HANDMATIG WORTELTREKKEN

Kelly Vankriekelsvenne & Julie Vanmarsenille

Doelstellingen:

Na deze workshop moeten jullie in staat zijn om:

- Het algoritme voor handmatig wortels te trekken toe te passen.
- De stappen van het algoritme te verwoorden.
- Het trekken van wortels te situeren in de geschiedenis (beperkt).

HISTORISCHE NOOT

1. BABYLONISCHE WISKUNDE (3000-1600 v.Chr.)

Voor het handmatig trekken van wortels gaan we terug naar de tijd van de Babyloniërs. Dit volk leefde zo’n 4000 jaar geleden in Mesopotamië dat ook wel bekend is onder de naam tweestromenland. Nu kennen we dit land als Irak.

Kaart Babylonië

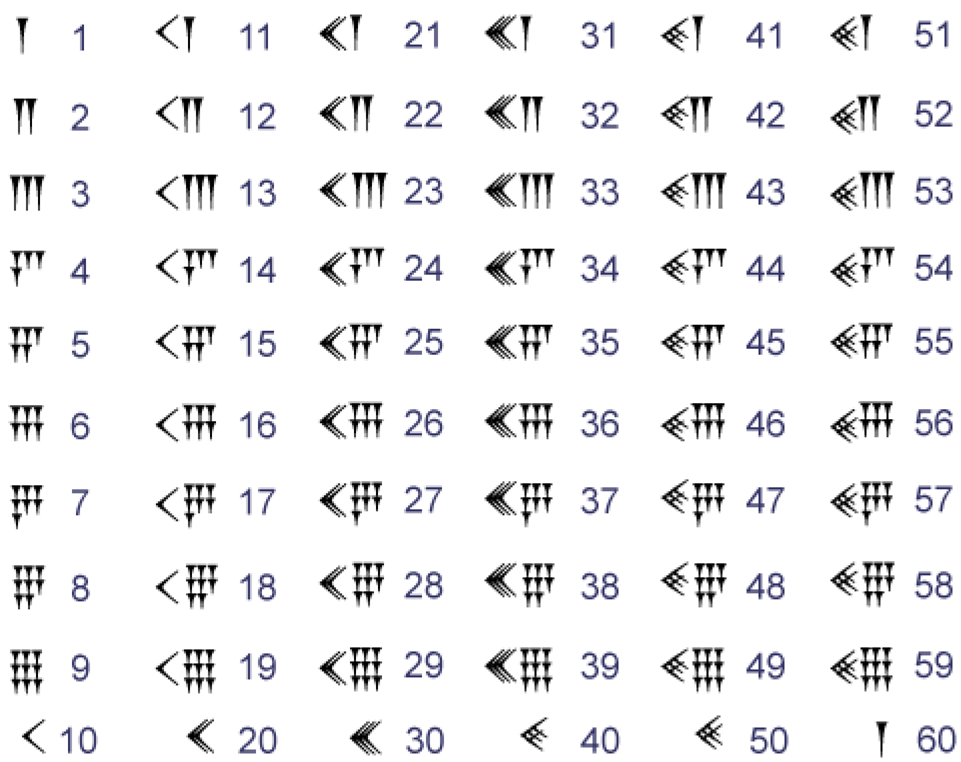
Dit volk beschikte al over een grote wiskundige kennis, de stelling van Pythagoras was reeds bekend. Zij hadden deze stelling al zo’n 2500 jaar voor Pythagoras achterhaald, toch waren het pas de volgers van Pythagoras die een effectief bewijs leverde voor deze stelling.

Ook beschikten de Babyloniërs over goede algebraïsche vaardigheden en een efficiënt systeem voor getallen. Ze werkten met het zestigtallig talstelsel. We weten dit doordat er duizenden kleitabletten zijn teruggevonden die dateren uit deze tijd. Er zijn kleitabletten terugvonden met verschillende doeleinden:

1. Tabletten met tabellen zoals tafels van vermenigvuldigen, kwadraten,…
2. Tabletten met algebraïsche en meetkundige problemen.
3. Tabletten met reeksen van waarnemingen: zonsopkomst, maanstand,…

Al deze tabletten zijn in het spijkerschrift geschreven. In deze tijd gebruikte men net zoals bij ons een positiestelsel. De plaats van het cijfer heeft een belangrijke waarde.

Bv. $125 \neq 521$



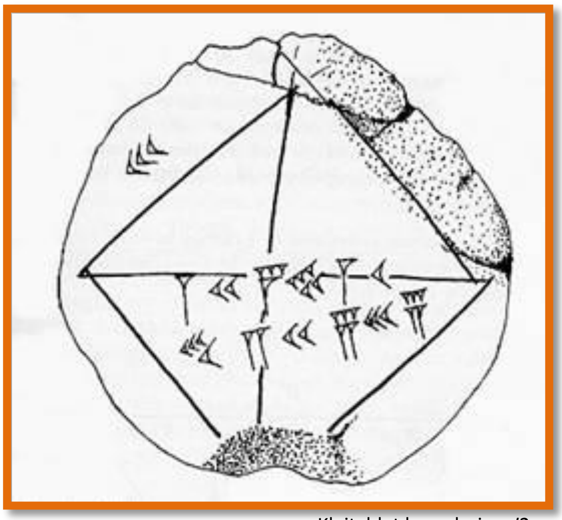
Het is duidelijk dat men hier het zestigtallig talstelsel hanteert. Voor 1 en 60 hanteren ze eveneens hetzelfde symbool. Wij hebben dit voor 1, 10, 100,… maar wij maken een onderscheid door toevoeging van het cijfer nul. Omdat in deze tijd het cijfer nul nog niet werd gebruikt, zal men uit de context en het verband moeten afleiden over welk getal het nu precies gaat. Er zijn namelijk verschillende mogelijkheden voor eenzelfde schrijfwijze:

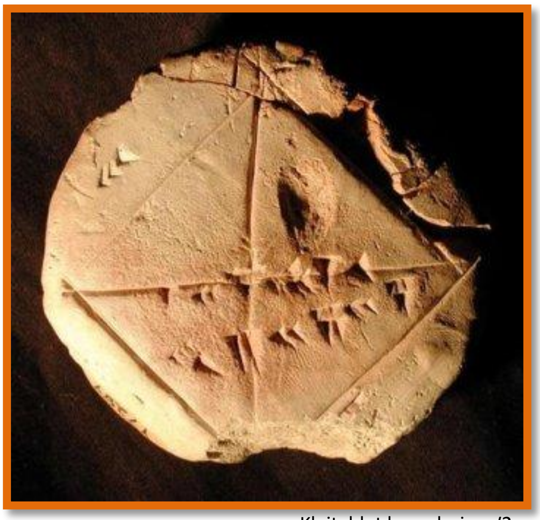
$2 \cdot 60 + 5 = 125$

of $2 \cdot 60^2 + 5 = 7205$

of $2 \cdot 60^2 + 5 \cdot 60 = 7500$

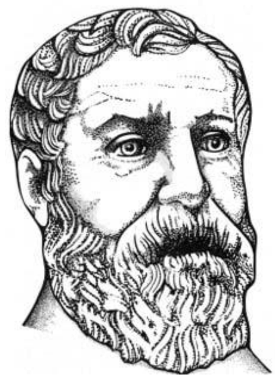
We weten dat de Babyloniërs **als eerste in contact kwamen met meetkundige problemen waarvoor ze kwadraten en vierkantswortels moesten hanteren**. We weten dit doordat er verscheidene kleitabletten met kwadratentabellen zijn teruggevonden. Ook werden er kleitabletten gevonden met meetkundige vraagstukken waarin vierkantswortels vereist waren. Zo is er een kleitablet teruggevonden waarop de benadering van √2 wordt uitgelegd, dit door gebruik te maken van de stelling van Pythagoras. Men kon in deze tijd √2 benaderen tot op 5 cijfers na de komma. De stelling van Pythagoras heette natuurlijk nog niet zo.


Kleitablet benadering √2


Kleitablet benadering √2

Rond 1600 v.Chr. viel het Babylonische rijk uit elkaar. Gelukkig bleef de cultuur hierbij wel grotendeels behouden. Rond 600 v.Chr. onder koning Nebkuadnezar kende het Babylonische rijk een periode van bloei. Men noemt deze periode de nieuwe Babylonische periode. Nadien kwam het Babylonische rijk in handen van de Perzen en vervolgens in de handen van de Grieken. Alexander de Grote zorgde hiervoor. Hij leefde rond 350 v.Chr. en nam de Babylonische cultuur, dus ook de wiskunde, mee naar Griekenland. **We kunnen aan de hand van de gevonden bronnen besluiten dat de Babyloniërs als eerste een manier zochten én vonden om vierkantswortels en kwadraten te berekenen.**

2. HERON VAN ALEXANDRIË (10-85 n.Chr.)



Alexandrië was op dit moment het middelpunt van de wiskunde in de wereld. De Griekse algebra was gebaseerd op ontdekkingen/verwezenlijkingen van de Egyptenaren – Babyloniërs – Chinezen.
Heron was een wetenschapper die zich ook bezig hield met wiskunde. Er staan een heleboel bekende uitvindingen op zijn naam. Hij was bijvoorbeeld degene die de eerste stoommachine uitvond. Daarnaast schreef hij ook veel werken.

Voor ons zijn enkel de wiskundige van belang:

→ **Metrica**: hierin beschrijft hij hoe we oppervlaktes en volumes van diverse objecten kunnen berekenen.

→ **Dioptra**: dit is een verzameling van methoden om lengtes en afstanden te meten.

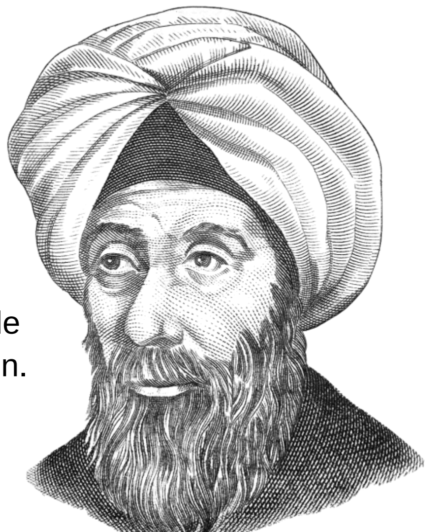
Ook zijn er enkele werken waarvan men niet zeker is, dat hij werkelijk de schrijver is:

→ **Geometrica**: dit is een verzameling van vergelijkingen en uitweidingen gebaseerd op het eerste hoofdstuk van Metrica.

→ **Stereometrica**: hierin vinden we voorbeelden van driedimensionale berekeningen gebaseerd op het tweede hoofdstuk van Metrica.

Als wiskundige is hij vooral bekend vanwege zijn formule die het verband tussen de zijden en de oppervlakte van een driehoek uitdrukt, iets wat voor de landmeetkunde van groot belang is. Deze formule wordt de ‘formule van Heron’ genoemd
Hij hield zich bezig met irrationale verhoudingen, terwijl die bij de Babyloniërs niet voorkwamen. Voor ons is hij vooral belangrijk omdat hij in zijn boek Metrica beschrijft hoe je vierkantswortels kan trekken van natuurlijke getallen die geen kwadraten zijn van een natuurlijk getal. **Heron legde de basis voor de methode die we tegenwoordig gebruiken om wortels met de hand te trekken.**

3. AL- KHWARIZMI (770 – 850 n. Chr.)



Mohammed Al-Khwarizmi was een wiskundige die leefde in het Middeleeuwse Islamitische wereldrijk. In die periode waren het voornamelijk de Arabieren die zich bezighielden met wiskunde. Hij publiceerde het boek ‘Reparatie en confrontatie’. In dit boek werden geen nieuwe elementen aangebracht, wel werd alles heel duidelijk uitgelegd, wat een grote didactische waarde heeft. Door dit boek is de naam algebra ontstaan voor de leer van het oplossen van vergelijkingen met onbekende getallen. Net zoals andere Arabische geleerden bestudeerde hij teksten van de Grieken, dus ook de werken van Heron. Daarom vinden we methodes van Heron terug in ‘Reparatie en confrontatie’.

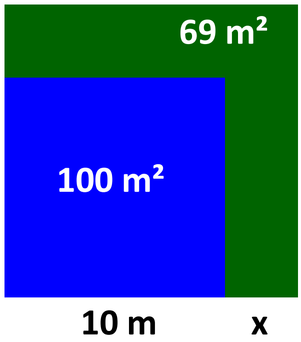
Dit is een korte glimp op de oorsprong van het trekken van vierkantswortels. Natuurlijk zijn er over de jaren heen nog vele anderen die zich hiermee bezig hebben gehouden. Dit is voornamelijk te wijten aan het feit dat er in deze vroege jaren nog niet zo’n uitgebreid communicatiesysteem was. Wij kunnen nu alles te weten komen met behulp van computer, internet, telefoon,…

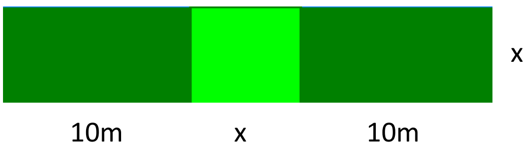
HANDMATIG WORTELTREKKEN

1. INLEIDING

Boer Jaak bezit een vierkant stuk grond (oppervlakte = **169 m²**). Hij wil heel graag een hek zetten langs één kant van dat stuk grond. Hij heeft vroeger niet zo goed opgelet op school en hij kent enkel de eerste tien kwadraten.
Hij is wel slim, dus bedenkt hij een andere manier om de gezochte lengte te berekenen.

Hij weet dat binnen zijn stuk grond zeker een vierkant stuk grond van 100m² past. Dit vierkant heeft als zijde 10m. Bedenk nu een manier om de resterende lengte van de zijde te berekenen.
(Tip: Maak gebruik van de oppervlakte van een rechthoek.)
Plaats de groene stukken zodanig dat je de gezochte lengte kan berekenen.





$b \cdot h \leq 69$

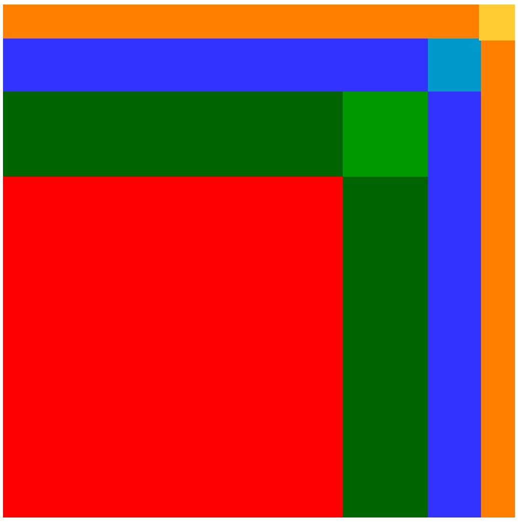
$(20 + x) \cdot x \leq 69$

$23 \cdot 3 = 69$

De totale lengte van het stuk grond is dus 10 + x = 10 + 3 = 13 m

2. MOEILIJKERE OPGAVE, DEZELFDE WERKWIJZE!

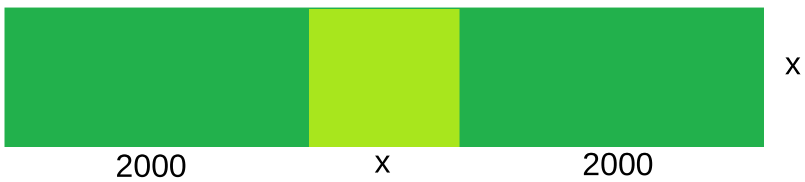
Bereken de zijde van een vierkant met oppervlakte 7 365 796 cm².



**2.1 Zoek de lengte van de zijde van het rode vierkant.
(Tip: grootst mogelijke duizendtal)**

Dit is 2000 cm, want 2000 · 2000 = 4 000 000

2.2 Nu zoeken we de lengte van de zijde van het groene, blauwe en oranje vierkant. Samen vormen zij immers de resterende lengte van de zijde die we zoeken.

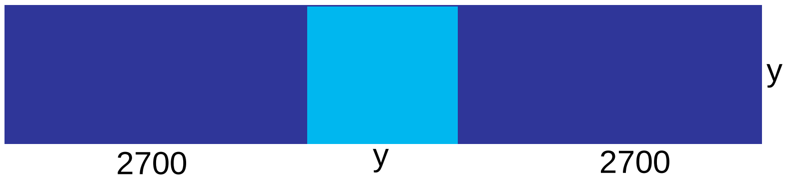


b ·h ≤ 3 365 796 *(7 365 796 — 4 000 000 = 3 365 796)*

(4000 + x) · x ≤ 3 365 796

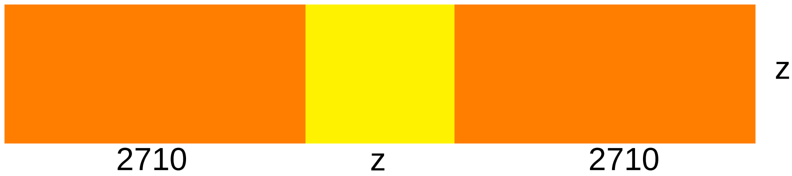
**Je gaat op zoek naar een waarde voor x,
zodat je uitkomst kleiner dan of gelijk aan 3 365 796 is.**

(4000 + 700) · 700 = 4700 · 700 = 3 290 000



(5400 + y) · y ≤ 75 796 *(3 365 797 — 3 290 000 = 75 796)*

54$\boxed{1}$0 · $\boxed{1}$0 = 54 100



(5420 + z) · z ≤ 21 696 *(75 796 — 54 100 = 21 696)*

541$\boxed{4}$ · $\boxed{4}$ = 21 696

De totale lengte van een zijde van het vierkant bedraagt 2714 cm, want 2000 + x + y + z = 2714.

3. OP ZOEK NAAR EEN ALGORITME

	√ 7	36	57	96	= 2 714
$\boxed{2}^2 = 4$	4	ǁ	ǁ	ǁ	
	3	36	ǁ	ǁ	
4$\boxed{7}$ · $\boxed{7}$	3	29	ǁ	ǁ	
Want 2 · 2 = 4		7	57	ǁ	
54$\boxed{1}$ · $\boxed{1}$		5	41	ǁ	
Want 27 · 2 = 54		2	16	96	
542$\boxed{4}$ · $\boxed{4}$		2	16	96	
Want 271 · 2 = 542				0	

Werkwijze:

1. Groepeer de cijfers onder het wortelteken per twee. Begin vanaf rechts.

2. Zoek de grootst mogelijke macht die kleiner is of gelijk aan het getal gevormd door je eerste groepje cijfers als je vanaf links begint. In het voorbeeld is dit 2^2.

Noteer deze onder dit getal. 2 is het eerste cijfer van de wortel die je zoekt. De wortel die we zoeken is uiteraard de lengte van het totale vierkant. (zie punt 2)

Wat is het verband met de meetkundige methode?

We zoeken het grootste vierkant waarvan de lengte van de zijde een duizendtal is.

3. Bereken het verschil tussen deze twee getallen. In het voorbeeld is dit 3.

Wat is het verband met de meetkundige methode?

We zoeken de resterende oppervlakte.

4. Laat het volgende groepje van twee cijfers zakken.

5. Het eerste cijfer dat je gevonden hebt (2), vermenigvuldig je met 2. Daarna moet je een waarde voor x zoeken gaande van 0 t.e.m. 9 zodat $4x \cdot x \leq 336$. Wanneer $x = 7$ bekom je 329, indien $x = 8$ bekom je 384. Dit is te veel. Daarom kies je voor $x = 7$. Het getal 329 noteer je onder 336.
   Je berekent het verschil: $336 - 329 = 7$

6. Je herhaalt de werkwijze van stap 5 tot het verschil 0 is of tot je het aantal gewenste decimalen na de komma hebt gevonden.

Wat is het verband met de meetkundige methode?

Je verdeelt de resterende oppervlakte zodat je de lengte van de zijde van het groene, blauwe en oranje vierkant kan zoeken.

3…2…1……………….START!

1. REGELS VAN HET SPEL

- Jullie moeten zoveel mogelijk wortels uitrekenen in groep, dus: TEAMWORK!
- Indien jullie een wortel gevonden hebben, steken jullie het bordje van je team omhoog.
- De begeleiders komen deze controleren.
- Bij een correcte berekening mogen jullie een wortel trekken uit de kweekbak.
- Op deze wortels staan punten.
- Het is de bedoeling dat jullie zoveel mogelijk punten scoren, het winnend team gaat naar huis met een **PRACHTIGE PRIJS!**
- <u>Addertje onder het gras:</u> de uitkomst moet tot op 1 decimaal nauwkeurig zijn.

2. OEFENINGEN

OEFENING 1

	$\sqrt{}$ **8**	**41**	= 29
$2^2 = 4$	4	||	
	4	41	
49 · 9	4	41	
↓ *Want 2 · 2 = 4*		0	

OEFENING 2

	$\sqrt{}$ **3**	**61**	= 19
$1^2 = 1$	1	||	
	2	61	
29 · 9	2	61	
↓ *Want 2 · 1 = 2*		0	

OEFENING 3

	$\sqrt{}$ **31**	**36**	= 56
$5^2 = 25$	25	||	
	6	36	
106 · 6	6	36	
↓			
Want 2 ·5 = 10		0	

OEFENING 4

	$\sqrt{}$ **1**	**06**	**09**	= 103
$1^2 = 1$	1	||	||	
	0	06	||	
20 · 0	0	00	||	
↓				
Want 2 · 1 = 2		6	09	
203 · 3		6	09	
↓				
Want 2 · 10 = 20			0	

OEFENING 5

	$\sqrt{}$ **11**	**97**	**16**	= 346
$3^2 = 25$	9	||	||	
	2	97	||	
64 · 4	2	56	||	
↓				
Want 2 · 3 =6		41	16	
686 · 6		41	16	
↓				
Want 2 · 34 = 68			0	

OEFENING 6

	$\sqrt{}$ **31**	**36**	**00**	= 560
$5^2 = 25$	25	||	||	
	6	36	||	
106 · 6	6	36	||	
↓				
Want 2 ·5 = 10		0	00	
1120 · 0		0	00	
↓				
Want 2 · 56 = 112			0	

OEFENING 7

= 948,4

	√ **89**	**95**	**64,**	**00**
$9^2 = 81$	81	‖	‖	‖
	8	95	‖	‖
184 · 4	7	36	‖	‖
Want 2 · 9 =184	1	59	64	‖
1888 · 8	1	51	04	‖
Want 2 · 94 = 188		8	60	00
18964 · 4		7	58	56
Want 2 · 948 = 1896		1	01	44

OEFENING 8

= 2585

	√ **6**	**68**	**22**	**25**
$2^2 = 4$	4	‖	‖	‖
	2	68	‖	‖
45 · 5	2	25	‖	‖
Want 2 · 2 = 4		43	22	‖
508 · 8		40	64	‖
Want 2 · 25 = 50		2	58	25
5165 · 5		2	58	25
Want 2 · 258 = 516				0

OEFENING 9

= 255,7

	√ **6**	**54**	**32,**	**00**
$2^2 = 4$	4	‖	‖	‖
	2	54	‖	‖
45 · 5	2	25	‖	‖
Want 2 · 2 = 4		29	32	‖
505 · 5		25	25	‖
Want 2 · 25 = 50		4	07	00
5107 · 7		3	57	49
Want 2 · 255 = 510			49	51

OEFENING 10

	$\sqrt{}$ **1**	**23**	**45**	**67**	**89,**	**00**	= 11111,1
$1^2 = 1$	1	$\Vert$	$\Vert$	$\Vert$	$\Vert$	$\Vert$	
	0	23	$\Vert$	$\Vert$	$\Vert$	$\Vert$	
21 · 1		21	$\Vert$	$\Vert$	$\Vert$	$\Vert$	
$\downarrow$ *Want 2 · 1 = 2*		2	45	$\Vert$	$\Vert$	$\Vert$	
221 · 1		2	21	$\Vert$	$\Vert$	$\Vert$	
$\downarrow$ *Want 2 · 11 = 22*			24	67	$\Vert$	$\Vert$	
2221 · 1			22	21	$\Vert$	$\Vert$	
$\downarrow$ *Want 2 · 111 = 222*			2	46	89	$\Vert$	
22221 · 1			2	22	21	$\Vert$	
$\downarrow$ *Want 2 · 1111 = 2222*				24	68	00	
222221 · 1				22	22	21	
$\downarrow$ *Want 2 · 11111 = 22222*				2	45	79	

DANKWOORD

Eerst en vooral zouden wij graag de Katholieke Hogeschool Limburg bedanken omdat zij ons aangezet hebben om aan dit project werken. ‘Handmatig worteltrekken’ was immers ons afstudeerproject als professionele bachelor in het secundair onderwijs: wiskunde.

Ook gaat ons dankwoord uit naar Christine Swinnen en Michel Roelens, beide docenten aan de Katholieke Hogeschool Limburg. Dankzij hun begeleiding hebben we onszelf steeds kunnen verbeteren, met als resultaat deze workshop. Tevens heeft Michel Roelens ons de mogelijkheid gegeven om hier als spreker aanwezig te zijn.

Wij hebben dit project niet alleen verwezenlijkt. De basis voor deze workshop werd naast ons namelijk ontwikkeld door nog vier andere studenten.

- Shana Hauben
- Kathleen Jordens
- Danny Majzik
- Martijn Lenaers

Als laatste zouden we nog graag onze dank betuigen aan de organisatoren van de Nationale Wiskunde Dagen 2013 omdat ze ook jongere leerkrachten een kans geven om aan deze conferentie mee te werken.