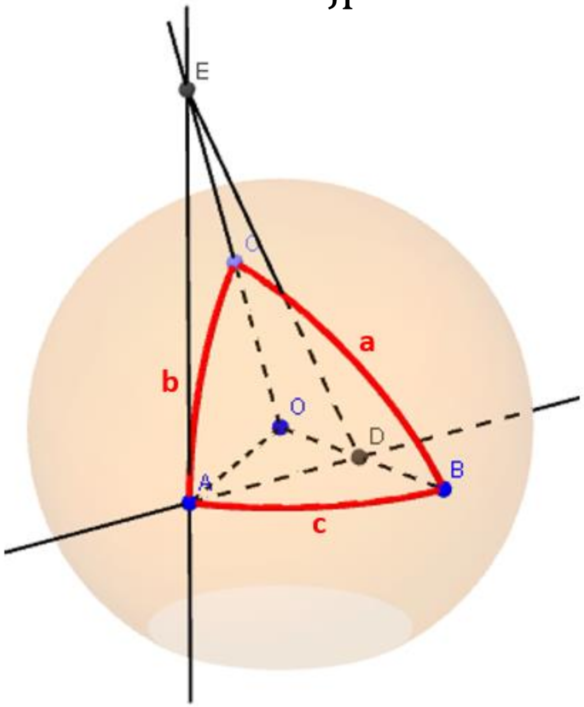
– *In plaats van de raaklijnen zoeken we nu twee andere loodlijnen op OB die ook de hoek tussen de vlakken vl(BOA) en vl(BOC) bepalen.*

- Laat uit A een loodlijn neer op OB en noem het voetpunt D.

→ EERSTE LOODLIJN: ***AD***

- Snijd in het vl(AOC) de rechte OC met de raaklijn in A aan $\widehat{AC}$ (deze raaklijn is op onze tekening evenwijdig met de z-as) en noem het snijpunt E.

→ TWEEDE LOODLIJN: ***ED***



– *Bewijs nu dat* ***ED* ⊥ *OB***. *(Tip: ED ligt in vl(AED). Het volstaat dus te bewijzen dat vl(AED) ⊥ OB.)*

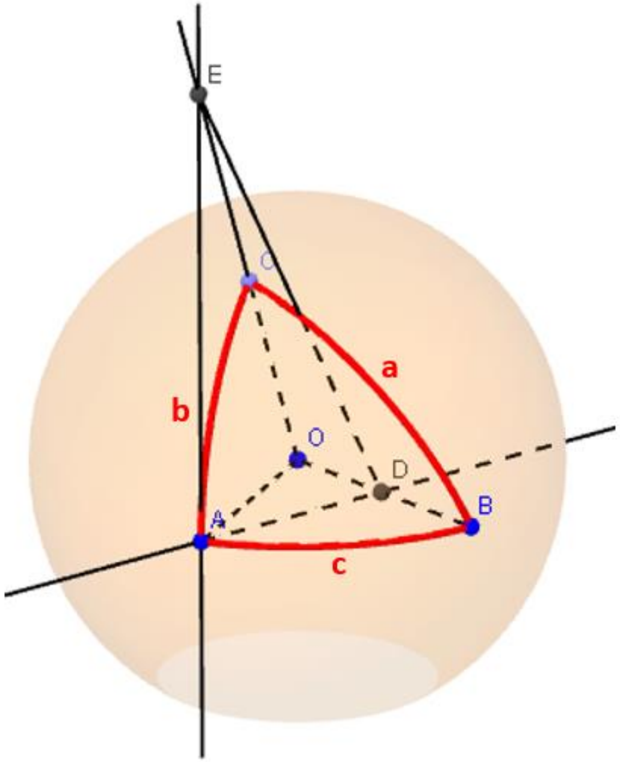
vl(*AED*) bevat twee snijdende rechten die loodrecht staan op *OB*, namelijk *AD* en *AE.*

→ vl(AED) ⊥ OB

→ ED ⊥ OB

– *Welke vlakke rechthoekige driehoek hebben we nu gevonden met een hoek gelijk aan* $\hat{B}$*?*

Driehoek ADE.



3. $\sin \hat{B} = \frac{\sin b}{\sin a}$

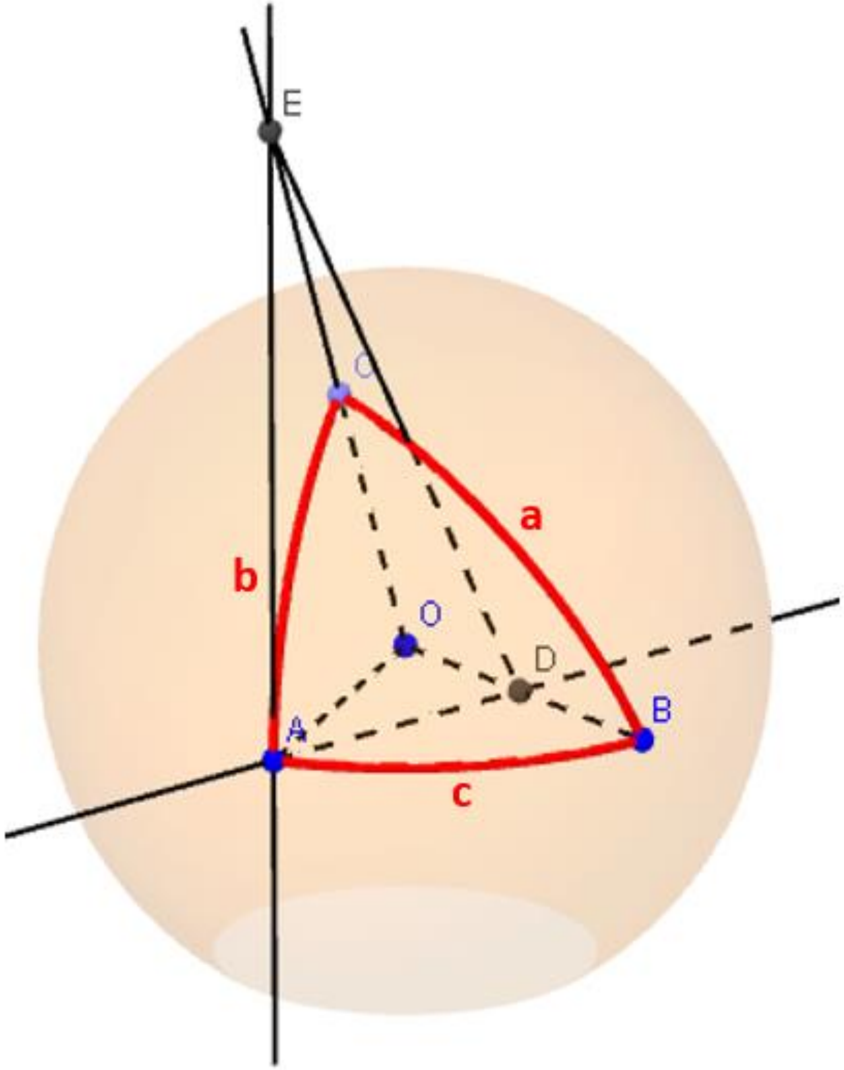
$\sin\hat{B}$

$= \sin A\hat{D}E$

$= \frac{|AE|}{|DE|}$

$= \frac{\frac{|AE|}{|OE|}}{\frac{|DE|}{|OE|}}$

$= \frac{\sin A\hat{O}E}{\sin D\hat{O}E}$



$= \frac{\sin b}{\sin a}$ (Tip: werk eventueel van achter naar voor.)

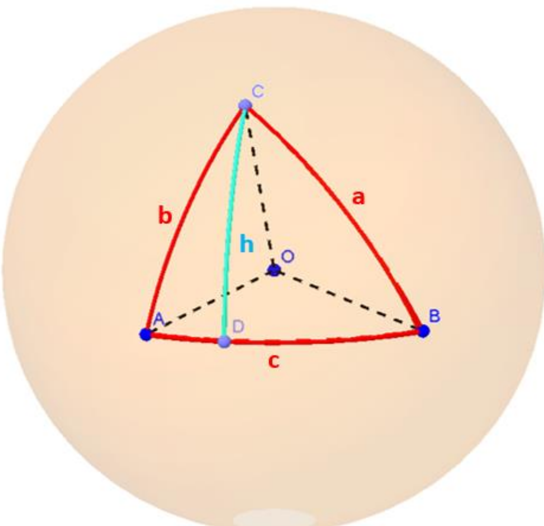
VERWOORDING:

In een rechthoekige boldriehoek is de sinus van een hoek gelijk aan de sinus van de overstaande 'zijde' gedeeld door de sinus van de schuine 'zijde'.

SINUSREGEL
WILLEKEURIGE BOLDRIEHOEK

Gegeven: willekeurige boldriehoek ABC

Bewijs: Teken door C de ‘hoogtelijn’ h (grote cirkelboog die loodrecht staat op c)



Dan geldt: *Sinusregel in Δ ACD en in Δ BCD:*

$$\sin \hat{A} = \frac{\sin h}{\sin b} \text{ en } \sin \hat{B} = \frac{\sin h}{\sin a}$$

$$\downarrow$$

$$\sin h = \sin \hat{A} \cdot \sin b \quad \text{en} \quad \sin h = \sin \hat{B} \cdot \sin a$$

$$\downarrow$$

$$\sin \hat{A} \cdot \sin b = \sin \hat{B} \cdot \sin a$$

$$\frac{\sin a}{\sin \hat{A}} = \frac{\sin b}{\sin \hat{B}}$$

Analoog vind je uiteindelijk:

$$\frac{\sin a}{\sin \hat{A}} = \frac{\sin b}{\sin \hat{B}} = \frac{\sin c}{\sin \hat{C}}$$

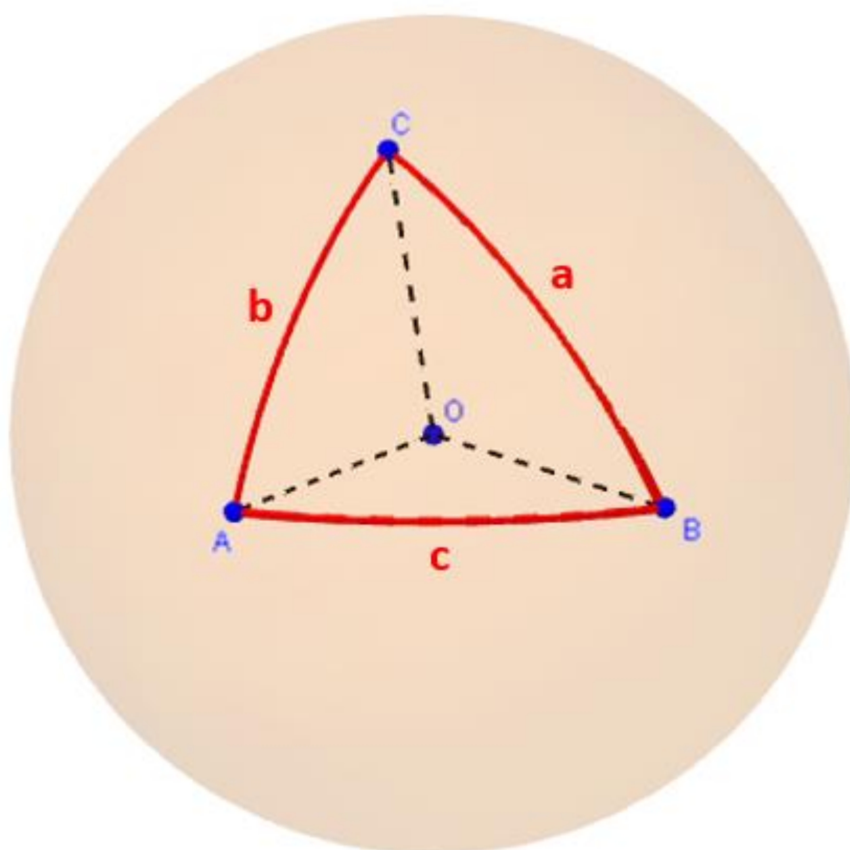
VERWOORDING:

In een willekeurige boldriehoek zijn de sinussen van de 'zijden' evenredig met de sinussen van de overstaande hoeken.

COSINUSREGEL

De cosinusregel in een willekeurige boldriehoek

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \hat{A}$$



TOEPASSING: AFSTANDSBEPALING OP DE AARDBOL

De coördinaten van Oezbekistan (Tasjkent) zijn 41° 20’ NB en 69° 8’ OL. De coördinaten van Iran (Teheran) zijn 35° 42’ NB en 51° 25’ OL. De afstand tussen Oezbekistan en Iran moet worden gemeten op een grootcirkel. Daarvoor passen we de cosinusregel toe in de boldriehoek ONI met als 3de hoekpunt de Noordpool. Hierbij staat O voor Oezbekistan, N voor Noordpool en I voor Iran.

Gegeven:

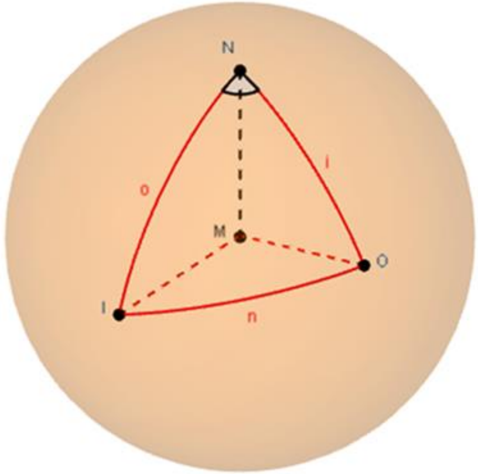
Oezbekistan:	**41° 20’ NB → *b1***	**Iran:**	**35° 42’ NB → *b2***
	69° 8’ OL → *l1*		**51° 25’ OL → *l2***

1. Bereken de nodige gegevens van de boldriehoek $O\hat{N}I$.

   $ON = 90° - 41° 20' = 48° 40'$

   $IN = 90° - 35° 42' = 54° 18'$

   $n = l1 - l2 = 69° 8' - 51° 25' = 17° 43' = O\hat{N}I$



2. Bereken de lengte van de boldriehoekszijde *OI* in graden, minuten en seconden.

$$\text{Cos } OI = \cos IN \cdot \cos ON + \sin IN \cdot \sin ON \cdot \cos O\hat{N}I$$
$$= \cos 54°\,18' \cdot \cos 48°\,40' + \sin 54°\,18' \cdot \sin 48°\,40' \cdot \cos 17°\,43'$$
$$= 0{,}9662505527$$
$$OI = 14°\,55'\,40{,}602''$$

3. Bereken de lengte van de boldriehoekszijde *OI* in kilometer. We nemen aan dat de omtrek van de aarde 40 000 km is.

omtrek aarde = 40 000 km

$$\text{lengte } OI = OI \cdot \frac{40\,000\text{km}}{360°}$$
$$= 14°\,55'\,40{,}602'' \cdot \frac{40\,000\text{km}}{360°}$$
$$= 1658{,}\,660556 \text{ km}$$
$$= 1658{,}\,66 \text{ km}$$

Luchtleiding: 1664,13 km