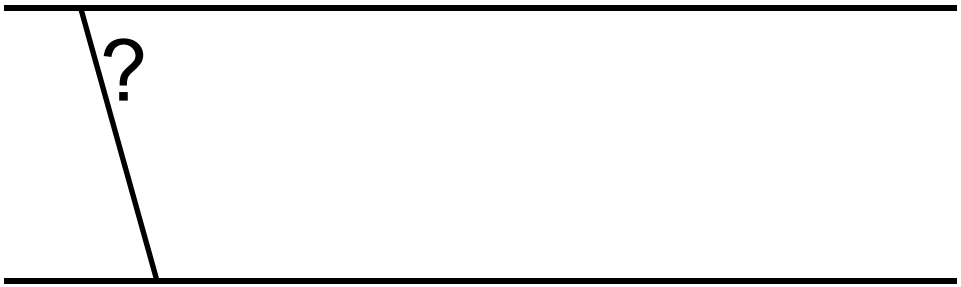
# Wiskunde met een telrol

Adriaan Herremans
adriaan.herremans@ua.ac.be

# Hoe vouw je met een telrol?

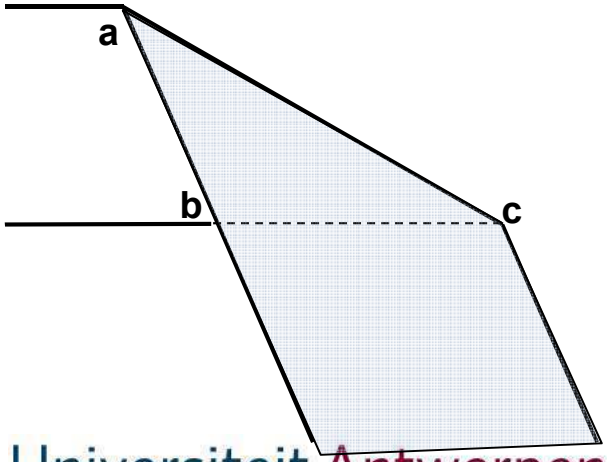


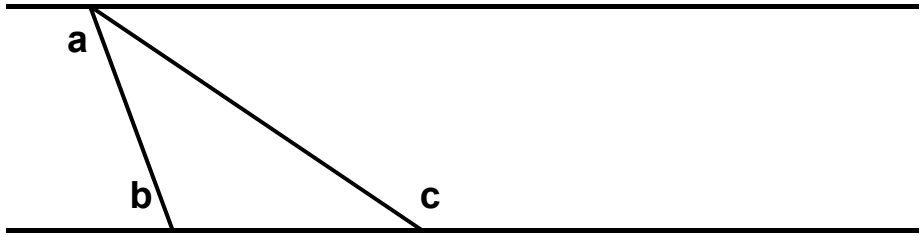

- Je maakt vouwlijnen op een lange strook papier (= de telrol)
- Begin met een willekeurige vouwlijn

- Er zijn dan twee soorten vouw-bewegingen: naar bOven (O) en naar bEneden (E)

# E: naar beneden

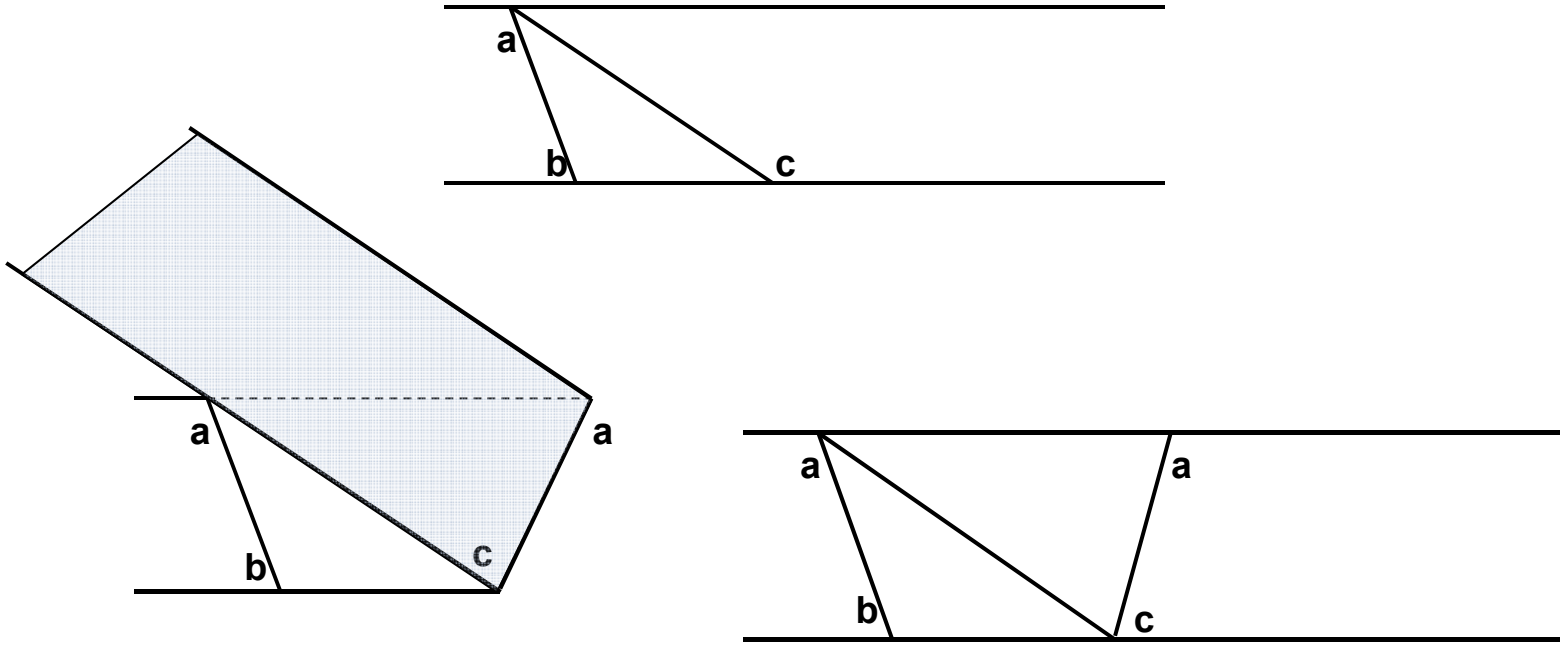
Je vouwt de bovenste rand langs de laatst gemaakte vouwlijn, door de telrol (= rechterkant van de strook) naar beneden te vouwen: zo krijg je een nieuwe vouwlijn.

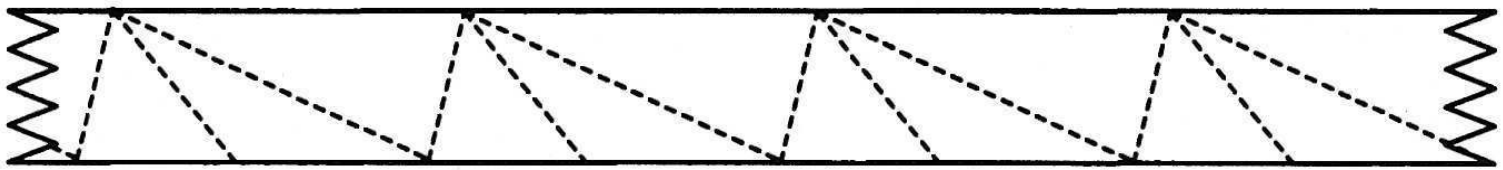


# O: naar boven

Je vouwt de onderste rand langs de laatst gemaakte vouwlijn, door de telrol naar boven te vouwen: zo krijg je een nieuwe vouwlijn.

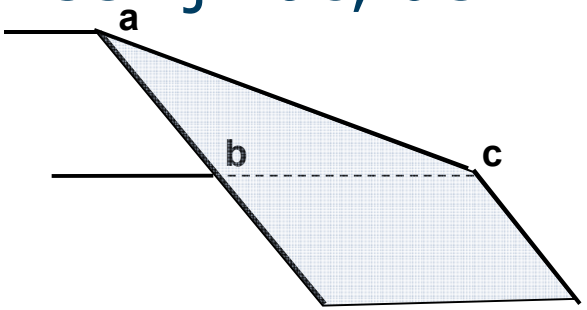




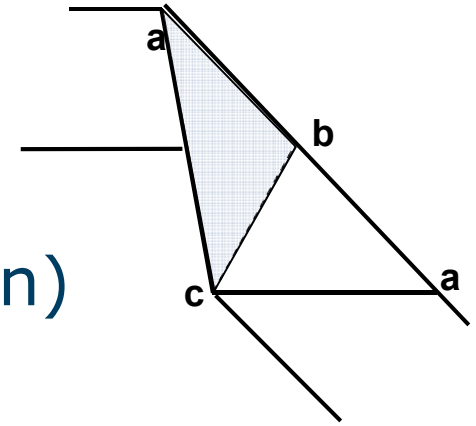
- Besluit: de vouwlijnen op de strook, komen er door herhaling van $E_2O_1$, dwz. twee keer naar beneden gevolgd door één keer naar boven te vouwen.
- Welke 'figuren' kan ik nu vouwen? Waar zit de symmetrie?

# Hoe ‘figuren’ vouwen?

- Vouw langs de meest linkse lijn ac, de telrol naar beneden

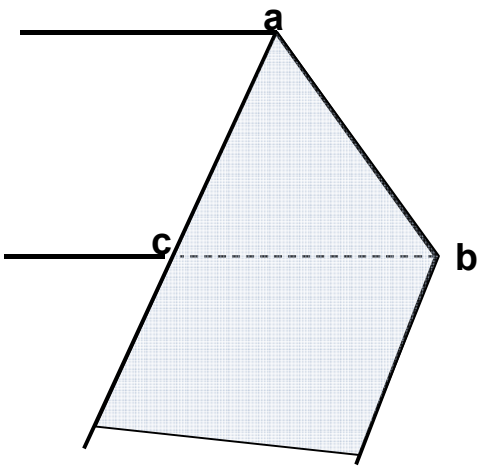


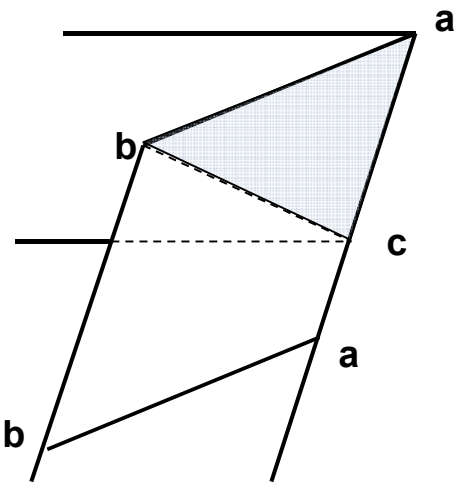

- Vouw dan verder (draai door) langs ab tot ‘bovenaan’ terug de punten a zichtbaar liggen
- Blijft dit herhalen, steeds startend van de volgende a (voor de RODE letter-stroken)



# Andere figuur

- Vouw eerst langs de meest linkse lijn ab



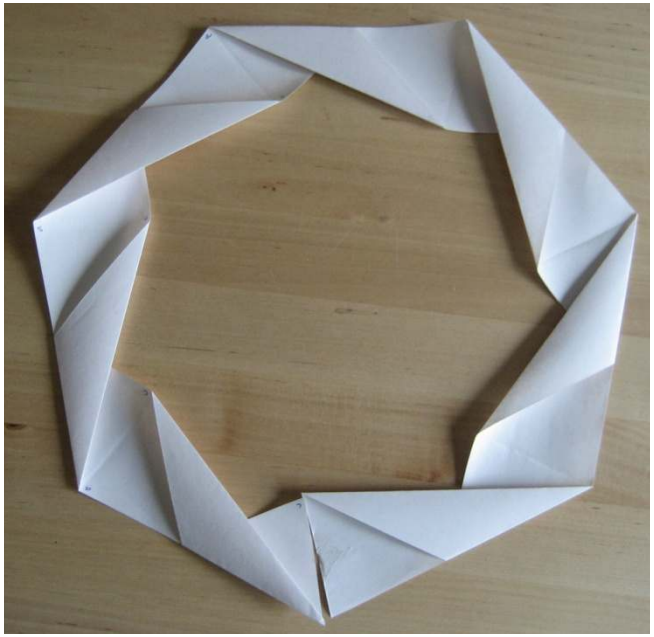




- Vouw dan verder langs ca
- Blijft dit herhalen, steeds startend van de volgende a (voor de BLAUWE letter-stroken)

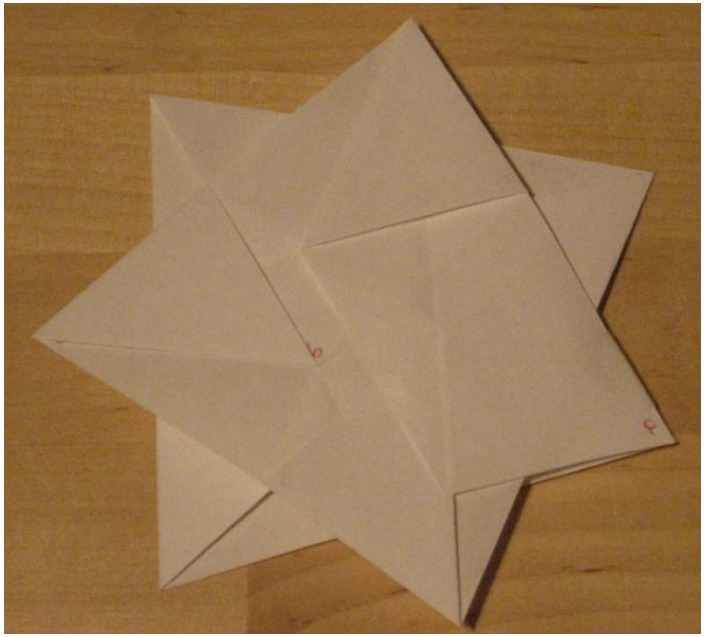
# Resultaat?

Bekijk de rand (= de buitenkant) van je gevouwen figuur. Wat stel je vast?

Figuur 1 (rode letters)



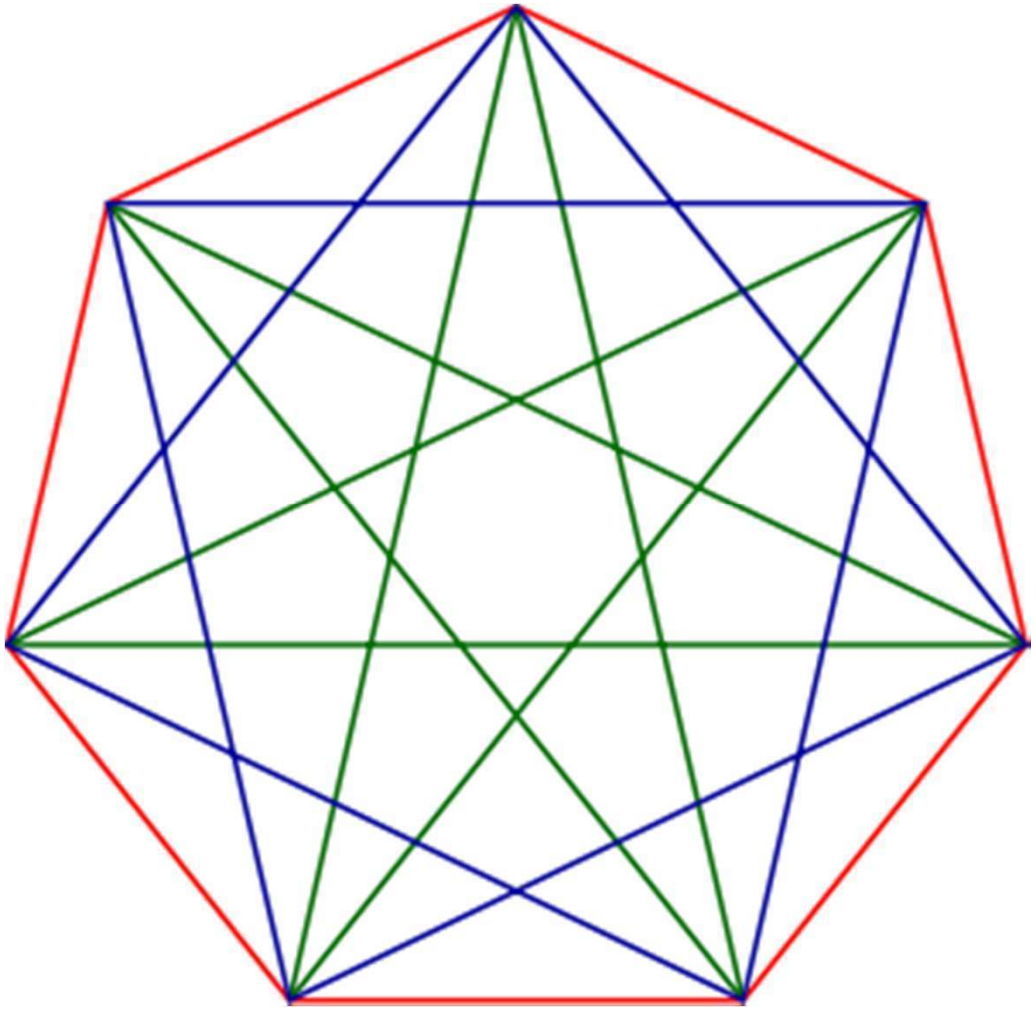
Figuur 2 (blauwe letters)



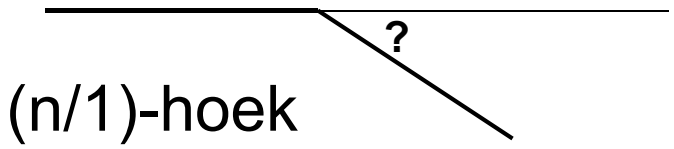
# Definitie

- Stel ggd(a,n)=1, met 2a<n. Als je elk hoekpunt van een regelmatige n-hoek verbindt met zijn a-volgende hoekpunt, dan krijg je een regelmatige vorm. We noemen deze een (n/a)-hoek.
- Vb. een regelmatige n-hoek, is een (n/1)-hoek.

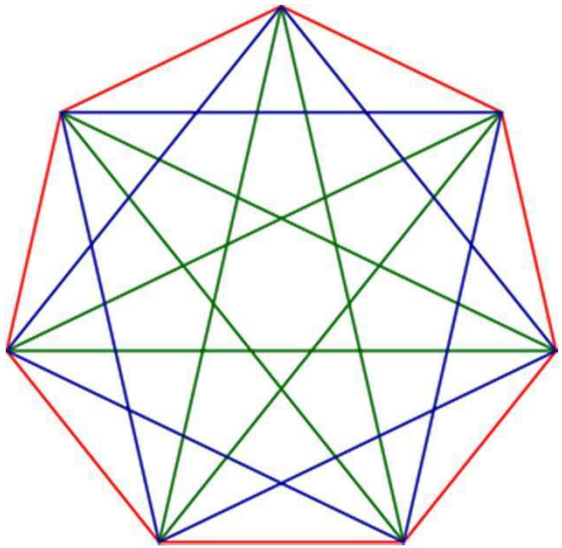
# Alle (7/a)-hoeken



# Berekening van de hoeken

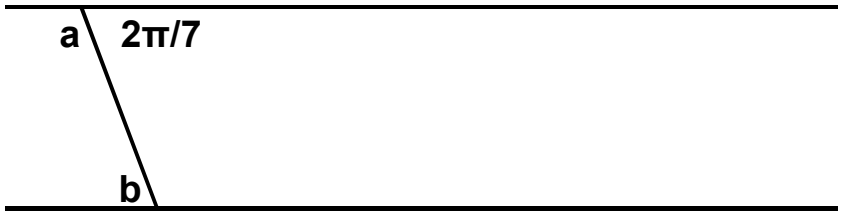


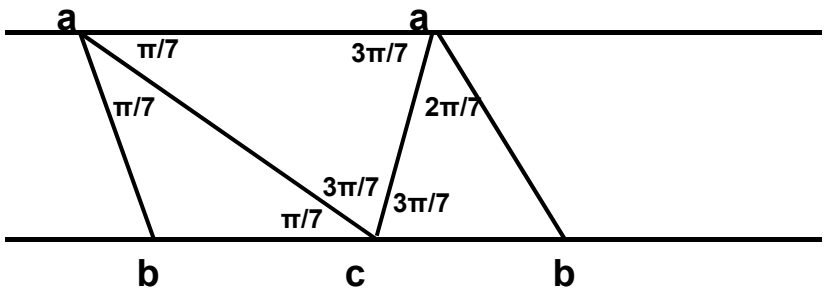

- De buitenhoek van een (n/1)-hoek is 2π/n
- De buitenhoek van een (n/a)-hoek is 2πa/n



# Waarom een 7-hoek?

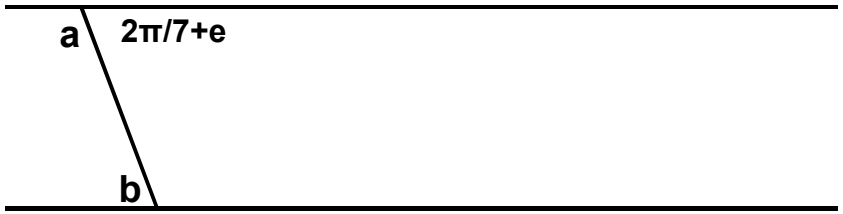
- Stel dat bij toeval de eerste gevouwen hoek in a gelijk was aan 2π/7, dus

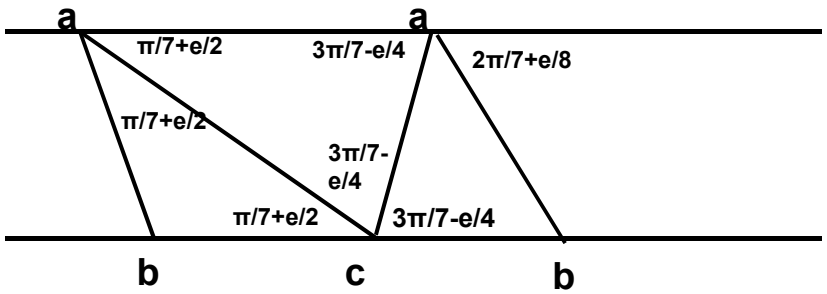


# Waarom een 7-hoek?

- Stel dat je begint met een andere hoek: 2π/7 + e (e mag negatief zijn)




- Bij elke vouw wordt de fout e gehalveerd → exponentiële convergentie

# Historische noot

- Een zevenhoek is niet construeerbaar, dwz is niet exact te tekenen met passer en liniaal.
- (Gauss-Wantzel) Een regelmatige n-hoek is construeerbaar als en slechts als n van de vorm $2^k f_1 f_2 \ldots f_l$ is, waarbij de $f_i$ verschillende Fermat priemgetallen zijn.
- Fermat priemgetallen zijn van de form $F_m = 2^{2^m} + 1$. De eerste zijn dus 3, 5, 17, 257, 65 537.
- Voor m>4 is er nog geen enkel Fermat priemgetal gevonden. Het vermoeden luidt dat $F_m$ enkel priem is voor m<5.

# Analyse aanmaak vouwlijnen

- Veronderstelling: we wensen (n/a)-hoek te vouwen met a, n oneven en onderling ondeelbaar.
- Bij elke nieuwe vouwlijn, halveer je de hoek.
- Je blijft eenzelfde vouwbeweging (E of O) doen totdat je een oneven aantal keer π/n hebt gevouwen, dan wissel je.

# Een vouwsymbool

- Schrijf volgend symbool uit. De regels zijn

1. alle $a_i$ zijn oneven
2. $a_1=a$
3. $n-a_i = 2^{b_i}.a_{i+1}$
4. $a_{m+1}=a_1=a$

$$\begin{array}{c|ccccc|} \mathbf{n} & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_m \\ & b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_m \end{array}$$

- Voorbeeld: (7/1)-hoek

  $7-1 = 6 = 2^1.3$

  $7-3 = 4 = 2^2.1$

$$\begin{array}{c|cc|} \mathbf{7} & 1 & 3 \\ & 1 & 2 \end{array}$$

- Bovenste lijn vertelt je welke hoeken je krijgt
- Onderste lijn: zegt hoe je moet vouwen

# Nog een voorbeeld

- Een (11/3)-hoek
  $11-3 = 2^3.1$
  $11-1 = 2^1.5$
  $11-5 = 2^1.3$

| | | | |
|---|---|---|---|
| **11** | 3 | 1 | 5 |
| | 3 | 1 | 1 |

- Hoe moet je nu vouwen?
- $E_3O_1E_1O_3E_1O_1$ …Pas dan ben je weer helemaal rond + ben je aan dezelfde kant van de telrol aanbeland

# Opmerking - oefening

- Het is niet zo dat steeds alle (n/a)-hoeken voor een vaste n met dezelfde gevouwen strook te maken zijn...
- Oefeningetje.
  Bereken hoeveel verschillende stroken je nodig hebt voor alle (31/a)-hoeken. Welke kan je met eenzelfde strook papier vouwen?

| | | |
|---|---|---|
| **31** | 1 | 15 |
| | 1 | 4 |

| | | |
|---|---|---|
| **31** | 3 | 7 |
| | 2 | 3 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **31** | 5 | 13 | 9 | 11 |
| | 1 | 1 | 1 | 2 |

# Even n of a ?

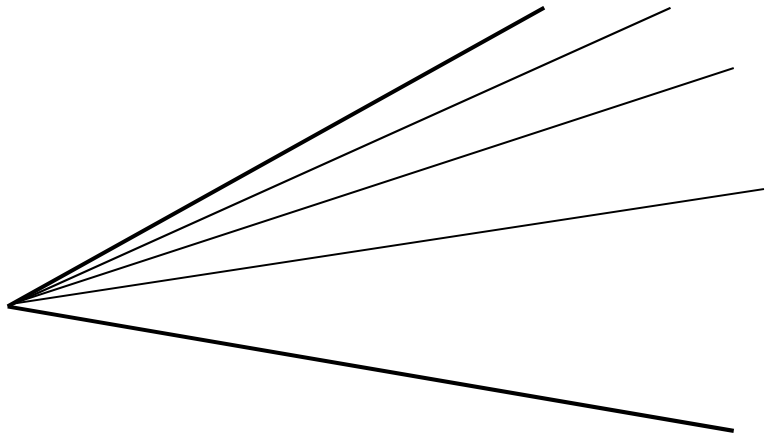
- Als a even is, zeg $2^k a'$ met a' oneven. Dan vind je in de gevouwen strook voor een (n/a')-hoek ook de juiste hoek voor het vouwen van een (n/a)-hoek.
- Als n even is, zeg $2^k n'$, dan vouw je eerst de strook voor een (n'/a)-hoek. De hoek $\pi n'/a$ kan je dan k keer in twee delen, en zo krijg je de juiste hoek.

# En verder…

- Je kan bij een gegeven gevouwen strook proberen nagaan welke veelhoeken je er mee kan vouwen. Dus gegeven alle $b_i$, zoek dan n en alle $a_i$.
- Ook het vouwsymbool bevat nog getaltheoretische eigenschappen. Zo kan er bv uit worden afgeleid dat 641 een deler is van $F_5$ en wat het quotiënt is.
- Je kan ook 3D-figuren maken met stroken papier. Zo volstaan 5 stroken van 11 driehoeken (en handigheid) om een regelmatig 20-vlak in elkaar te knutselen.

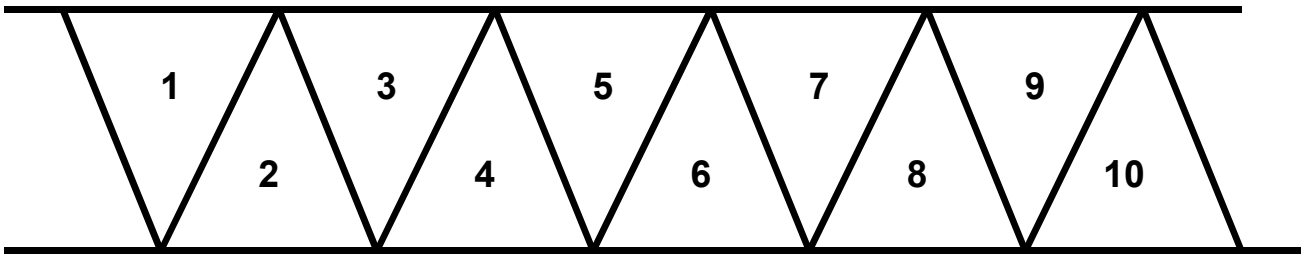
# En verder...

- Eigenlijk is de vouwprocedure een manier om het rationaal getal n/a te ‘benaderen’.
- Zo kan je bijvoorbeeld exponentieel snel eender welke gegeven hoek in zeven gelijke delen vouwen met de procedure $E_2O_1$.

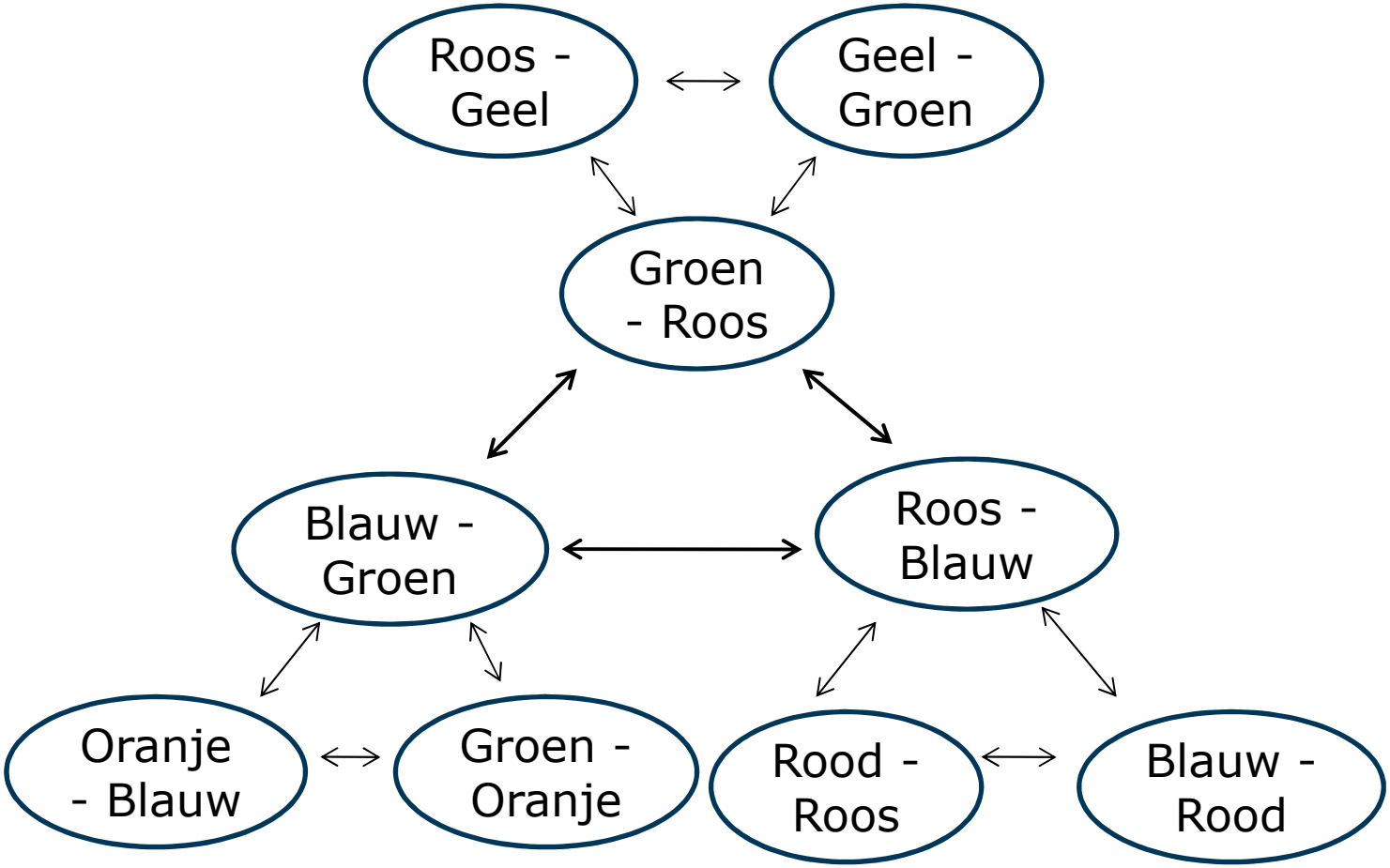


# Flexagon

- “Flexibele” veelhoeken (Artur Stone 1939)
- Voor de meeste eenvoudige met drie kleuren heb je nood aan een strook met 10 gelijkzijdige driehoeken.
- Dit kan eenvoudig door de vouwbeweging $E_1O_1$ (en dus zonder geodriehoek).

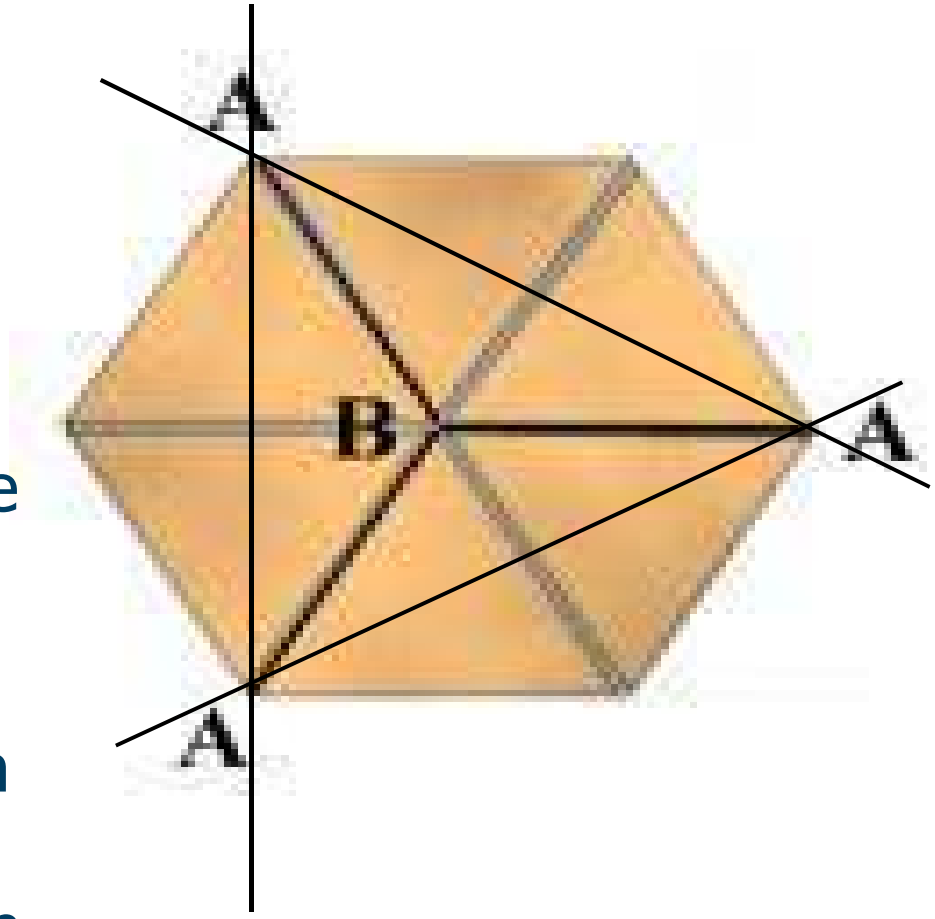


# Kleurenschema's



# Bewegingen

- Je kan proberen het resultaat van het flexen te beschrijven.
- Per ‘flap’ kan je spreken over een rotatie rond een as.
- Kijkend naar het resultaat, kan je zeggen dat de flappen 120° draaien ten opzichte van elkaar.



# Opmerkingen

- Nood aan zorgvuldig en precies werken: bv. aandachtig lezen van de vouwprocedure
  (achteraan deze presentatie vind je een voorbeeld van instructies voor een flexagon met 3 kleuren).
- Er zijn flexagons zoals getoond met 3, 4, 5, 6, 7 verschillende 'kleuren' mogelijk.
- Ook andere vormen dan driehoeken zijn mogelijk
- Mogelijkheid om persoonlijke toets te geven met foto's, tekeningen

# Didactische conclusies

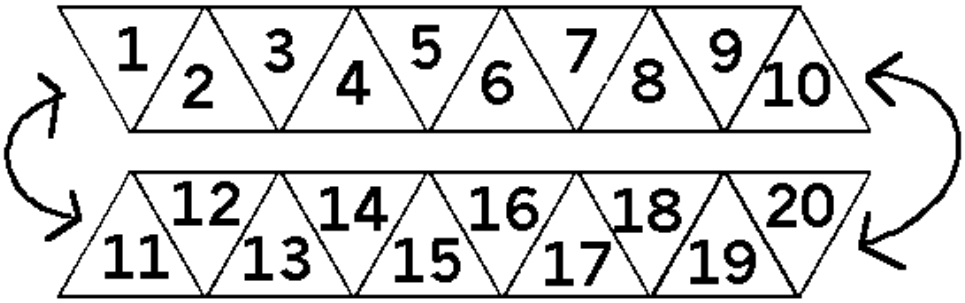
- Wiskunde als verklaring van een zichtbaar fenomeen… wat men al doende ervaart.
- Variatie in leerstof: convergentie, Z-hoeken,...
- Variatie in opdrachten
- Variatie in niveau
- Kans tot verbazen (en uitdagen) van leerlingen
- Kans tot persoonlijke toets
- Vakoverschrijdende mogelijkheden
- Eenvoudig en goedkoop didactisch materiaal
- Kans tot verdere zelfontdekking

# Referenties

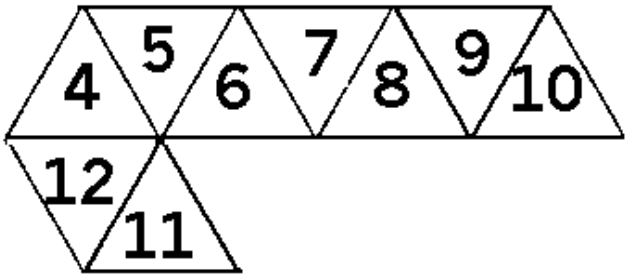

1. Hilton P., Holton D., Pedersen J., Mathematical Reflections: In a Room with Many Mirrors, Springer-Verlag, New York 1998, 351p.
2. Hilton P., Holton D., Pedersen J., Mathematical Vistas: From a Room with Many Windows, Springer-Verlag, New York 2002, 358p.
3. Hilton P., Pedersen J., Walser H., The faces of the tri-hexaflexagon, Mathematics Magazine vol. 70, October 1997, p.243-251
4. Polster B., Variations on a Theme in Paper Folding, American Mathematical Monthly nr. 111, January 2004, p.39-47
5. Pook L., Flexagons Inside Out, Cambridge University Press 2003, 182p.
6. Tekulve A., Understanding Polygons and Polyhedrons Using Flexagons, The Montana Mathematics Enthusiast, vol. 1, nr. 1, 2004, p. 20-28.

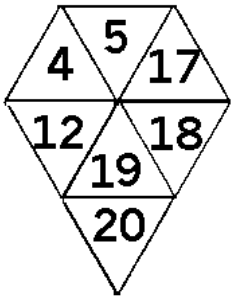
# Vouwprocedure flexagon

1. Neem een strip van 10 aaneenhangende gelijkzijdige driehoekjes. Nummer de driehoekjes zoals aangegeven op onderstaande figuur. Let wel op de oriëntatie: zorg dat driehoek 1 de punt naar beneden heeft. Op de achterzijde van driehoek 1, heb je driehoek 11, enz...

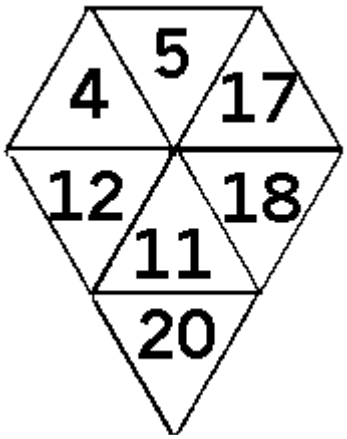


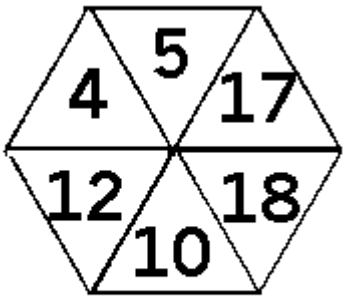

2. Zorg ervoor dat alle vouwlijnen langs beide zijden zijn gevouwen, zodat ze heel flexibel zijn.
3. Begin met driehoekjes 1-10 zoals op de bovenste figuur, driehoek 1 naar beneden gericht. Vouw dan driehoeken 1-3 onder de driehoeken 4-10 zoals op linkse figuur.



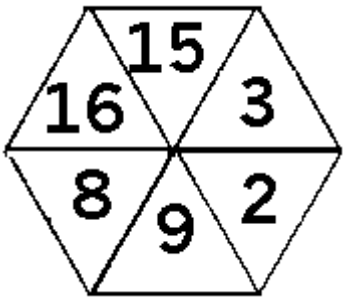

4. Vouw nu driehoeken 7-10 bovenop driehoek 6 zoals op bovenstaande rechtse figuur.
5. Opgelet!! Plaats nu driehoek 11 <u>bovenop</u> driehoek 19, zoals op onderstaande tekening links.
   Vouw dan driehoekje 20 zodat hij bovenop driehoek 11 komt te liggen zoals op de rechtse figuur.



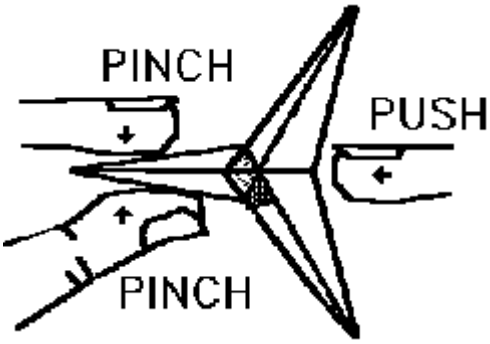




6. Plak nu driehoekjes 11 en 20 op elkaar met lijm. Je kan dit ook met plakband doen.

7. Controleer even of de achterkant van je flexagon er uitziet zoals op onderstaande figuur.




8. Hoe kan je nu ‘flexen’? Kies twee driehoekjes naast elkaar en nijp die samen (“pinch” op de tekening). Duw nu in het midden van de andere 4 driehoekjes (“push” op de tekening) zodat die een soort ‘windmolen’ vormen.
   Als je in begin twee goede driehoekjes hebt gekozen, dan zal je zien dat het midden zich een beetje opent. Als je deze opent, dan komen de verborgen driehoeken naar buiten. (Als je flexagon niet opent in het midden, dan probeer je nog eens met twee andere driehoekjes van in het begin).




9. Problemen bij het ‘flexen’ omdat je niet nauwkeurig hebt gevouwen? Het kan dat je flexagon in het begin wat tegenwringt. De gemakkelijkste manier is om een heel klein stukje van de hoekjes er af te snijden zoals op onderstaande figuur. Dan krijg je iets meer ruimte.

10. *Eventueel kan je er een gezichtje op tekenen. Doe dit best wel eerst in potlood. Begrijp jij waarom sommige mannetjes droevig zijn en na het flexen kunnen lachen?*
    *Je kan nu nog gekleurd papier gebruiken om op je flexagon te plakken. Het eenvoudigste is om een aantal driehoekjes uit te knippen die net kleiner zijn dan de driehoekjes van je flexagon. Dan kan je die er later gemakkelijk opplakken.*

# Afsluitende opmerkingen

- Bovenstaande twee bladzijden met vouwprocedure is pas van toepassing wanneer je effectief een strook met gelijkzijdige driehoeken hebt.
- Het eenvoudigste om dit te verwezenlijken is om te beginnen met een willekeurige vouw en dan een 15tal keer afwisselend naar beneden en naar boven te vouwen (zie beginslides). Dan kunnen de leerlingen zien dat de driehoeken van willekeurig naar gelijkzijdig convergeren (en kan je zorgen dat ze dit ook kunnen verklaren). Zo leren ze via deze leuke dingen toch ook wiskundig redeneren.
- Als je dan de eerste vijf driehoeken laat wegknippen (dat zijn de minst gelijkzijdige), is de strook met de laatste 10 driehoeken een goede start om je flexagon te vouwen.
- Voor een flexagon met 6 kleuren, moet je starten met een strook van 19 gelijkzijdige driehoeken. Dat kan analoog als hierboven. Hoe je dan moet vouwen vind je zeker op het internet.
- Voor de geïnteresseerden in flexagons met vierkanten, is http://www.mathematische-basteleien.de/tetraflexagons.htm een webpagina met duidelijke instructies.

Veel vouwplezier !