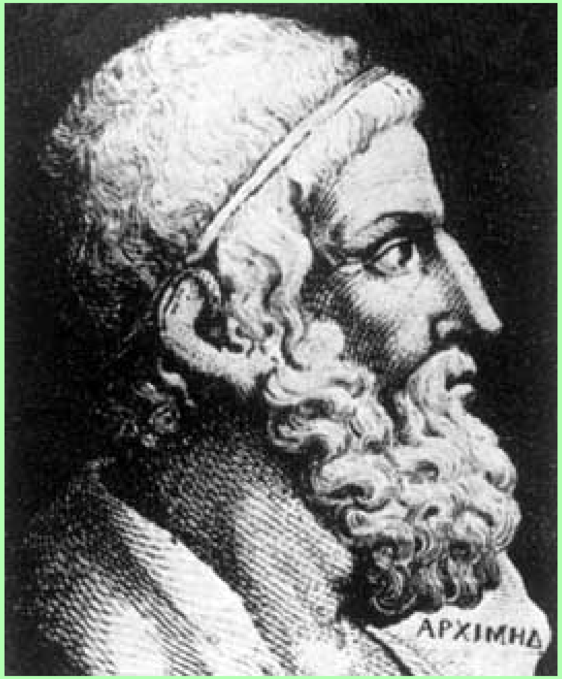
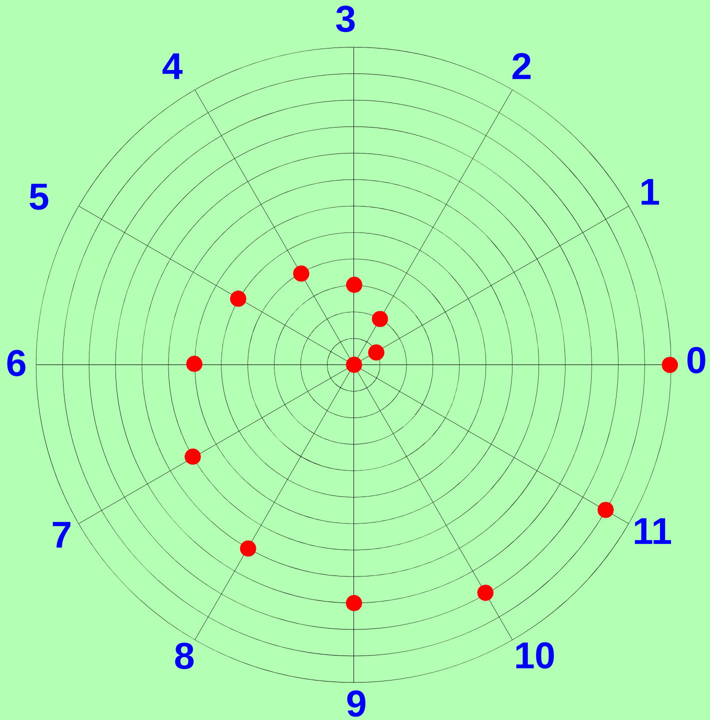
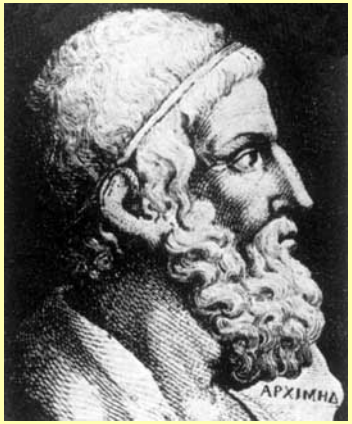
Calculus is mensenwerk



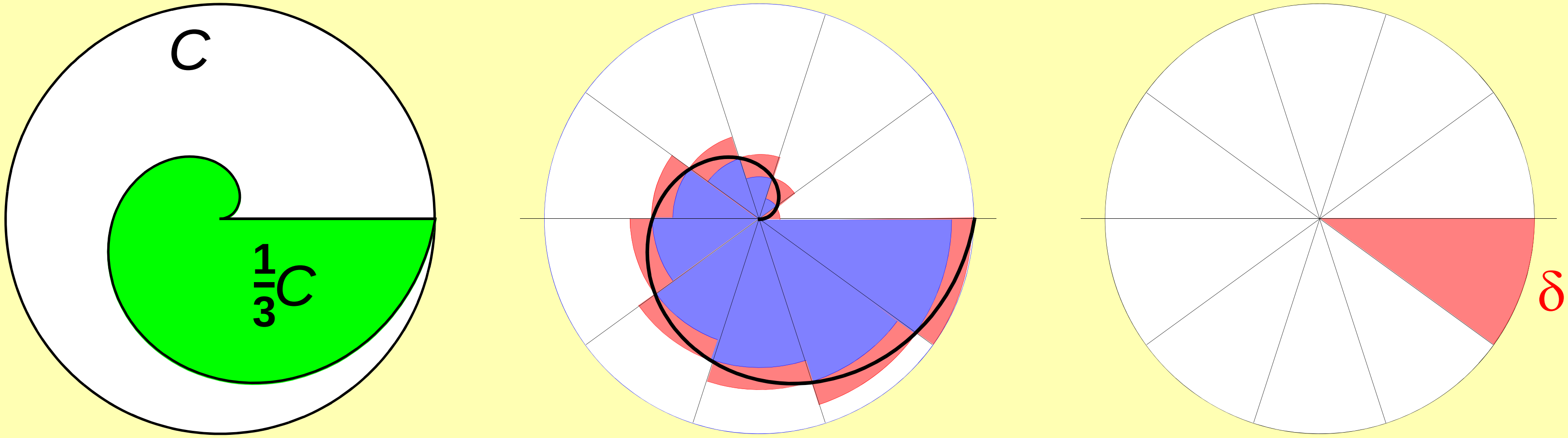


Nationale Wiskunde Dagen 2012



$$\frac{0^2+1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}C < \frac{1}{3}C < \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}C$$

$$\delta = \frac{C}{n}$$



'Telescoop'

$$3 \cdot 0^2 < 1^3 - 0^3 < 3 \cdot 1^2$$

$$3 \cdot 1^2 < 2^3 - 1^3 < 3 \cdot 2^2$$

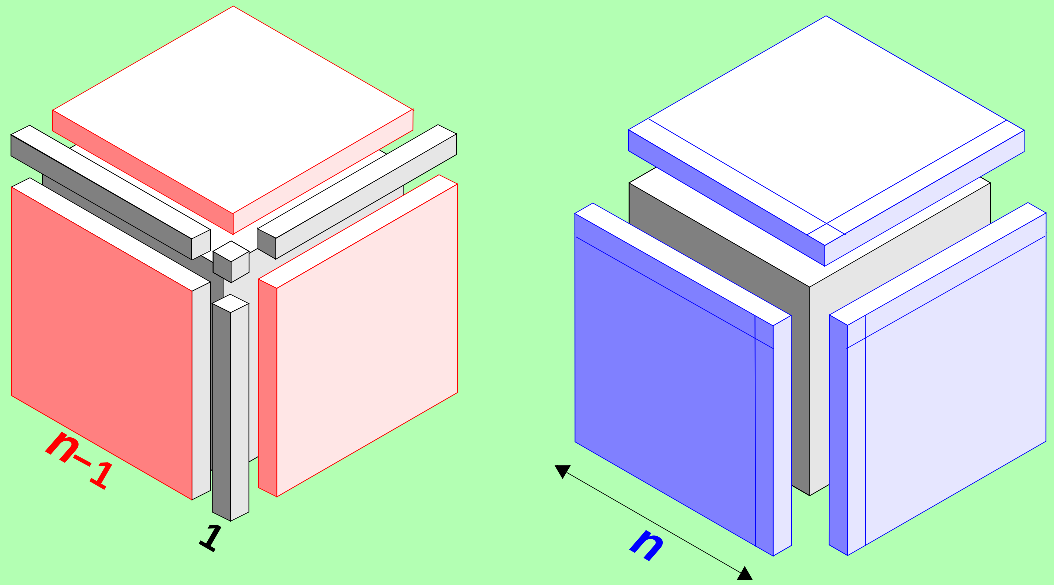
$$3 \cdot 2^2 < 3^3 - 2^3 < 3 \cdot 3^2$$

....

$$3(n-1)^2 < n^3 - (n-1)^3 < 3n^2$$

$+$ ———————————————————————

$$3(1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2) < n^3 < 3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)$$



$$3(n-1)^2 < n^3 - (n-1)^3 < 3n^2$$

$$\frac{b^3 - a^3}{b - a} = a^2 + ab + b^2$$

$$0 \le a < b \longrightarrow 3a^2 < \frac{b^3 - a^3}{b - a} < 3b^2$$

$n - 1$ $\qquad$ n

generalisatie

$$0 \le a < b \longrightarrow (k+1)a^k < \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{b - a} < (k+1)b^k$$

$k = 1, 2, 3, \ldots$

Alle diese Gegenstände der Infinitesimalrechnung, die heute als kanonisierte Requisiten gelehrt werden,

der Mittelwertsatz, die Taylorsche Reihe, der Konvergenzbegriff,
das bestimmte Integral, vor allem der Differentialquotient selbst,

und bei denen nirgends die Frage berührt wird:

warum so? wie kommt man zu ihnen? ,

alle diese Requisiten also müssen doch einmal Objekte eines spannenden Suchens, einer aufregenden Handlung gewesen sein, nämlich als sie geschaffen wurden.

Wenn man an diese Wurzeln der Begriffe zurückginge, würde der Staub der Zeiten, die Schrammen langer Abnutzung von ihnen abfallen, und sie würden wieder als lebensvolle Wesen vor uns erstehen.

Otto Toeplitz (1926)

Bruno Cavalieri (1598-1647)

Geometria indivisibilibus continuorum ... (1635)

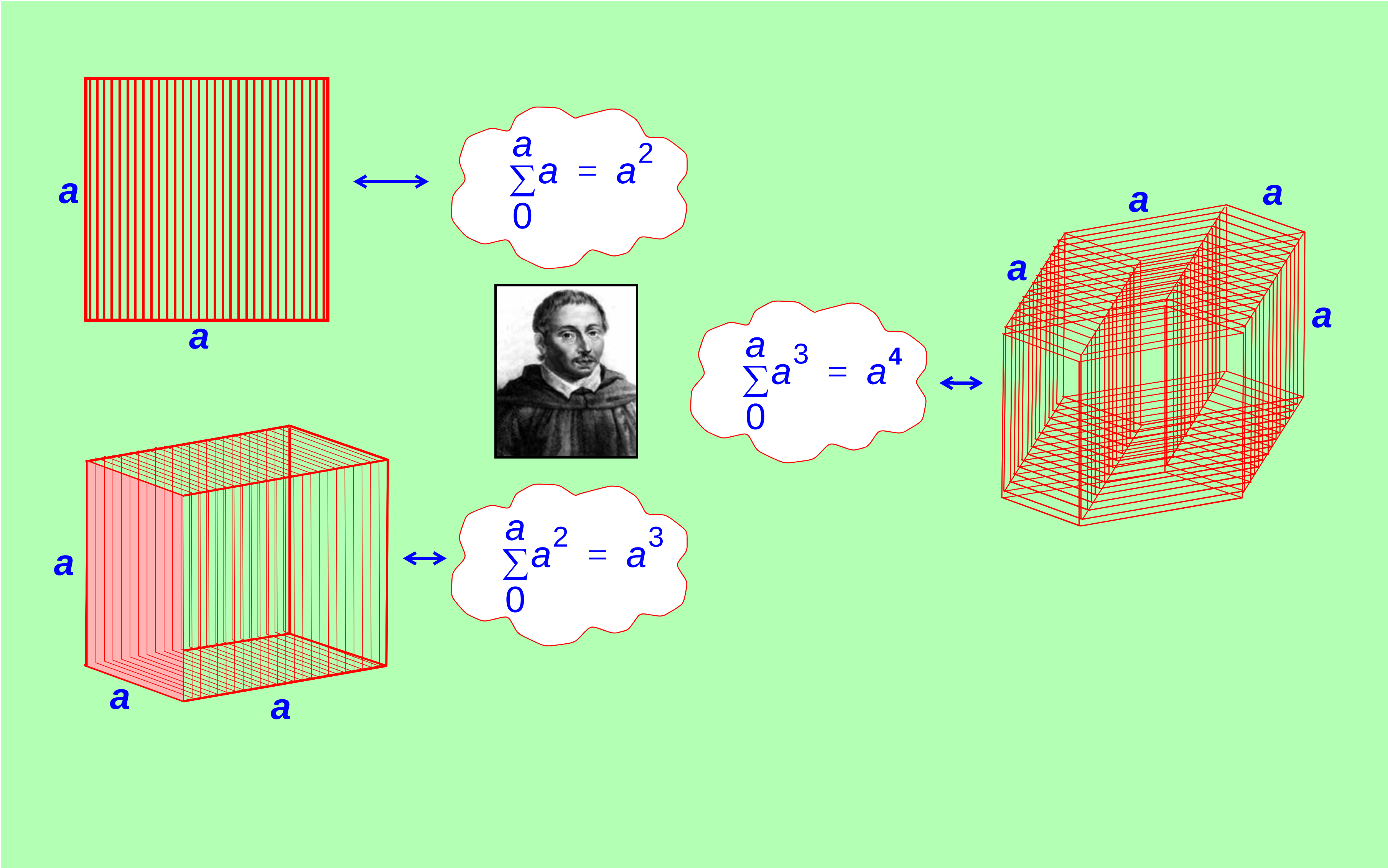
meetkundige figuur = *oneindige verzameling ondeelbaren*

* een oppervlak is verzameling parallelle lijnsegmenten

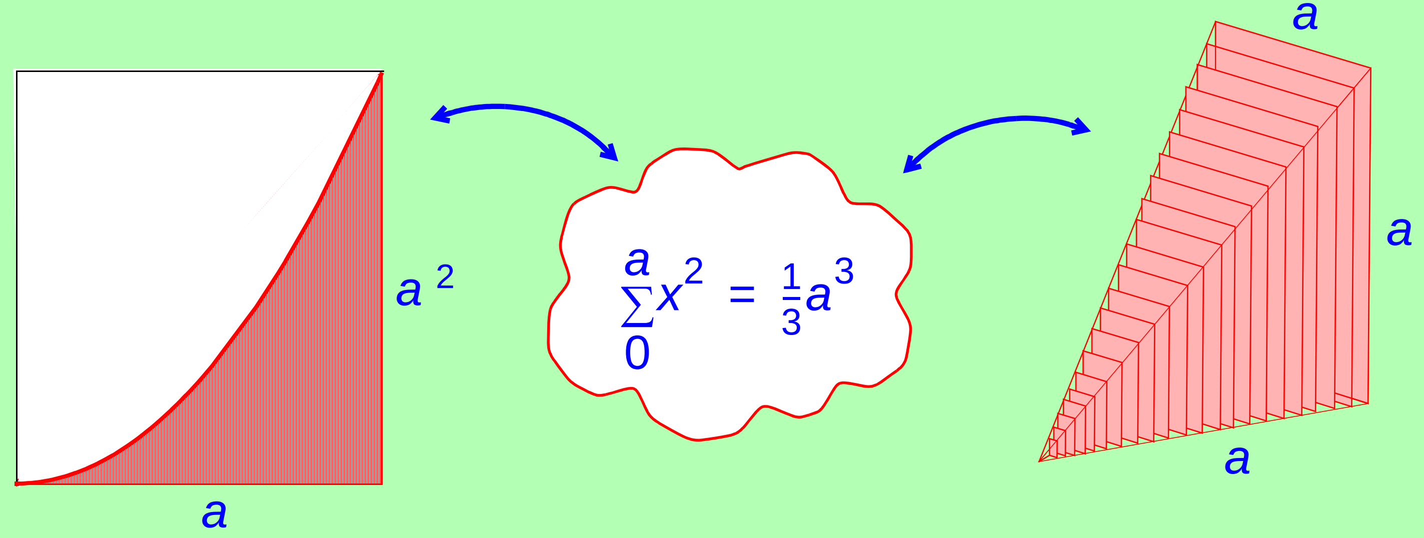
(*als de draden van een stof*)

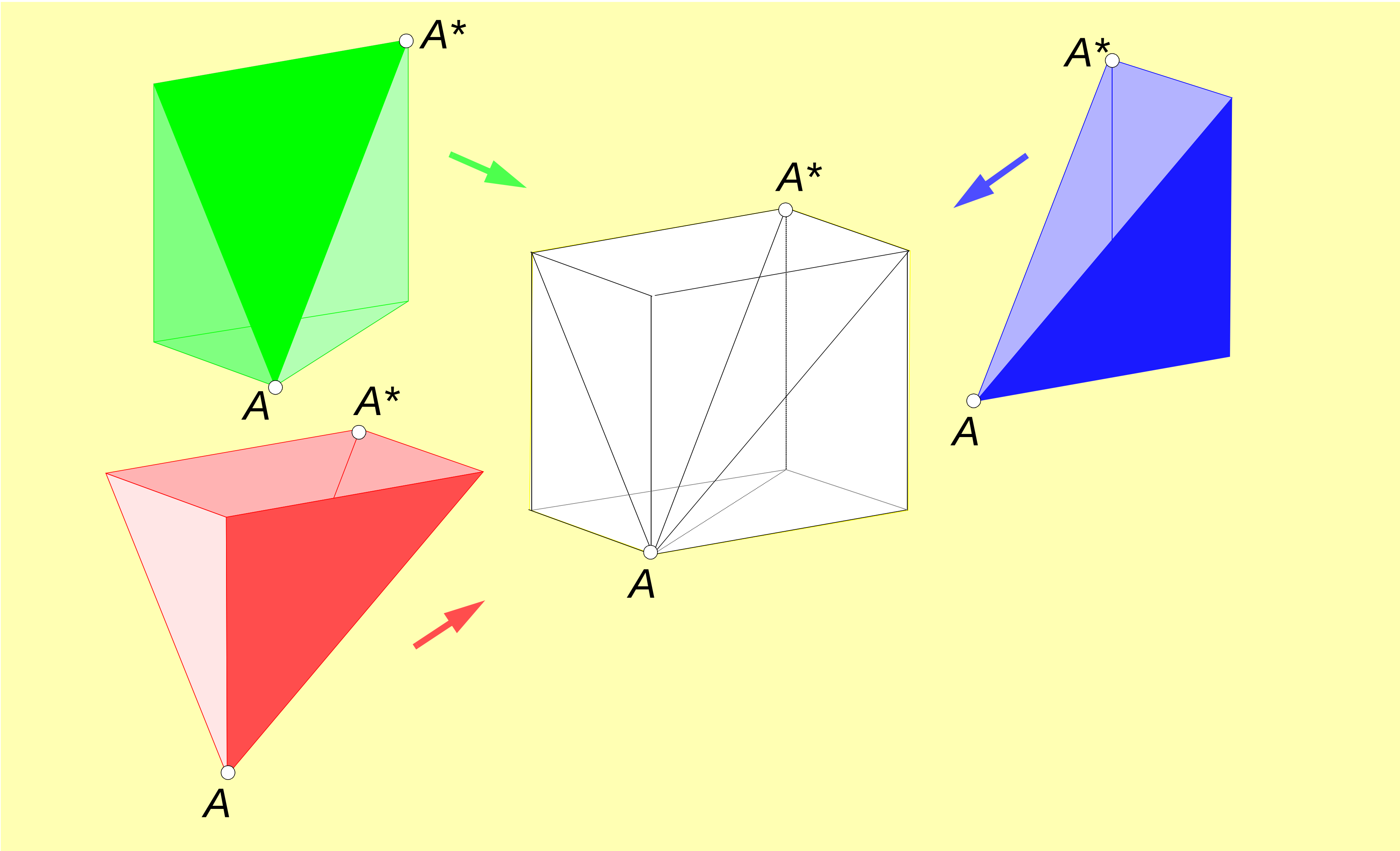
* een lichaam is verzameling parallelle vlakken

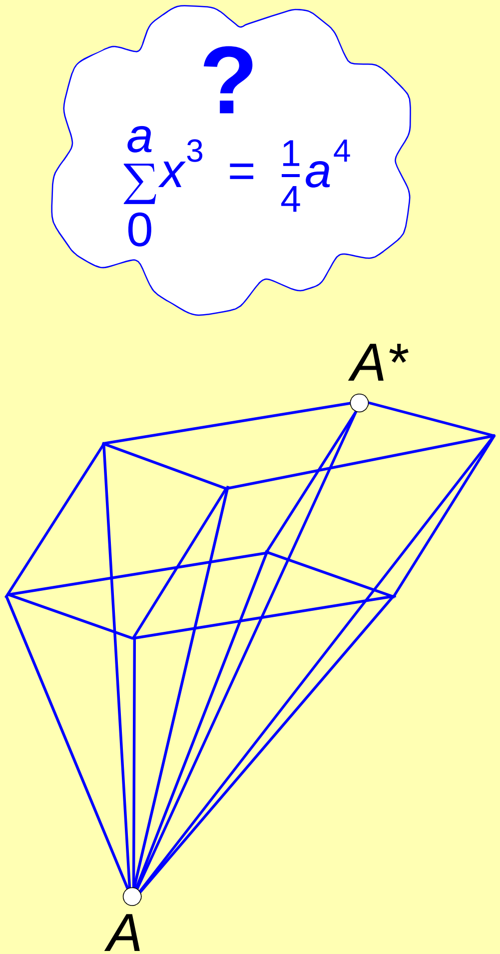
(*als de pagina's van een boek*)

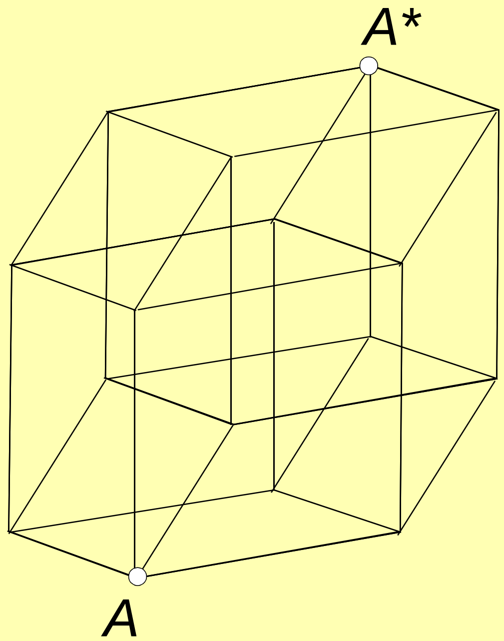


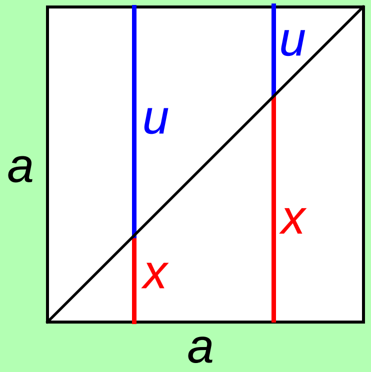
a
a
$\sum_{0}^{a} a = a^{2}$
$\sum_{0}^{a} a^{2} = a^{3}$
$\sum_{0}^{a} a^{3} = a^{4}$
a
a
a
a
a
a
a

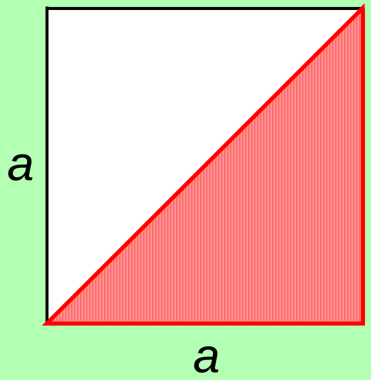

a
a 2
$\sum_0^a x^2 = \frac{1}{3}a^3$
a
a
a


A*
A
A*
A
A*
A
A*
A


?
$\sum_0^a x^3 = \frac{1}{4}a^4$
A*
A


A*
A



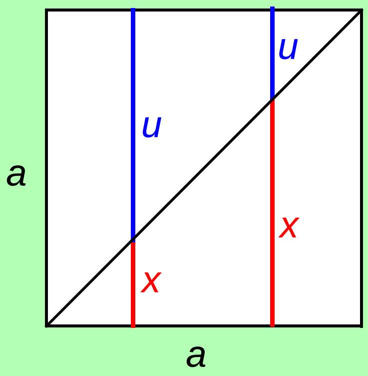


Methode Cavalieri

$$a^2 = \sum_0^a a = \sum_0^a (x + u) = \sum_0^a x + \sum_0^a u = 2 \cdot \sum_0^a x$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_0^a x = \frac{1}{2} a^2$$



$$a^4 = \sum_0^a (x+u)^3 = \sum_0^a x^3 + 3\sum_0^a x^2 u + 3\sum_0^a x u^2 + \sum_0^a u^3$$

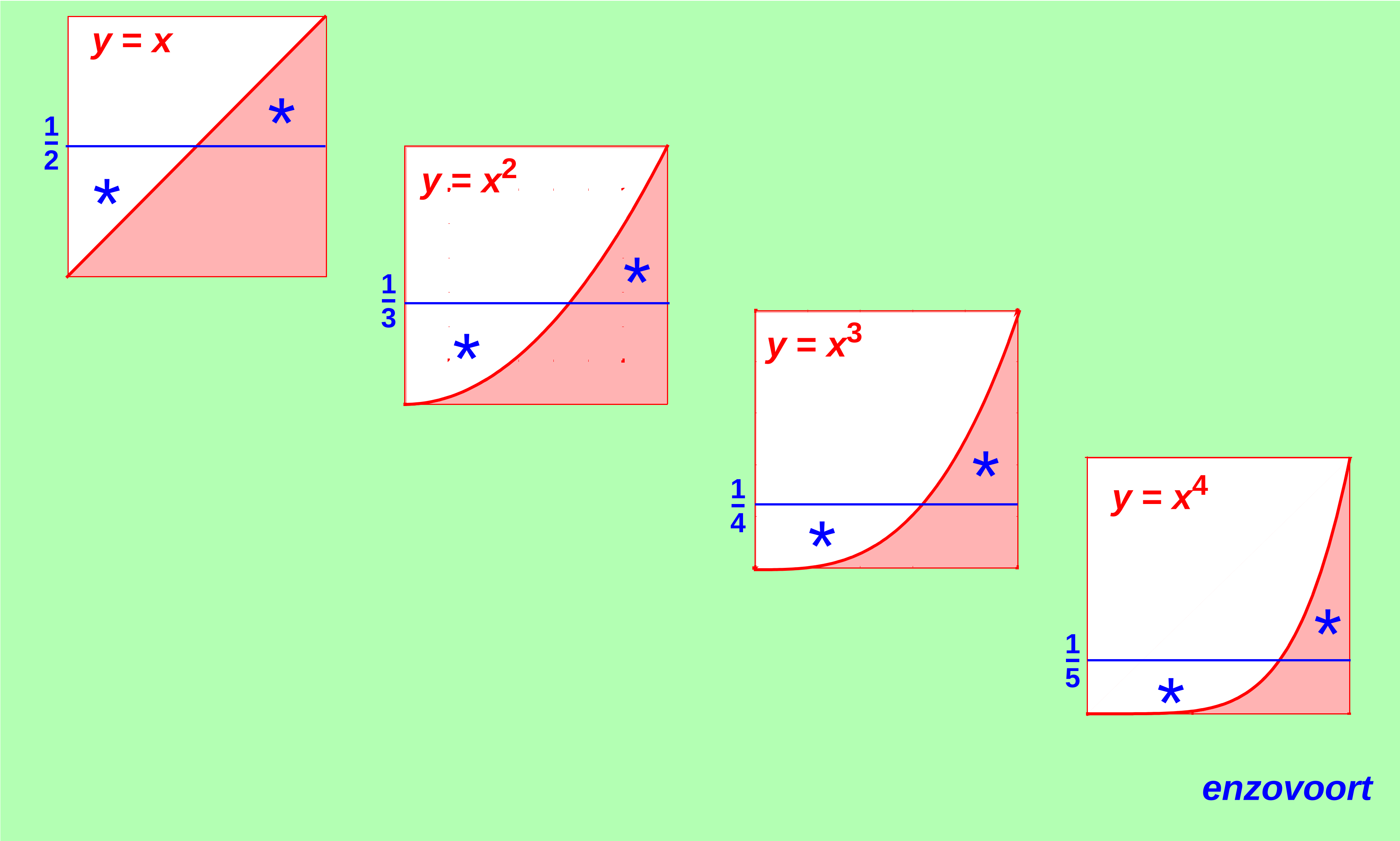
$$2\sum_0^a x^3 + 6\sum_0^a x^2(a-x) = a^4$$

$$-4\sum_0^a x^3 + 6a\sum_0^a x^2 = a^4$$

$$\sum_0^a x^2 = \frac{1}{3}a^3$$

$$-4\sum_0^a x^3 + 2a^4 = a^4$$

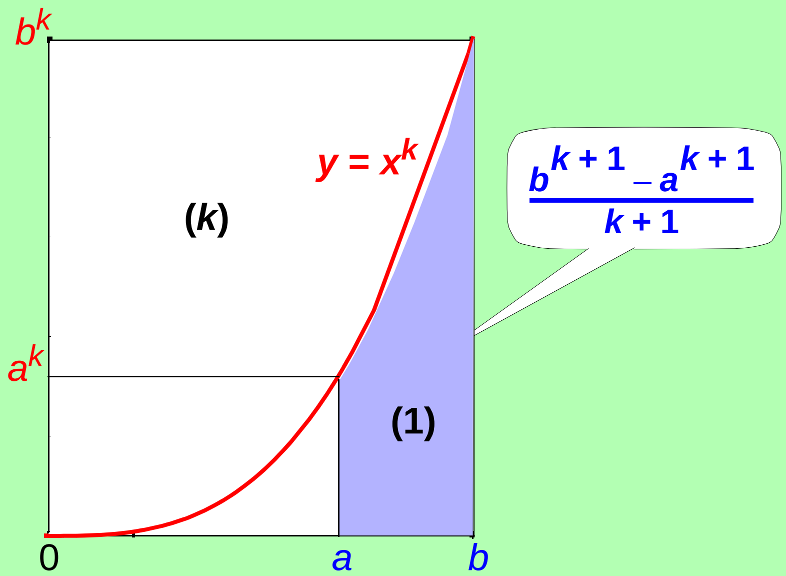
$$\boxed{\sum_0^a x^3 = \frac{1}{4}a^4}$$



y = x
1/2
*
*
y = x^2
1/3
*
*
y = x^3
1/4
*
*
y = x^4
1/5
*
*
enzovoort

Gegeneraliseerde ‘ongelijkheid van Archimedes’

$$1^k + 2^k + \ldots + (n-1)^k < \frac{n^{k+1}}{k+1} < 1^k + 2^k + \ldots + n^k$$



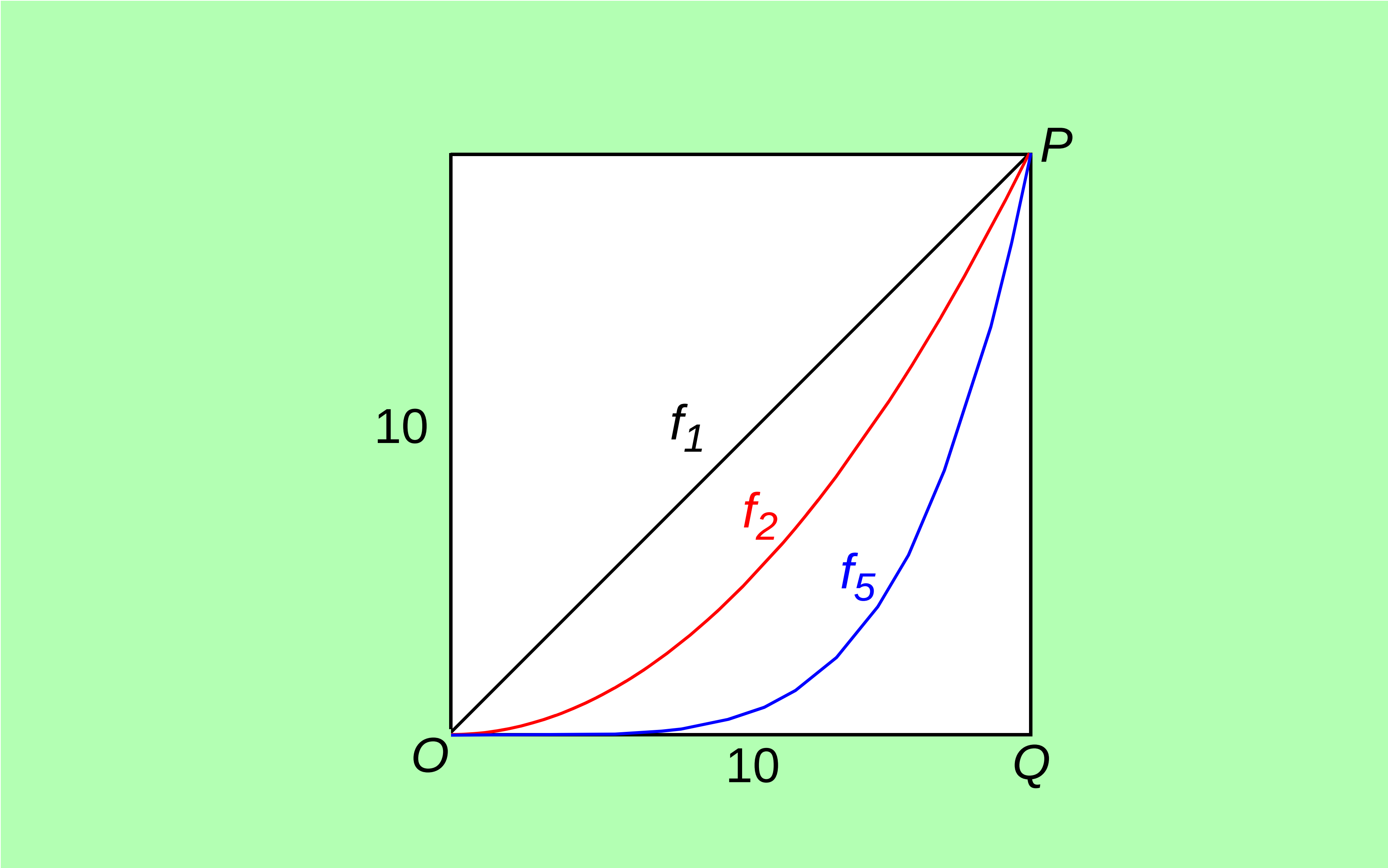
Uit: EINDEXAMEN der HOGEREBURGERSCHOLEN B (7 mei 1963)

3. Van de rij functies van x

$f_1, f_2, f_3, ..., f_k, ...$ is $f_k = 10^{1-k} \cdot x^k$.

a. Bewijs dat de grafieken van deze functies behalve door het punt O (0,0) nog door een tweede vast punt P gaan.
Teken in één figuur de grafieken van f_1, f_2 en f_3

b. Q is de projectie van P op de X-as.
Onderzoek of de rij twee functies bevat waarvan de grafieken de driehoek OPQ in drie delen verdelen met gelijke oppervlakte.


P
10
f1
f2
f5
O
10
Q

Geschiedenis van de Calculus in het Voortgezet Onderwijs

1900 ‘10 ‘20 ‘30 ‘40 ‘50 ‘60 ‘70 ‘80 ‘90 2000 2010

School-soort	*vhmo* : HBS , Gymnasium				Havo , Vwo		
Curriculum	*pleidooi Vaes/Cikot*	leerplan Gym *niet op CE*	leerplan HBS *niet op E*	ex.pr. H & G *op E*	CMLW Havo *Diff.r* Vwo *D & I*	*Hewet Hawex A & B*	*CTwo*

Uit: Ontwerp van een Leerplan voor het onderwijs in Wiskunde, Mechanica en Kosmographie op de H.B.Scholen met vijfjarigen cursus

Commissie Beth/Dijksterhuis (1925)

Want wat men gewoonlijk met een soort van schuw respect, dat alle onwetendheid als bij voorbaat moet verontschuldigen, hogere wiskunde noemt, heeft immers zijn wortels in die allerbekendste begrippen (snelheid, raaklijn) die het middelbaar onderwijs toch niet kan nalaten te gebruiken en er is immers het boven gewenste besluit nodig, om de dingen nu maar voortaan bij hun naam te noemen en, met die naam niet tevreden, iets dieper dan tot nu toe geschiedde, in het wezen door te dringen, om gedaan te krijgen, dat de beginselen dier geheimzinnige wetenschap evengoed algemeen geestelijk bezit worden als de grondslagen der Euclidische meetkunde (vroeger ook wel eens beschouwd als geestelijk voedsel voor slechts enkele uitverkorenen) het reeds sedert vele tientallen jaren zijn.

REACTIES (Euclides 1926/27)

Maar als het nu straks zal heten, dat onze leerlingen differentiaal- en integraalrekening (‘hogere wiskunde’) geleerd hebben, zal dat dan niet héél betrekkelijk zijn: een wat ál te groot woord voor al te weinig zaaks? Zou dat niet in hoge mate geschikt zijn om onze leerlingen over het paard te tillen en onze critici in het harnas te jagen?

(*F.Veen*)

Toch geloof ik met de commissie, dat het nieuwe leerplan staat of valt met de invoering der beginselen van de infinitesimaalrekening; zonder deze invoering wordt het onderwijs in de wiskunde geen geheel, maar blijft het voor het grootste deel der leerlingen een aanloop tot niets.

(W.J. Vollewens)

Discussie in Duitsland

Nach meiner Auffassung gehört heute die Infinitesimalrechnung als Ausgestaltung des Funktionsbegriff zur algemeinen mathematische Bildung, die man von jedem verlangen sollte.

(*Felix Klein*)

Wenn die Schule nicht imstande ist, aus der Infinitesimalrechnung mehr als den bloszen Kalkul herauszuholen, dan musz sie die Infinitesimalrechnung besser heute als morgen wieder beiseite stellen

(*Otto Toeplitz*)

In negentien drie zeven, dan zul je wat beleven ...

Na meer dan 10 jaar discussie: invoering **leerplan** Beth-Dijksterhuis,
Differentiaal- en integraalrekening in leerplan HBS B**!**

Inspecteur van Andel (voormalig lid van commissie Beth) op vergadering van Wimecos:

‘Het is historisch gegroeid, niet van boven opgelegd’

Maar ook:

Op het eindexamen zullen geen vraagstukken over infinitesimaalrekening voorkomen!

In het leerplan is niet nauwkeurig aangegeven hoe ver men met de beginselen der infinitesimaalrekening gaan wil. Zeker is dat men de techniek van het differentiëren en het integreren tot het uiterste moet beperken en hiervan niet meer geven dan het noodzakelijkste. Uit het feit dat men de beginselen dienstbaar wil maken aan het onderwijs in mechanica en natuurkunde, blijkt wel, dat het vóór alles de grondbegrippen zijn, die het eigendom van de leerling moeten worden. Met de beperking van het aantal te behandelen functies kan men mijns inziens heel ver gaan: men zou zich zelfs tot de gehele rationale functie, sin nx en cos nx kunnen bepalen; hiermee is reeds het voornaamste te bereiken.

H.J.E. Beth

Voortgang discussie:

op jaarvergaderingen 1939 en 1940 van Wimecos:

1939 *de Differentiaalrekening en het Limietbegrip op de middelbare school ............*J.C.H. Gerretsen

1940 *de Differentiaal- en Integraalrekening in het M.O.....* C.J.Alders

(...) het feit dat dat men een bepaalde functie kan differentiëren heeft voor een leerling van de middelbare school heel weinig betekenis, als hij daar verder niets mee kan doen. Ik acht het daarom noodzakelijk het voorgaande toe te passen op het zoeken naar de relatieve extrema van een functie.

Na de oorlog

H. Streefkerk in Euclides 1945/46

Ten tweede zijn de differentiaal- en integraalrekening toch werkelijk te zwaar. De techniek van het differentiëren gaat er gauw genoeg in, zelfs het bepalen van extremen wordt een ‘koud kunstje’, maar méér dan een kunstje is het dan ook niet. Van de theorie komt niets terecht. Bij zeer vele leerlingen is de gedachtengang deze: hij zal wel eens uitgepraat raken, en dan komen de sommen, net als bij limieten, en dan komt het best in orde! Hoe eer we van deze stof verlost worden, hoe beter. Het enige practische nut dat de differentiaalrekening op de HBS kan leveren, ligt in de toepassingen op de mechanica. Welnu, daar kan men, desgewenst, het differentiëren occasioneel behandelen, zonder dat op het wiskundeprogramma van de 4e klas het gewichtige onderwerp ‘differentiaalrekening’ prijkt.

Over de Didactiek van de Integraalrekening bij het vhmo

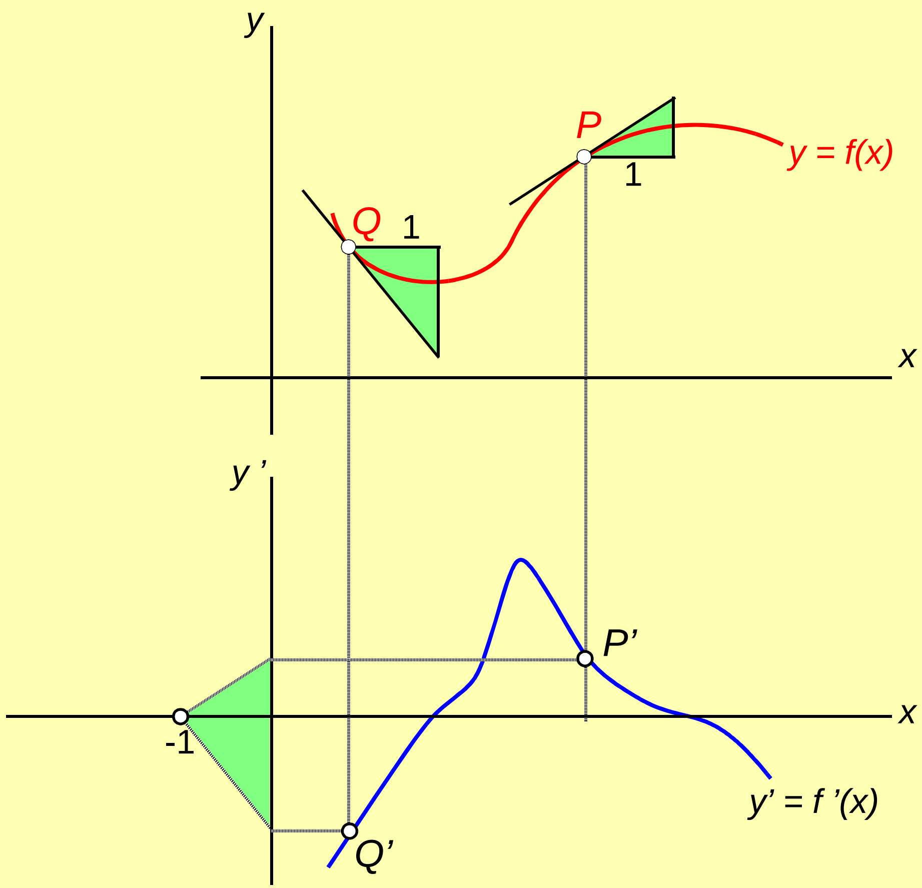
L.H.N. Bunt

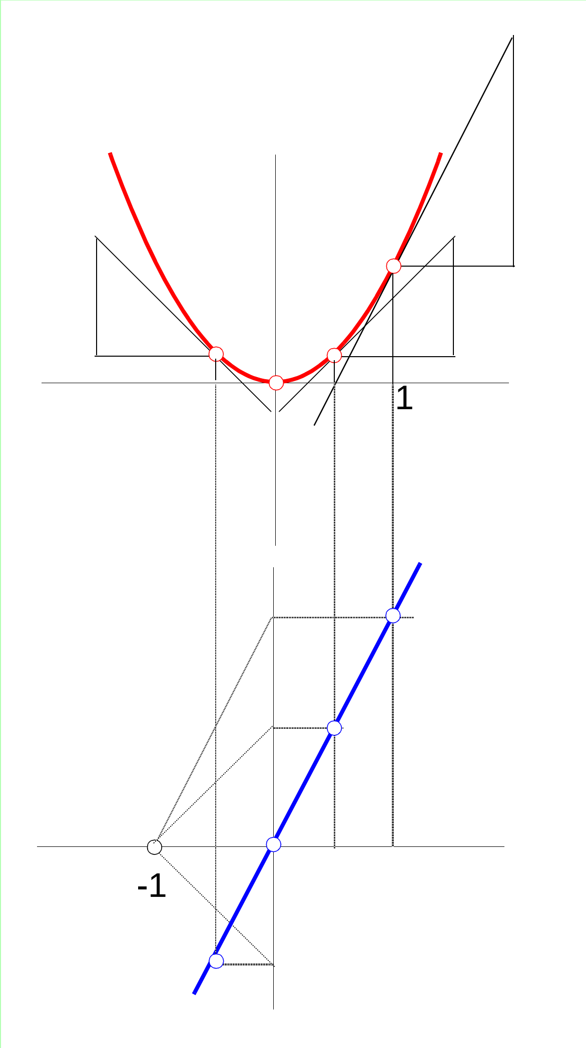
Euclides jrg '45/46

(...) De hier geschetste inleiding in de differentiaal- en integraalrekening wordt niet door iedereen de meest geschikte geacht. In het bijzonder vinden sommigen het begrip 'differentiaalquotiënt' een te moeilijk begrip voor beginners in deze materie. Zij zijn integendeel van mening dat het begrip 'oppervlakte van een kromlijnige figuur' voor onze leerlingen gemakkelijker te verwerken is dan dat van 'helling van een raaklijn aan de grafiek'

Grafisch differentiëren

Bunt ('45/46)





Het effect is het grootst, wanneer men de grafieken van enkele afgeleiden reeds in het begin laat tekenen.
Wij doen dit met functies als x^2, $\frac{1}{3}x^3$, sin x en cos x .....

Numeriek differentiëren

(I)

$Y_1 =$
$Y_2 = Y_1(X + 0.001)$
$Y_3 = Y_2 - Y_1$
$Y_4 = Y_3 / 0.001$

of

(II)

$Y_1 =$
$Y_2 = Y_1(X + 0.001)$
$Y_3 = Y_1(X - 0.001)$
$Y_4 = (Y_2 - Y_3) / 0.002$

Numeriek differentiëren

Y_1 = X^2

X	Y_1	Y_4
0	0	.001
1	1	2.001
2	4	4.001
3	9	6.001
4	16	8.001
5	25	10.001
6	36	12.001

evenredig met ***x***

Y_1 = X^3

X	Y_1	Y_4
0	0	1E-6
1	1	3.003
2	8	12.006
3	27	27.009
4	64	48.012
5	125	75.015
6	216	108.02

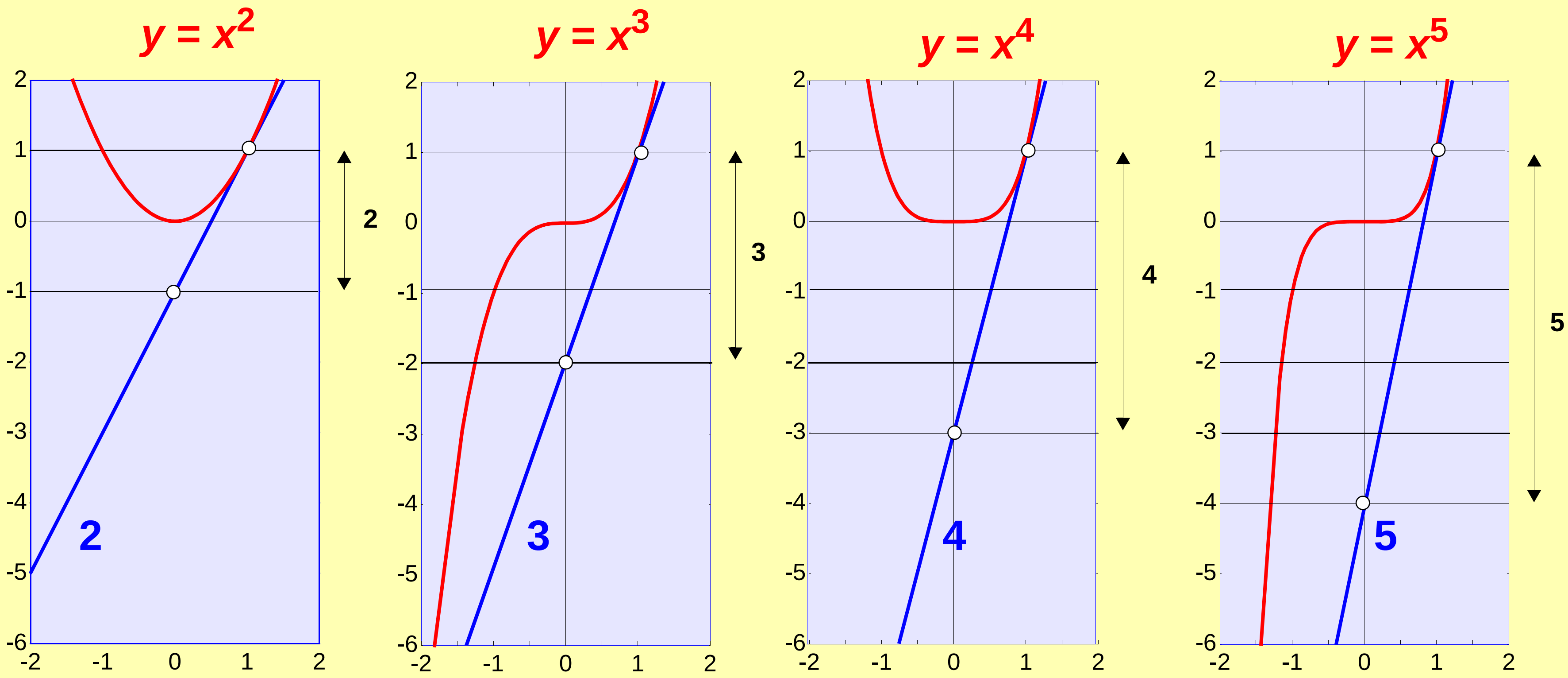
evenredig met x^2

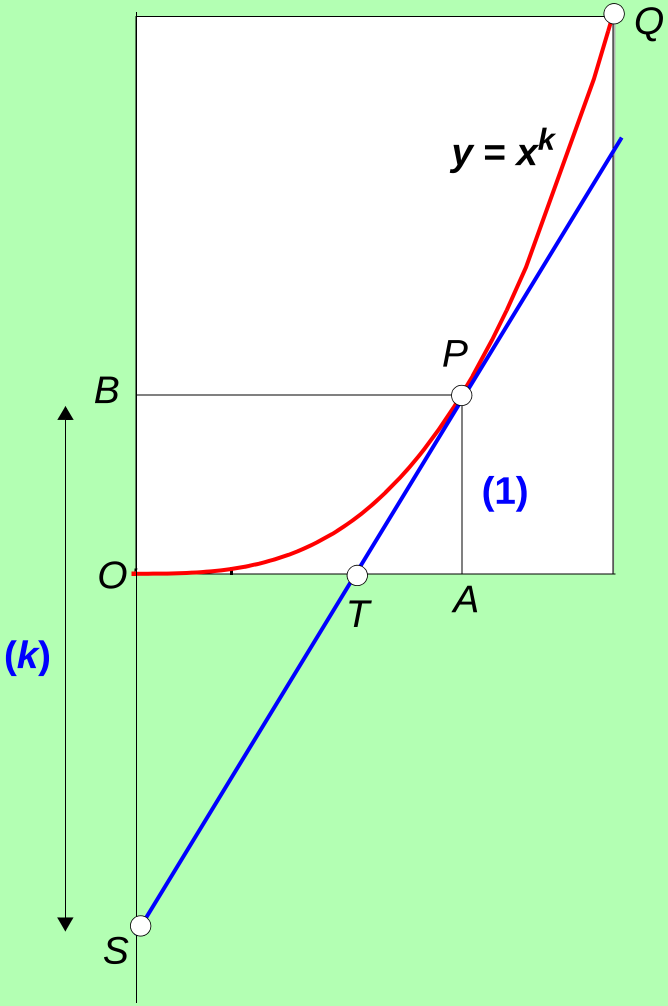
Y_1 = 2^X

X	Y_1	Y_4
0	1	.69339
1	2	1.3868
2	4	2.7735
3	8	5.5471
4	16	11.094
5	32	22.1881
6	64	44.3771

evenredig met y_1

differentiëren is ook meetkunde

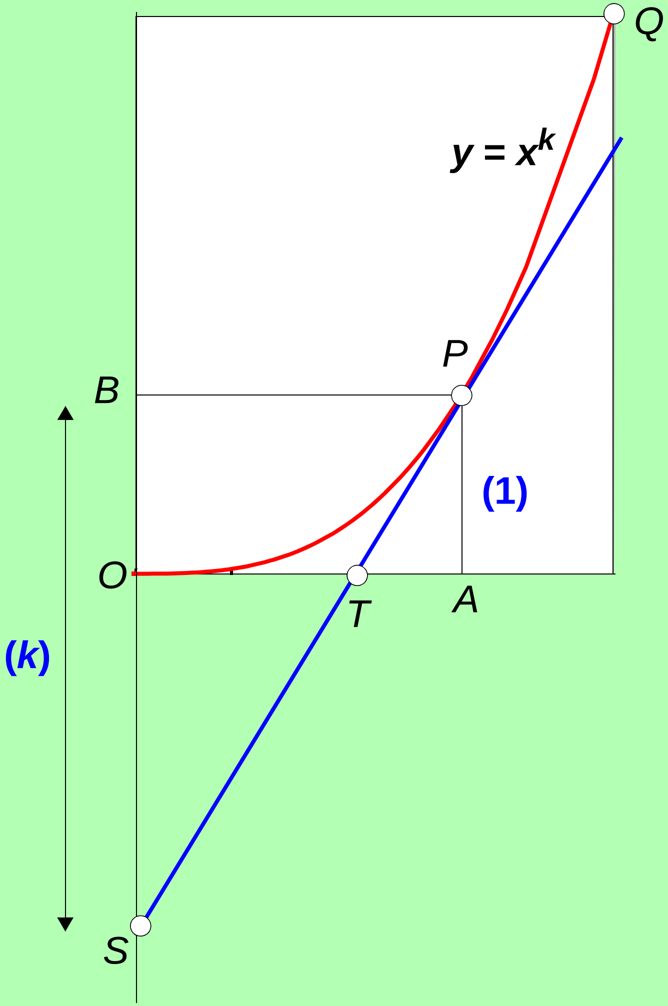




TP is raaklijn van kromme $y = x^k$

$$\frac{AT}{AO} = \frac{AP}{BS} = \frac{1}{k}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{ky}{x} = \frac{kx^k}{x} = kx^{k-1}$$



$P : (a, a^{k})$

$Q : (b, b^{k})$

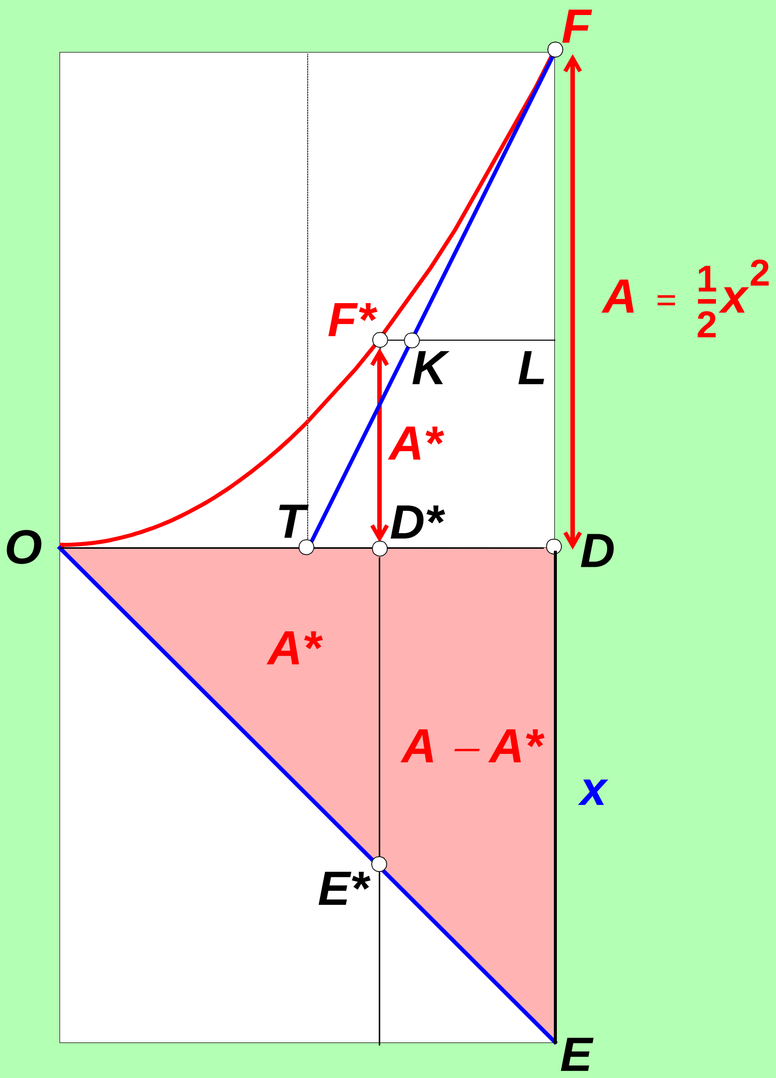
$b > a$

Helling PQ

$$\frac{b^k - a^k}{b - a} = b^{k-1} + b^{k-2}a + \ldots + a^{k-1}$$

$$>$$

$$\underbrace{a^{k-1} + a^{k-2}a + \ldots + a^{k-1}}_{k\,a^{k-1}}$$



$$DT = \frac{A}{x} = \tfrac{1}{2}x$$

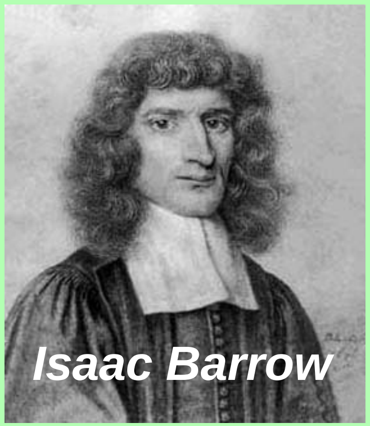
$$\updownarrow$$

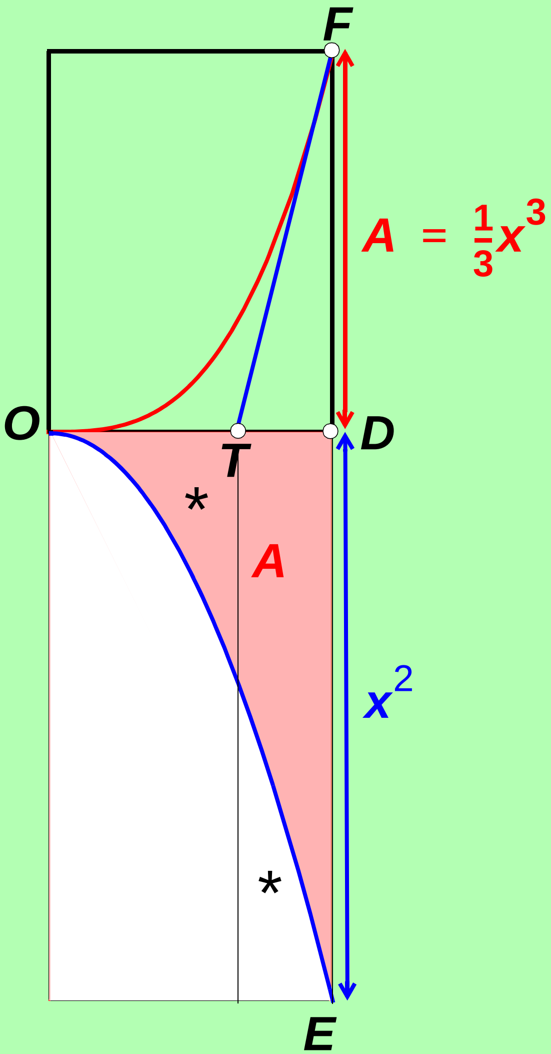
$$FD = x \cdot TD$$

$$A - A^* = FL = x \cdot KL$$

$$A - A^* < x \cdot F^*L$$

K rechts van kromme OF





$$DT = \frac{A}{x^2} = \frac{1}{3}x$$

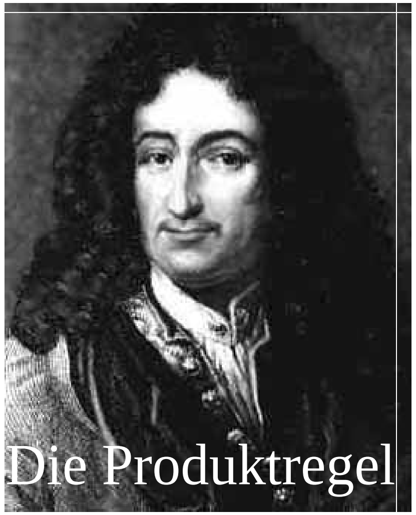
de Algebra van het Differentiëren

Differentiëren, dat is toch x-kwadraat wordt twee x ?

Differentiëren, dat snap ik wel, maar wat heeft die productregel ermee te maken?

Productregel

v



u

Notitie van Leibniz (November 1675):

$$d(uv) = du \cdot dv$$

???

Correctie na een paar dagen

$$d(uv) = (u+du)(v+dv) - uv$$

$$= u\,dv + v\,du + du \cdot dv$$

$$x^2 + x^3 \xrightarrow{\textit{differentieer}} 2x + 3x^2$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 \cdot x^3 & \xrightarrow{\textit{differentieer}} & 2x \cdot 3x^2 \quad ? \\ \| & & \nparallel \\ x^5 & \xrightarrow{\textit{differentieer}} & 5x^4 \end{array}$$

$2 + 3 = 5$

exponent $= 4$?

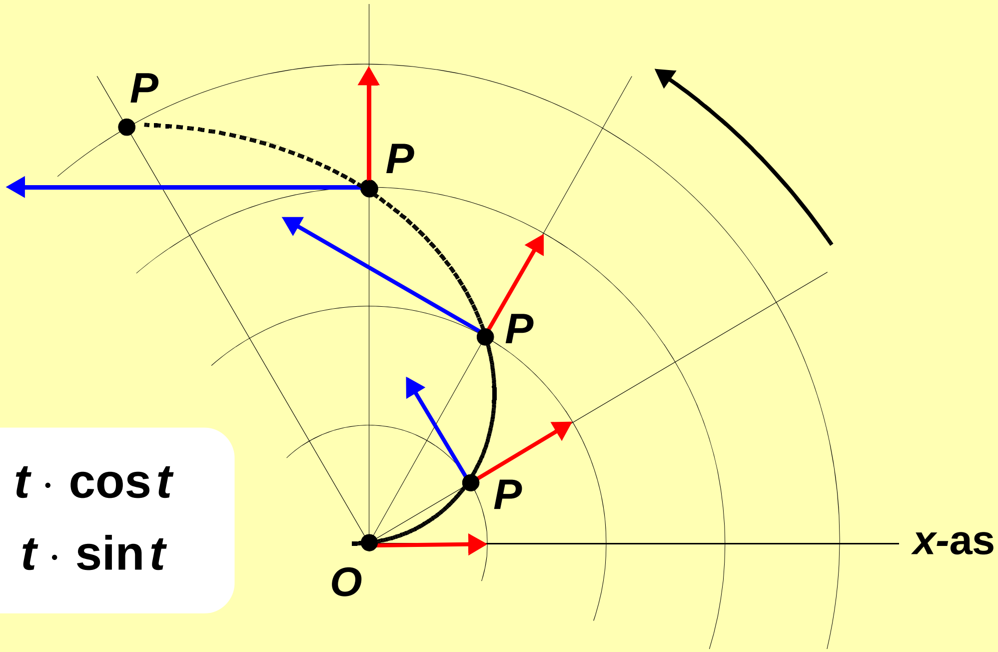
Productregel?

polynomen $P(x)$, $Q(x)$

$\uparrow$ graad m $\quad$ $\uparrow$ graad n

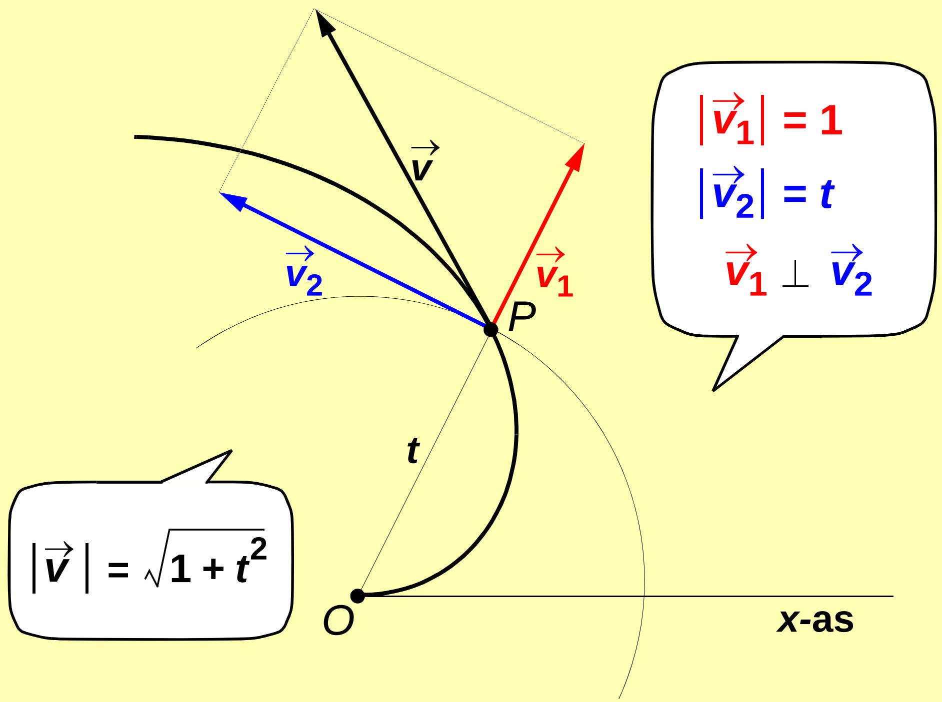
$P'(x)$ graad $m-1$ $Q(x)$ graad n	$P(x) \cdot Q(x)$ graad $m+n$
$P'(x) \cdot Q(x)$ graad $m+n-1$	$[P(x) \cdot Q(x)]'$ graad $m+n-1$

maar niet symmetrisch in P & Q

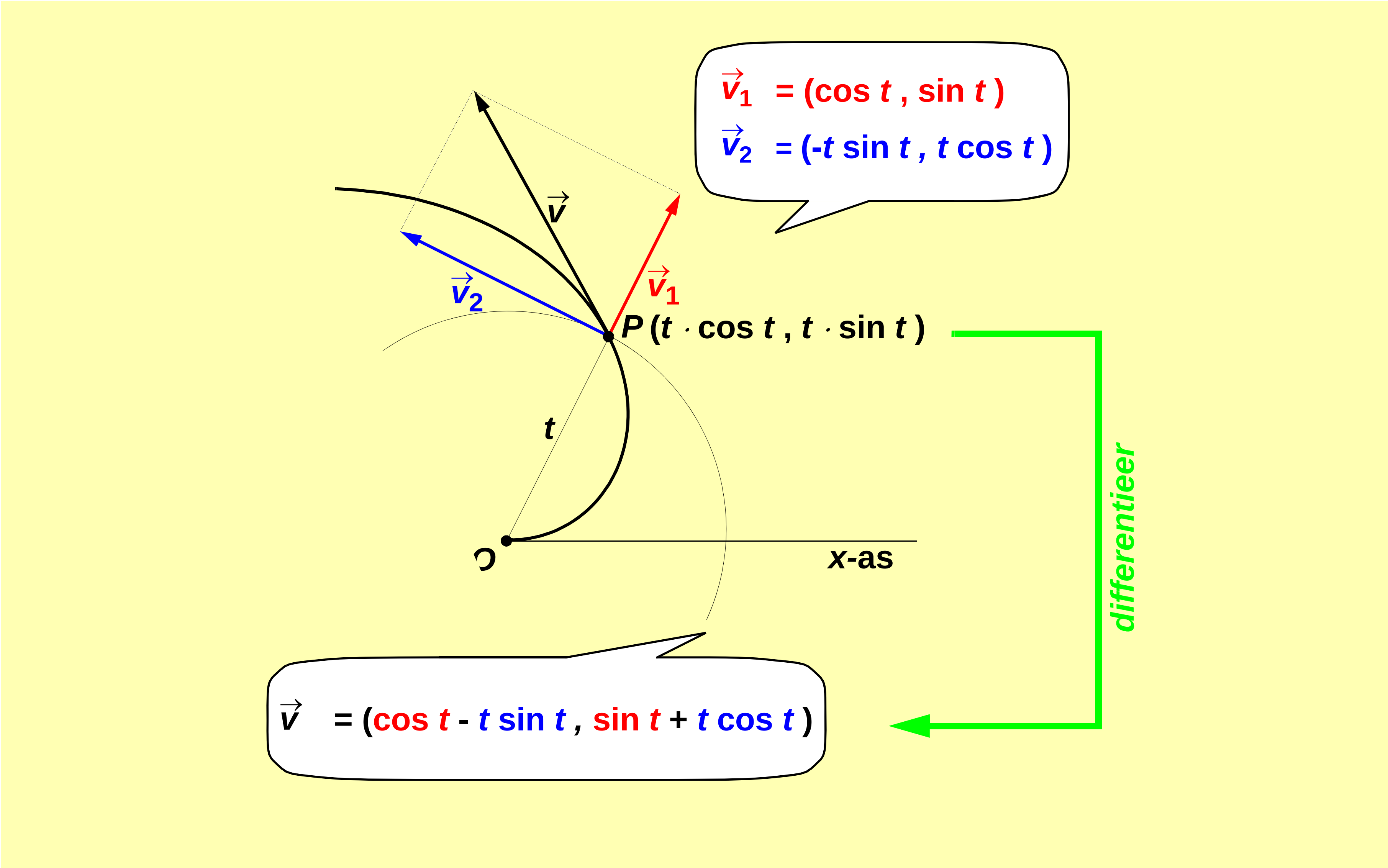


$$\begin{cases} x = t \cdot \cos t \\ y = t \cdot \sin t \end{cases}$$

Archimedische spiraal

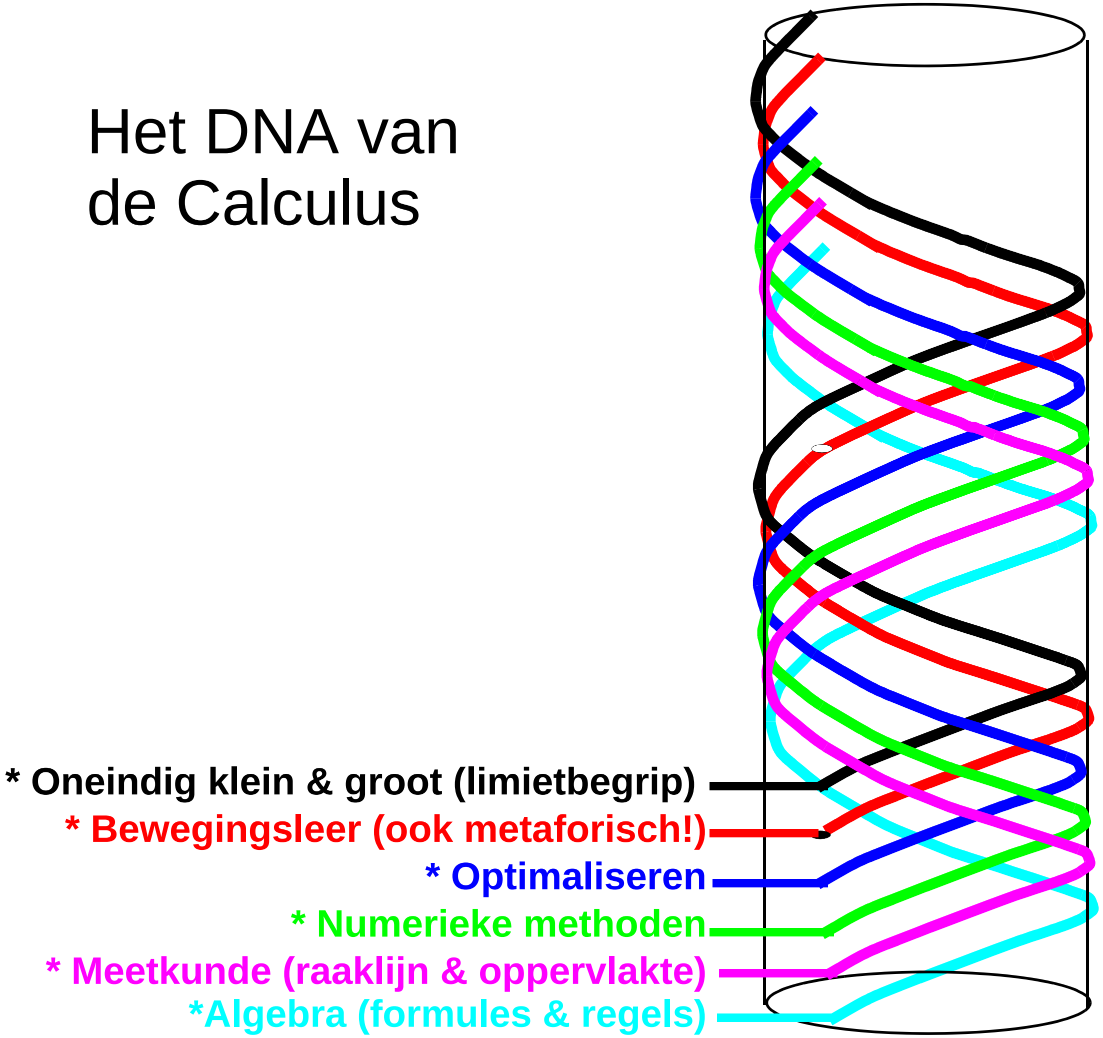


$\vec{v}$
$\vec{v}_2$
$\vec{v}_1$
P
t
O
x-as
$|\vec{v}_1| = 1$
$|\vec{v}_2| = t$
$\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$
$|\vec{v}| = \sqrt{1 + t^2}$



$\vec{v}_1$ = (cos t , sin t)
$\vec{v}_2$ = (-t sin t , t cos t)
$\vec{v}$
$\vec{v}_1$
$\vec{v}_2$
P ($t \cdot$ cos t , $t \cdot$ sin t)
t
O
x-as
differentieer
$\vec{v}$ = (cos t - t sin t , sin t + t cos t)

Het DNA van de Calculus



Some time ago I read about efforts to improve the teaching of analysis by raising standars of rigour.
I believe that analysis at school can be improved only by relating it closer to reality. If more abstraction is not counterbalanced by a closer proximity to reality, it will only yield more unrelated and thus worthless stuff.

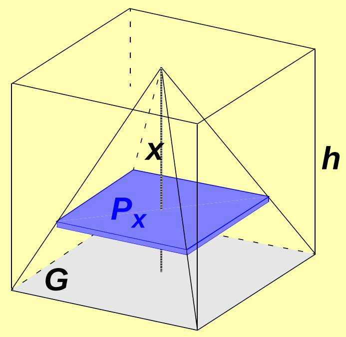
Hans Freudenthal 1973

(*Mathematics as an educational task*)

$$P_x = \left(\frac{x}{h}\right)^2 \cdot G \cdot \Delta x$$

Inhoud =

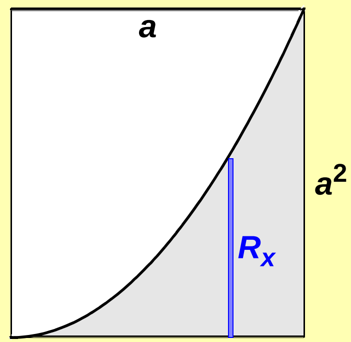
$$\int_0^h \frac{x^2}{h^2} G \,\mathrm{d}x = \frac{G}{h^2}\int_0^h x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{G}{h^2} \cdot \frac{1}{3}h^3 = \mathbf{\frac{1}{3}} \cdot hG$$



$$R_x = x^2 \cdot \Delta x$$

Oppervlakte =

$$\int_0^a x^2 \,\mathrm{d}x = \mathbf{\frac{1}{3}} \cdot a^3$$



$$S_\phi = \frac{\Delta\phi}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2} r^2 \Delta\phi$$

Oppervlakte =

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 \,\mathrm{d}\phi = \frac{1}{2} c^2 \int_0^{2\pi} \phi^2 \,\mathrm{d}\phi = \mathbf{\frac{1}{3}} \cdot 4\pi^3 c^2$$