Determinisme, chaos en toeval

Henk Broer

Johann Bernoulli Instituut voor Wiskunde en Informatica
Rijksuniversiteit Groningen

Synopsis

i. Stabiliteit van het zonnestelsel

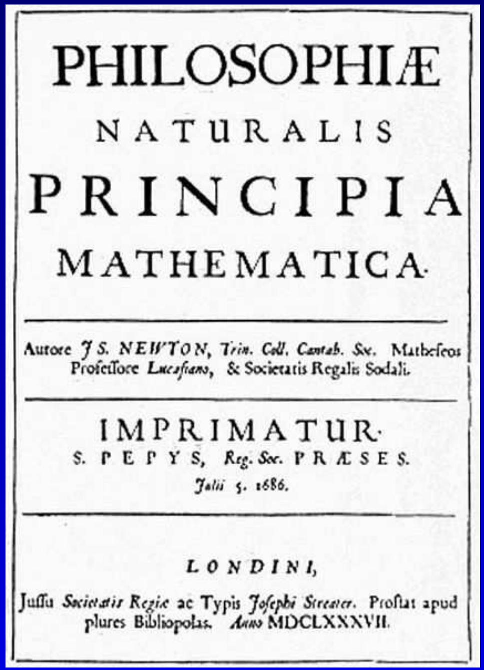
ii. Chaos en toeval in de klassieke mechanica

iii. . . .

Email: `h.w.broer@rug.nl`
URL: `http://www.math.rug.nl/~broer`

Helden

- Kepler en Galileo
- Newton en Laplace
- Poincaré en Kolmogorov



PHILOSOPHIÆ

NATURALIS

PRINCIPIA

MATHEMATICA.

Autore *J. S. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheſeos Profeſſore *Lucaſiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.

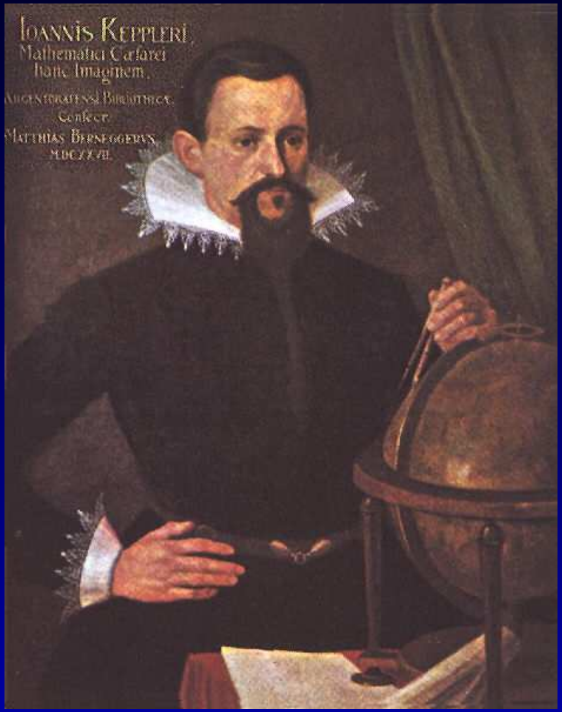
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.

Julii 5. 1686.

LONDINI,

Juſſu *Societatis Regiæ* ac Typis *Joſephi Streater*. Proſtat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

Kepler en Galileo

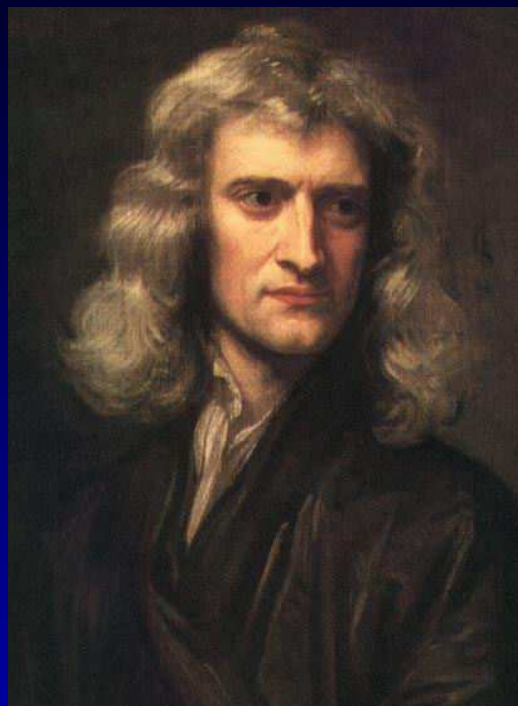


Iohannes Kepler
(1571-1530)

Galileo Galilei
(1564-1642)

Waarnemen en denken

Newton en Laplace

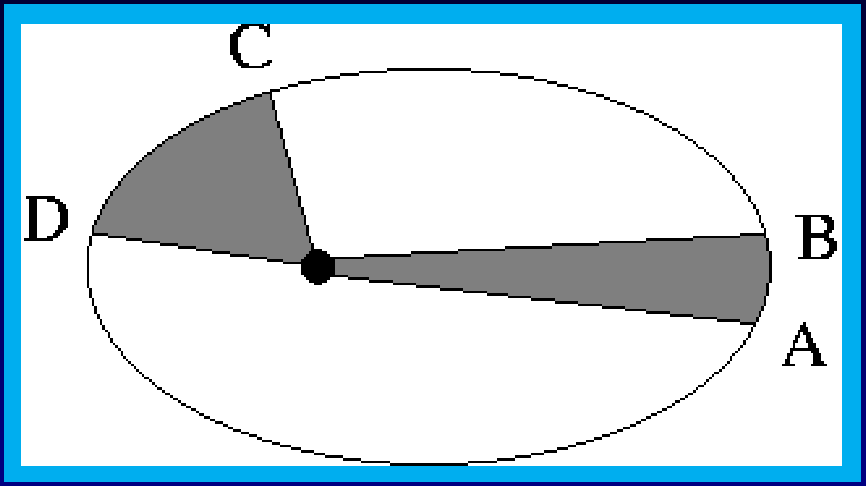


Sir Isaac Newton
(1642-1727)

Pierre-Simon Laplace
(1749-1827)

Als het zonnestelsel deterministisch is,
is het dan wel stabiel voor oneindige tijd?

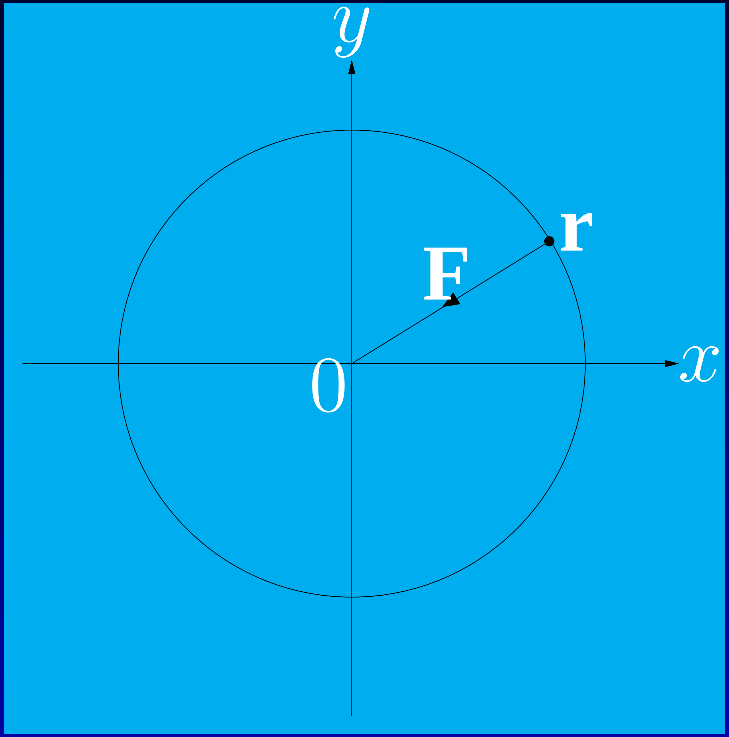
Kepler I & II



Kepler I: Elliptische baan met zon in een brandpunt

Kepler II: Perkenwet

Eénparige cirkelbeweging

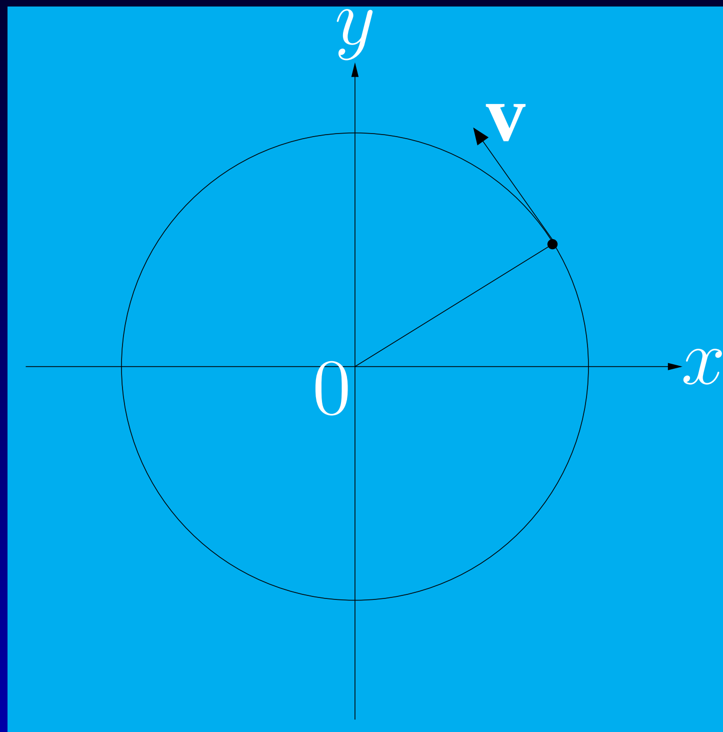


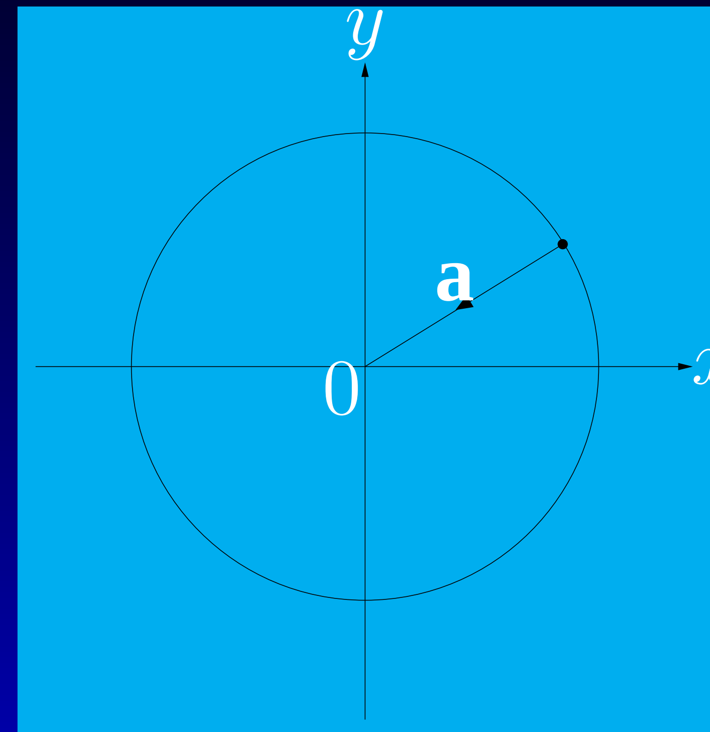
Cirkelbaan in centraal krachtveld $\mathbf{F} = -\frac{km}{r^2}\ \mathbf{e}_r$

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{T} t \\ \sin \frac{2\pi}{T} t \end{pmatrix}$$

Probleem: wat is verband tussen R en T?

Middelpuntzoekende versnelling





Snelheid en versnelling

Kepler III uit Newton's wetten

Middelpuntzoekende versnelling

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(t) &= \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix} = -R\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{T}t \\ \sin\frac{2\pi}{T}t \end{pmatrix} \\ &= -R\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathbf{e}_r\end{aligned}$$

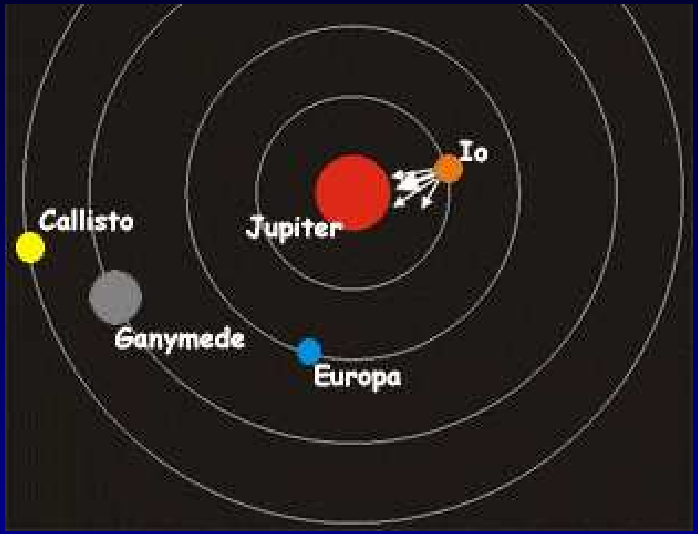
Combinatie van Newton's wetten

$$m\,\mathbf{a} = \mathbf{F} = -\frac{km}{r^2}\,\mathbf{e}_r$$

leidt tot

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k}R^3 \text{ (Kepler III)}$$

Galileïsche manen van Jupiter



Revoluties in ongeveer

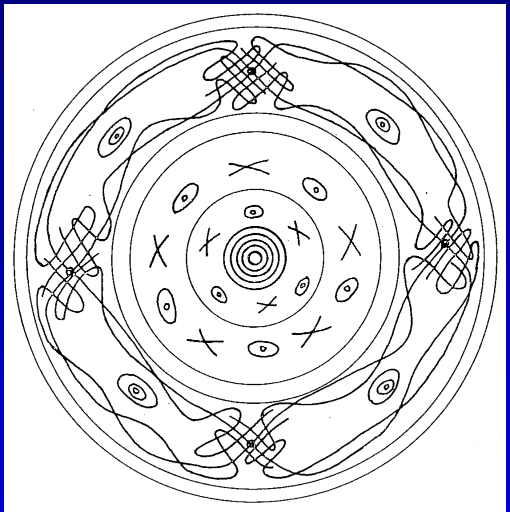
Io: 2 dagen, Europa: 4 dagen,
Ganymedes: 1 week, Callisto: 2 weken

Geldt Kepler III ?
Check door Flamsteed: JA

R.S. Westfall, *Never at Rest*, Cambridge University Press 1981

Scholium: chaos?

- Universele gravitatie:
  $\rightsquigarrow$ niet langer die mooie ellipsen !
  maar storingsrekening . . .
- Poincaré en het drie-lichamen probleem:
  homocliene 'tangle'



Henri Poincaré (1854-1912) en diens 'tangle'

June Barrow-Green, *Poincaré and the Three Body Problem.* History of Mathematics, Volume **11**
American Mathematical Society / London Mathematical Society 1997

Hénon-Heiles 1964: een speelgoed-model

Gekoppelde oscillatoren

$$
\begin{aligned}
x'' &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\
y'' &= -\frac{\partial V}{\partial y}
\end{aligned}
$$

potentiele energie $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 2x^2y - \frac{2}{3}y^3)$

totale energie $E = \frac{1}{2}\left((x')^2 + (y')^2\right) + V(x, y)$: behouden grootheid

Noem $x' := u$ en $y' := v$

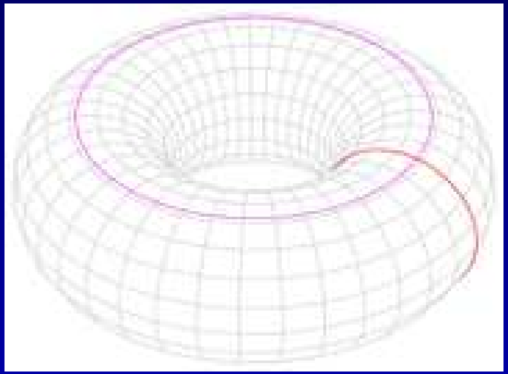
$\rightsquigarrow$ faseruimte $\mathbb{R}^4 = \{x, y, u, v\}$

De drie-sfeer $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$

Energie hyper-oppervlak

$x^2 + y^2 + u^2 + v^2 + 2x^2y - \frac{2}{3}y^3 = E \approx$ sfeer $\mathbb{S}^3$

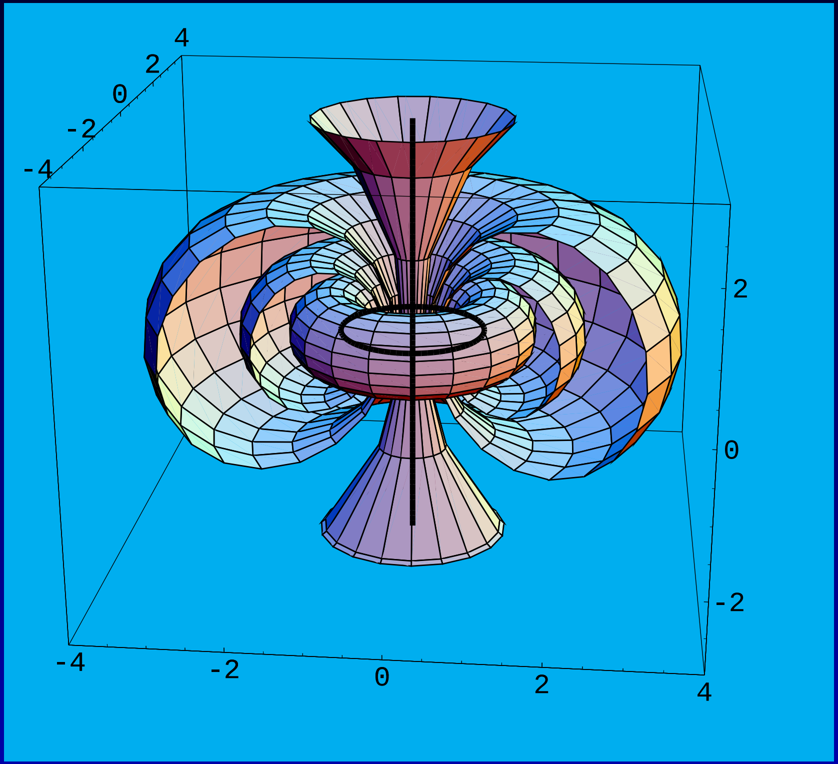
Meetkunde van $\mathbb{S}^3 \approx \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$



twee-dimensionale torus $\mathbb{T}^2$

$\mathbb{S}^3 \approx$ vereniging van twee opgevulde tori
geplakt langs gemeenschappelijke rand $\mathbb{T}^2 \ldots$

Drie-sfeer $\mathbb{S}^3$, vervolg

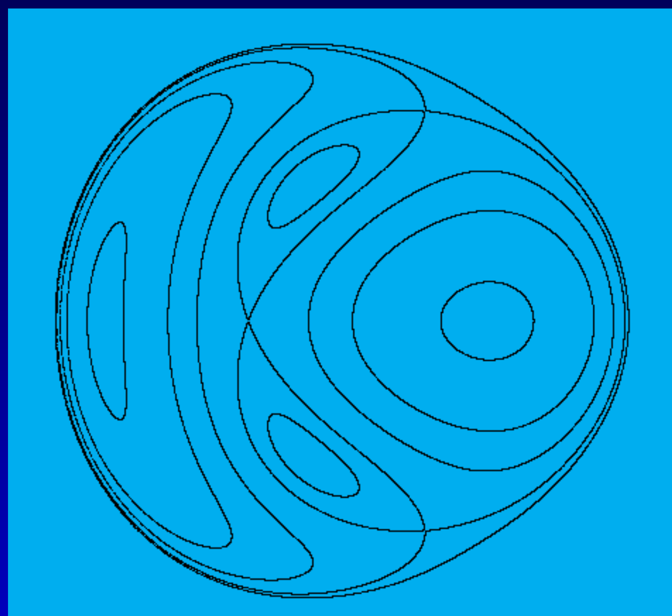


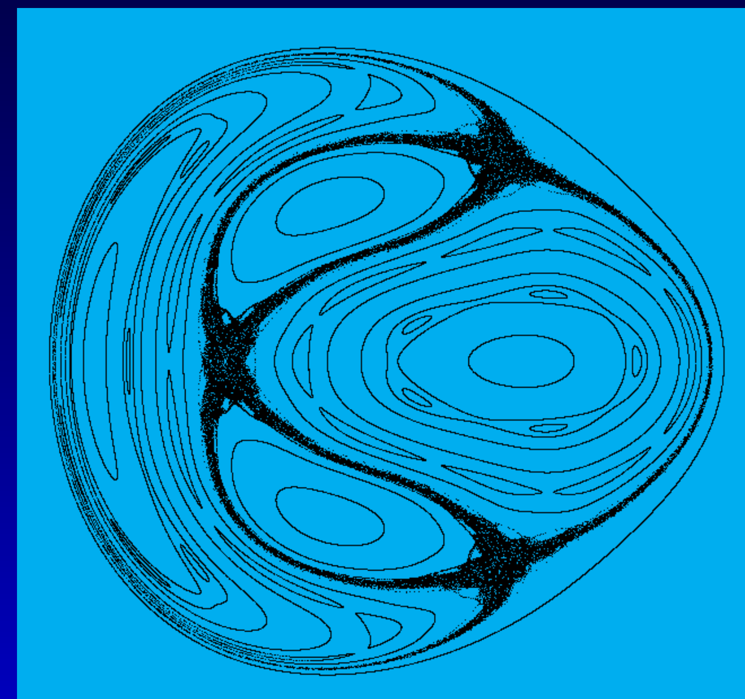
Seiffert foliatie van $\mathbb{S}^3$

Neem een Poincaré sectie *'dwars'* zulke 2–tori . . .

Hénon-Heiles II

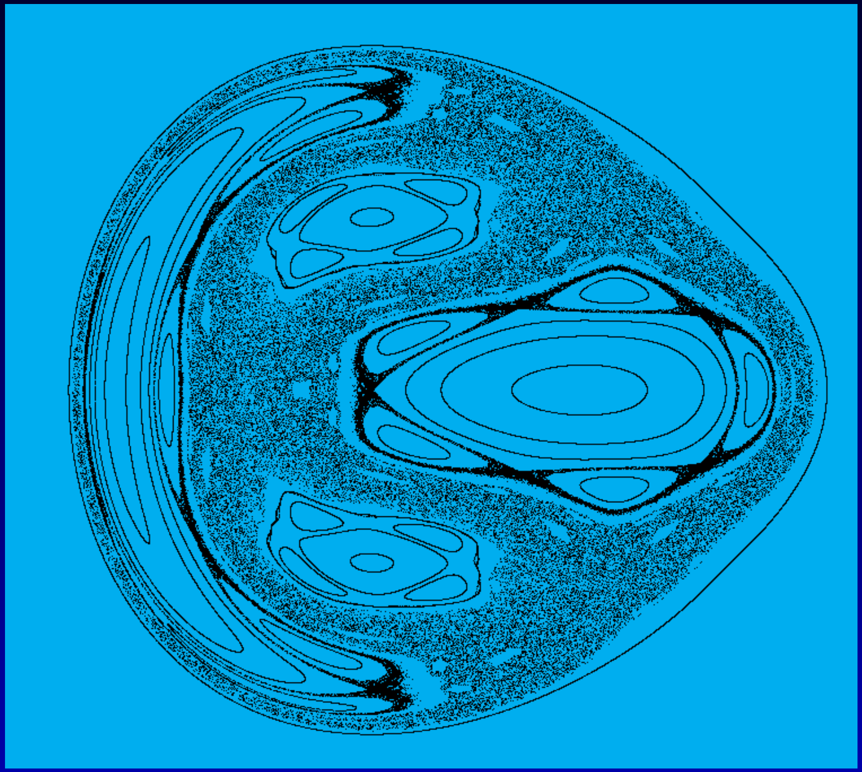
⇝ kwalitatief beeld van de dynamica





Energie $E = 0.005$ (links) en $E = 0.010$ (rechts)
hoofdzakelijk (multi-) periodiek ≡ stabiel

Hénon-Heiles III

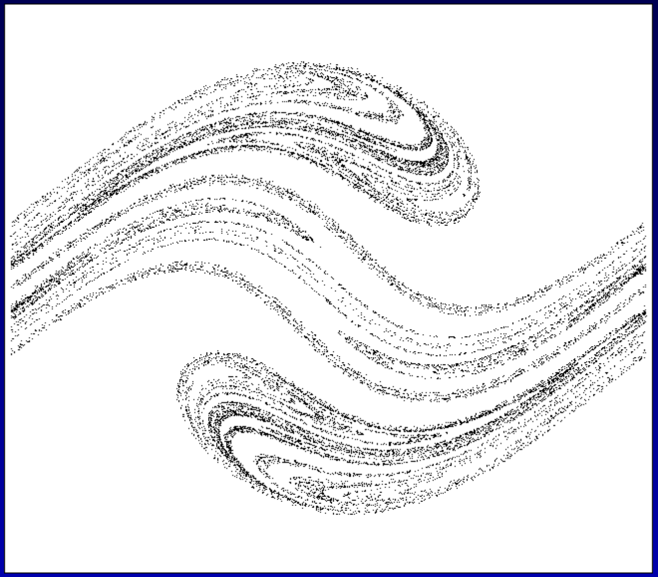


$E = 0.012$

nu ook veel chaos . . .

The swing

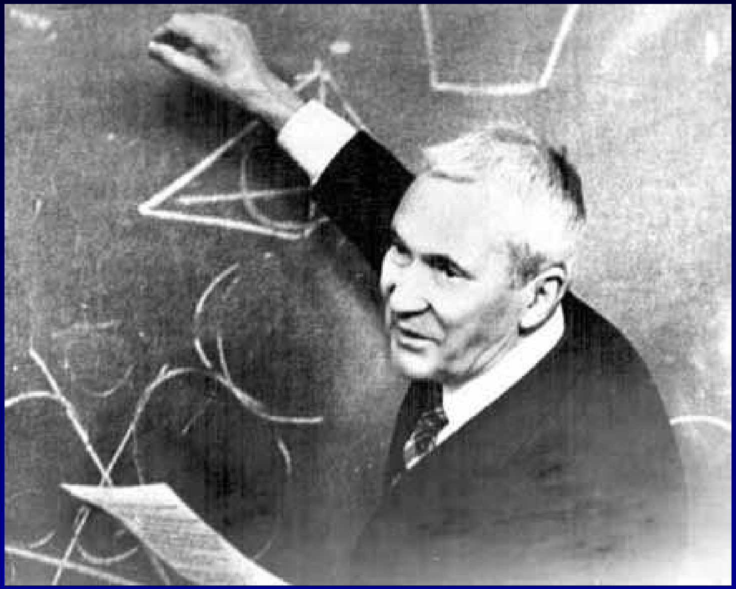
Stroboscopische beelden van de schommel



Zonder (links) en mèt wrijving (rechts)

. . . rechts een Hénon-achtige strange attractor

Invariante maten, ergodiciteit



Andrei N. Kolmogorov
(1903-1987)

Yakov G. Sinai
(1935-)

- Poincaré recurrentie
- waarschijnlijkheid, maat, ergodiciteit
- ook voor dissipative systemen

Verder . . .

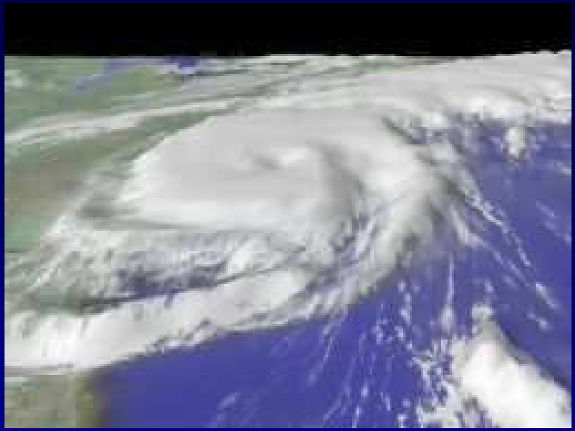
- Open problemen in de wiskunde:
  - Zijn de (fysische) maten ergodisch?
  - Relatie met de meetkunde van de onstabiele variëteit en homokliene ‘tangle’ ?
- Jacques Laskar (Observatoire de Paris): (binnenste) zonnestelsel chaotisch, merkbaar in ongeveer 100 000 000 jaar

J. Laskar and M. Gastineau, Existence of collisional trajectories of Mercury, Mars and Venus with the Earth. *Nature Letters* **459**|11 June 2009|**doi:10.1038/nature08096**

V.I. Arnold and A. Avez, *Probèmes Ergodiques de la Mécanique classique*, Gauthier-Villars, 1967; *Ergodic problems of classical mechanics*, Benjamin 1968

J. Palis and F. Takens, *Hyperbolicity & Sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **35**, Cambridge University Press 1993

Edward Lorenz (1917-2008)



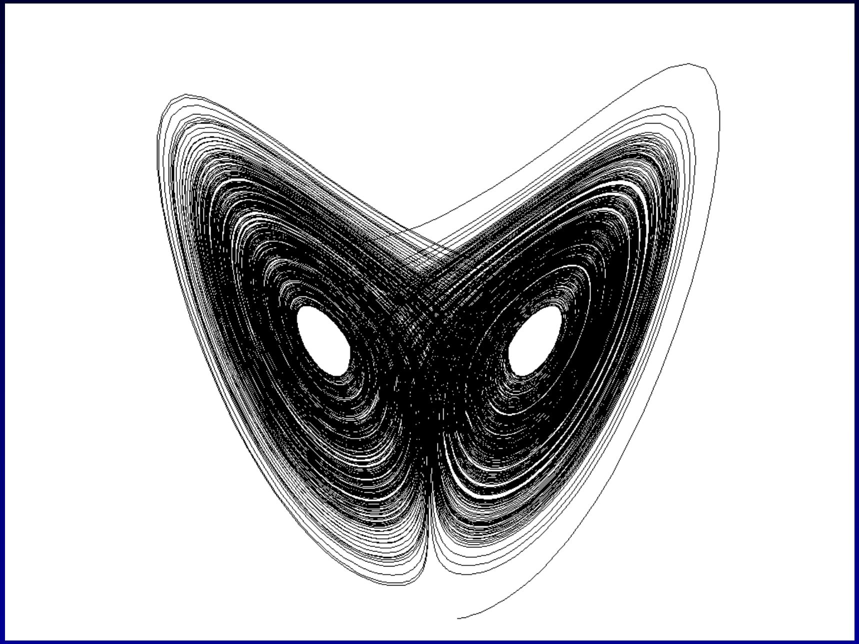
Edward Norton Lorenz (1917-2008)

Ontwakende chaos

E.N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmosph. Sci.* **20** (1963), 130-141

H.W. Broer and F. Takens, *Dynamical Systems and Chaos*. Applied Mathematical Sciences **172**, Springer, 2011

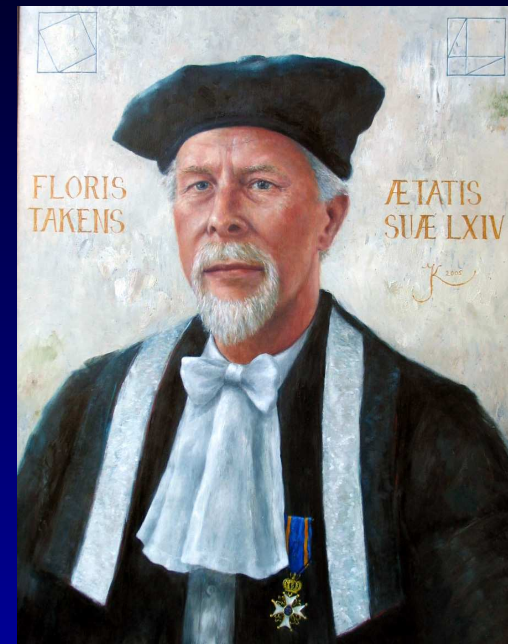
Lorenz attractor 1963



$$
\begin{aligned}
x' &= \sigma y - \sigma x \\
y' &= rx - y - xz \\
z' &= -bz + xy,
\end{aligned}
$$

met $\sigma = 10$, $b = 8/3$ en $r = 28$

On the nature of turbulence



David Ruelle (1935-)

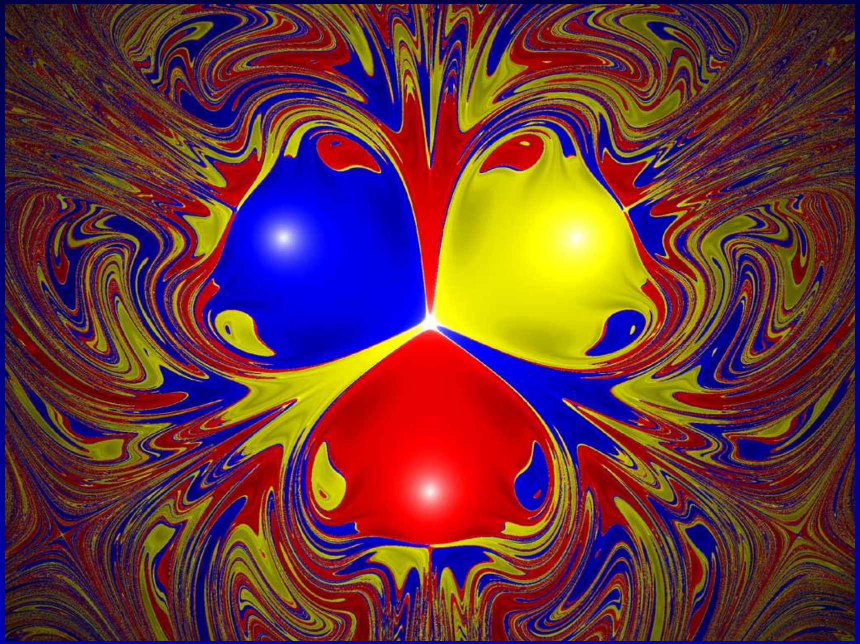
Floris Takens (1940-2010)

‘Onset’ turbulentie: multiperiodiek of chaotisch?

Memento Heisenberg en Lamb . . .

Scholium: chaos versus kans

- Slinger boven magneten / vergelijk dobbelsteen



- Boltzmann, Gibbs: Statistische fysica
- Het leven zelf
- Quantum fysica