Henri Poincaré, ongeduldig genie

Ferdinand Verhulst
Mathematisch Instituut
Universiteit van Utrecht

NWD 2013

1 Levensloop Henri Poincaré

- Geboren in 1854, Nancy (Lotharingen).
- Schooljaren 1860-1873.
- École Polytechnique 1873-1875.
- École des Mines 1875-1879.
- Proefschrift over partïele differentiaalvergelijkingen, Parijs 1879.
- Mijningenieur in Vesoul/Ronchamps 1879.
- Docent wiskundige analyse in Caen 1879-1881.
- Benoeming aan de universiteit van Parijs (Sorbonne) 1881-1912.
- Overleden op 17 juli, 1912, 58 years oud.

2 Overzicht van zijn werk

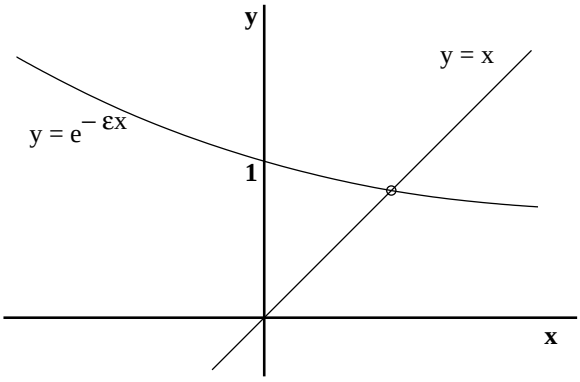
- Automorfe functies, uniformisatie (complexe functietheorie)
- De kwalitatieve theorie van differentiaal vergelijkingen
- Bifurcatie theorie
- Asymptotische benaderingen, normaalvormen
- Dynamische systemen, integreerbaarheid
- Mathematische fysica
- Topologie (analysis situs)
- Filosofische essays

3 Inleiding impliciete functie stelling

Beschouw eens de functie

$$f(x, \varepsilon) = x - e^{-\varepsilon x},$$

welke afhangt van de variabele x en van een kleine parameter $\varepsilon \geq 0$. We zoeken naar een nulpunt van $f(x, \varepsilon)$. Zo'n nulpunt bestaat, dat kunnen we inzien door x-waarden in te vullen en dan te ontdekken dat $f(x, \varepsilon)$ zowel positieve als negatieve waarden aanneemt. Of we maken een plaatje voor x en $e^{-\varepsilon x}$; de twee grafieken snijden elkaar (zie de figuur).



Voor $\varepsilon = 0$ geldt $f(x, 0) = x - 1$ en dit brengt ons op het idee dat voor kleine positieve waarden van ε het nulpunt in de buurt van 1 zal liggen. We substitueren daarom de machtreeks ontwikkeling

$$x = 1 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots$$

waarbij $x_1, x_2, \ldots$ nader te bepalen getallen zijn. We gebruiken de Taylorreeks

$$e^{-\varepsilon x} = 1 - \varepsilon x + \frac{1}{2}\varepsilon^2 x^2 + \ldots$$

en vinden na substitutie

$$f(x,\varepsilon) = 1 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots - (1 - \varepsilon x + \frac{1}{2}\varepsilon^2 x^2 + \ldots)$$

Uitwerken en de coëfficïenten van machten van ε samen nemen levert voor het nulpunt:

$$f(x,\varepsilon) = \varepsilon(x_1 + 1) + \varepsilon^2(x_2 + x_1 - \frac{1}{2}) + \ldots$$

Omdat het rechterlid nul moet zijn, zal voor elke macht van ε de coëfficïent nul moeten zijn. Dus $x_1 + 1 = 0$, $x_2 + x_1 - \frac{1}{2} = 0$, enzovoorts. We vinden voor het nulpunt

$$x = 1 - \varepsilon + \frac{3}{2}\varepsilon^2 + \ldots$$

Dat dit antwoord correct is volgt uit **de impliciete functie stelling**. Deze luidt als volgt: Beschouw de (een aantal keren differentieerbare) functie $F(x,\varepsilon)$, gedefinieerd voor $x \in \mathbb{R}$ met ε een kleine parameter, $\varepsilon \geq 0$. Stel we vinden een nulpunt x_0 uit de vergelijking

$$F(x,0) = 0.$$

Dan geldt voor kleine, positieve waarden van ε voor het nulpunt van $F(x,\varepsilon)$ de volgende benaderende machtreeksontwikkeling

$$x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots$$

mits geldt

$$\frac{\partial F}{\partial x}|_{x=x_0,\varepsilon=0} \neq 0.$$

(Het aantal termen van de machtreeksontwikkeling hangt af van de differentieerbaarheid van F.)

In het boven genoemde voorbeeld geldt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \varepsilon e^{-\varepsilon x},$$

zodat voor $x = 1$, $\varepsilon = 0$ aan de voorwaarde voldaan is. Een fraai overzicht van de impliciete functie stelling met historische aspecten is te vinden in [1].

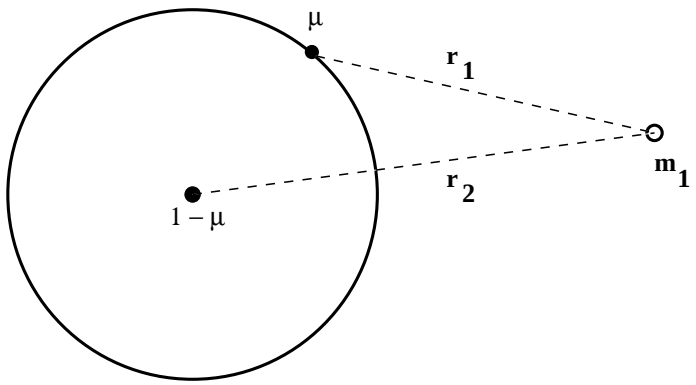
4 Toepassingen

In de 18e eeuw, toen de wiskundige analyse begon te bloeien, ontdekte men als snel dat allerlei vergelijkingen niet eenvoudig waren op te lossen, maar dat je in een groot aantal gevallen wel benaderingen van de oplossingen kon maken. Dat was met name vaak mogelijk als de betreffende vergelijking een 'storing' was van een vergelijking die wel op te lossen was. Bekijk bijvoorbeeld de gruwelijke vergelijking

$$x^2 - 3x + 2 + \varepsilon(x^7 + \sin x) = 0.$$

Deze vergelijkig heeft wellicht een heleboel wortels, maar in elk geval twee, $x = 1$ en $x = 2$, als $\varepsilon = 0$. Kunnen we in een omgeving van deze twee wortels de vergelijking oplossen voor $\epsilon > 0$, maar klein? Voor de afgeleide naar x vinden we $2x - 3 + \varepsilon(7x^6 + \cos x)$. Als we de waarden van de wortels bij $\varepsilon = 0$ invullen vinden we de getallen -1 en 1 (ga na). De impliciete functie stelling is dus van toepassing en we kunnen nu twee wortels met willekeurig grote precisie benaderen.

Interessanter is het benaderen van oplossingen van de grote problemen van de mathematische fysica. In de 18e eeuw kende men de oplossingen van het gravitationele twee-lichamen probleem. Bijvoorbeeld de beweging van een planeet zoals de Aarde om de Zon. Was het dan niet natuurlijk om hetzelfde soort storingstechnieken toe te passen op de differentiaalvergelijkingen van het zonnestelsel? Bijvoorbeeld de beweging van het stelsel Zon-Aarde-Maan of van het stelsel Zon-Jupiter-Saturnus. Dit idee leidde tot veel lange berekeningen, waarbij de Franse astronoom-wiskundigen Clairaut, Lagrange en Laplace zich in het bijzonder onderscheidden.



Het circulaire, beperkte drie-lichamen probleem met massa's $1 - \mu$, μ en m_1, waarbij $0 < \mu < 1$ en $0 < m_1 \ll 1$. Als $m_1 = 0$ dan bewegen de twee andere massa's om elkaar in cirkelbanen. De aanduiding 'beperkte' geeft aan dat de drie lichamen zich in één vlak bewegen. Dit probleem was een van de basisvoorbeelden van Poincaré; er is nu veel over bekend, maar curieus genoeg, het is in zijn algemeenheid nog steeds niet opgelost.

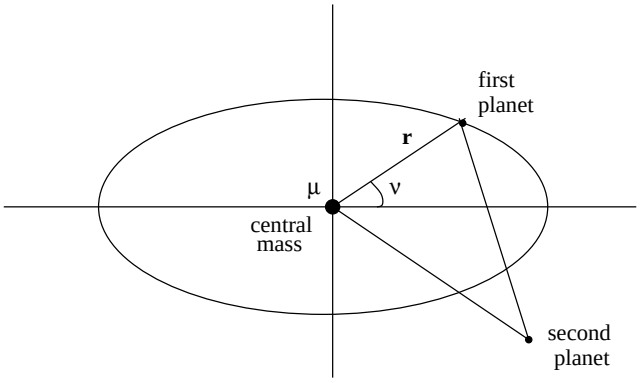
In de 19e eeuw werd men zich echter bewust van de noodzaak van convergentie van reeksen. Bij de toepassingen in de 18e en het begin van de 19e eeuw realiseerde men zich meestal niet dat dit een wezenlijk probleem was. Zo weet men nu dat de reeksontwikkelingen van Lagrange en Laplace voor de beweging van het zonnestelsel bij willekeurige beginvoorwaarden *niet* convergent zijn. Maar hoe dan wel de oplossingen te benaderen? Dit was een van de grote vragen van de mathematische fysica die aan het eind van de 19e eeuw gesteld werd.

5 De oplossing van Poincaré

De Zweedse wiskundige Lindstedt had heel handig een methode bedacht om periodieke oplossingen te vinden van tweede orde nietlineaire differentiaalvergelijkingen. Denk aan een vergelijking van het type

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f(x, \dot{x}).$$

Voor $\varepsilon = 0$ zijn in dit voorbeeld alle oplossingen periodiek in de vorm van een lineaire combinatie van $\sin t$ en $\cos t$. Dit zijn 2π-periodieke functies. Als er periodieke oplossingen voor kleine $\varepsilon > 0$ bestaan, dan zal de periode in de buurt van 2π liggen en ontwikkelbaar zijn in een machtreeks van ε. Dat zelfde geldt voor de beginvoorwaarden waar de periodieke oplossing start, ook die ontwikkelen we in een machtreeks van ε. Een goed idee, maar door Lindstedt alleen uitgevoerd voor tweede orde vergelijkingen en zonder een enkel bewijs. Poincaré las het werk van Lindstedt en realiseerde zich dat deze rekenprocedure correct was als je op de coëfficïenten van de verkegen machtreeksontwikkelingen de impliciete functie stelling kon toepassen. Hij generaliseerde dit idee meteen tot differentiaalvergelijkingen van willekeurig grote orde en leverde daarmee zowel een bewijs van existentie van periodieke oplossingen als een techniek voor benadering. Henri Poincaré was altijd heel zorgvuldig in het vermelden van andermans werk en zo heet deze methode nu de Poincaré-Lindstedt methode. Hij zag daar allerlei toepassingen voor, bijvoorbeeld in de draadloze telegrafie en in het gravitationele drielichamen probleem.



Het elliptische, beperkte drie-lichamen probleem; nu is μ de (grote) centrale massa (denk aan de Zon), de eerste planeet heeft een kleinere massa dan μ, de tweede een zeer veel kleinere. Indien deze laatste massa nul is, beweegt de eerste planeet in een ellipsbaan om de centrale massa.

Voor het drielichamen probleem dat geschetst is in de figuren geldt, dat de kleine parameter wordt gegeven door de massaverhouding van de derde (kleinste) massa en de andere twee massa's. Je kunt dan minstens drie types gestoorde periodieke banen onderscheiden:

1. De beweging blijft in een vlak, de baan-inclinaties zijn nul, de eccentriciteiten van de banen zijn klein.

2. De beweging blijft in een vlak, de baan-inclinaties zijn nul, maar de eccentriciteiten van de banen zijn niet klein.

3. De inclinaties zijn niet nul, er vindt beweging buiten het vlak van de eerste twee lichamen plaats.

Hierbij kun je natuurlijk ook uitgaan van het gestoorde twee-lichamen probleem waarbij de twee lichamen in ellipsbanen om elkaar heen bewegen. Dan begin je al met een positieve eccentriciteit.

6 Bifurcaties

Het is typerend voor Poincaré dat hij niet alleen een methode generaliseerde en de correctheid ervan bewees, maar dat hij ook naging wat er gebeurde als er niet aan de voorwaarden van zijn bewijs was voldaan. Dat geval bleek niet zo uitzonderlijk te zijn en zijn werk leidde tot een heel nieuw vakgebied: bifurcatietheorie. We illustreren dat voor storingsvergelijkingen die we goed kennen: tweedegraads algebraïsche vergelijkingen.

Voorbeeld 1
Zoek de nulpunten van

$$f(x,\varepsilon) = x^2 + \varepsilon x - 1$$

Als we $\varepsilon = 0$ stellen, ontstaat de vergelijking $x^2 - 1 = 0$ met oplossingen ± 1. De impliciete functie stelling levert als voorwaarde voor het bestaan van de machtreeksontwikkeling dat $2x + \varepsilon \neq 0$ in een omgeving van $x = \pm 1$ en $\varepsilon = 0$. Daar is aan voldaan.
In dit probleem kunnen we natuurlijk de abc-formule toepassen met als resultaat voor de wortels

$$-\frac{1}{2}\varepsilon \pm \frac{1}{2}\sqrt{4+\varepsilon^2}.$$

Daaruit is direct te zien dat de wortels een machtreeksontwikkeling van de vorm $\sum x_n \varepsilon^n$ bezitten in een omgeving van ± 1.

Voorbeeld 2
Zoek de nulpunten van

$$f(x,\varepsilon) = x^2 - 2x + 1 - \varepsilon.$$

Als we $\varepsilon = 0$ stellen, ontstaat de vergelijking $x^2 - 2x + 1 = 0$ met samenvallende oplossingen 1. De impliciete functie stelling levert als voorwaarde dat $2x - 2 \neq 0$ in een omgeving van $x = 1$ en $\varepsilon = 0$. Daar is *niet* aan voldaan. Wat gebeurt er dan wel in dit geval? De abc-formule geeft uitsluitsel, de wortels worden gegeven door

$$1 \pm \sqrt{\varepsilon}.$$

Door de ε-storing takken dus van de wortel $x = 1$ twee wortels af die groeien met $\sqrt{\varepsilon}$. Dit heet een *bifurcatie*, letterlijk 'twee-vork'.
Er blijken verschillende soorten bifurcaties te zijn en Poincaré analyseert er enkele, bijvoorbeeld een die nu de 'transkritische bifurcatie' wordt genoemd; hij bestudeert ook zeer uitvoerig de bifurcatie die later naar Hopf werd genoemd. Deze belangrijke bifurcatie werd door Poincaré beschreven in zijn boek over dynamische systemen [2]. Het blijkt dat als we periodieke oplossingen zoeken van differentiaalvergelijkingen terwijl er niet is voldaan aan de voorwaarden van de impliciete functie stelling, er op analoge wijze meer dan één oplossing kan aftakken van een van de oplossingen die bij $\varepsilon = 0$ bestaat. Dit is belangrijk voor een groot aantal toepassingen.

Voorbeeld 3
Nog een voorbeeld dat de subtiliteit van deze storingsproblemen illustreert. Zoek de nulpunten van

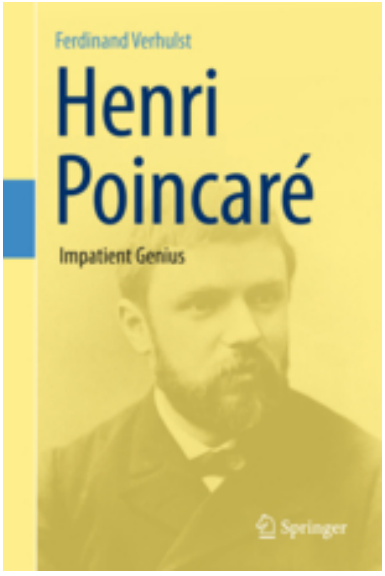
$$f(x,\varepsilon) = x^2 + 3\varepsilon x - 4\varepsilon^2$$

Als we $\varepsilon = 0$ stellen, ontstaat de vergelijking $x^2 = 0$ met samenvallende oplossingen 0. De impliciete functie stelling levert als voorwaarde voor het bestaan van de machtreeksontwikkeling dat $2x + 3\varepsilon \neq 0$ in een omgeving van $x = 0$ en $\varepsilon = 0$. Daar is *niet* aan voldaan.
We doen even of we de abc-formule niet kennen en kijken of we wat verder komen door de vergelijking tot en met termen $O(\varepsilon)$ te bekijken en ε^2-termen te verwaarlozen. We vinden de vergelijking $x^2 + 3\varepsilon x = 0$ met oplossingen 0 en -3ε. Leveren die uitkomsten een benadering van de 'echte' wortels van de vergelijking? De abc-formule levert de wortels $x = +\varepsilon$ en, verrassend, $x = -4\varepsilon$. Dat is wel een heel andere uitkomst. Meer informatie over de wonderlijke eigenschappen van gestoorde algebraïsche vergelijkingen is te vinden in [3], de hoofdstukken 2 en 15.3.

Referenties

[1] S.G. Krantz and H.R. Parks, *The implicit function theorem, history, theory and applications*, Birkhäuser, Basel etc. 2002.
(Moderne inleiding met aandacht voor de historische aspecten.)

[2] Henri Poincaré, *Les Méthodes nouvelles de la mécanique célèste*, 3 vols. Gauthier-Villars, Paris, 1892, 1893, 1899.
(Deze drie delen hebben een verwarrende titel. Het is geen verhandeling over hemelmechanica, ze vormen de eerste moderne verhandeling over het onderwerp dynamische systemen. De hemelmechanica was rond 1900 een van de belangrijkste onderwerpen van de mathematische fysica, de voorbeelden van het boek zijn dan ook vaak aan de hemelmechanica ontleend. Poincaré zelf zegt dat je om hemelmechanica te leren een ander boek moet lezen, bijvoorbeeld dat van Tisserand.)

[3] Ferdinand Verhulst, *Methods and applications of singular perturbations*, Springer, New York 2005.

[4] Ferdinand Verhulst, *Henri Poincaré, impatient genius*, Springer, New York 2012.