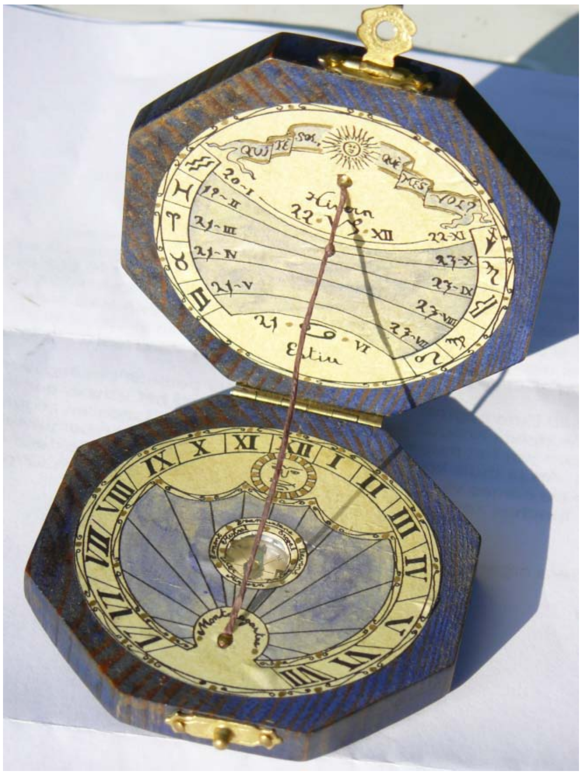
ZONNIGE ZAKEN



Hans van Lint

Jeanne Breeman

Vanlint-breeman@hetnet.nl

Nationale Wiskunde Dagen 2012

KALENDERS

Op welke dag van de week ben je geboren? Dat weten de meeste mensen wel. Op welke dag van de week valt je 100^{e} verjaardag? Dat weet je vast niet.

Aan het eind van dit onderwerp kun je dat op je vingers uitrekenen. En als je bereid bent een paar dingen uit je hoofd te leren, kun je dat bepalen voor elke datum in de 20^{e} en 21^{e} eeuw.

<u>Schrikkeljaren</u>

Een kalenderjaar is 365 of 366 dagen lang. De tijd die de aarde erover doet om om de zon te draaien is 365,242199… maal 24 uur

@1 Controleer dat 365,242199.. = 365 + ¼ -1/100+1/400 – 0,000301..

@2 Hoe vaak hebben we dus een schrikkeljaar? Was 1900 schrikkeljaar? En 2000?

<u>Modulo rekenen</u>

Als we met uren op de klok rekenen is 9 + 6 = 15 = 3 (mod 12)

@3 Hoeveel is 6 x 9 (mod12)?

We gaan nu modulo 7 rekenen.

@4 Hoeveel is 9 + 6 ? En 6 x 9 ? Hoeveel is 6 – 9 ?

<u>Dagen van de week</u>

@5 Als 31 januari op woensdag valt, op welke dag valt dan 10 februari?

Voor het gemak van het rekenen in het vervolg gaan we uit van de datum 0 januari (dat is dus in feite 31 december, maar aan die wetenschap hebben we niets).

@6 Als 0 januari op woensdag valt, op welke dag valt dan 10 januari?

Hierbij heb je gezien waarom het rekenen met 0 januari handig is. Om de dag van 10 januari te vinden kun je 10 dagen verder rekenen. Vanaf 1 januari zou dat 9 dagen zijn geweest, dat geeft makkelijker fouten. Overigens betekent 10 dagen verder hetzelfde als 3 dagen verder omdat 10 = 3 (mod7)

@7 Als je in 2010 op zaterdag jarig was, op welke dag was je dat dan in 2011?

@8 We gaan er even vanuit dat er geen schrikkeljaren zijn. Op welke dag zou je dan jarig zijn in 2025?

@9 Helaas zijn er wel schrikkeljaren. Hoeveel zijn dat er tussen 2010 en 2025? Dus op welke dag ben je echt jarig?

NB. Moeilijker wordt het als we de dag van de week willen weten waarop een bepaalde datum in bijvoorbeeld 2020 valt. Als we naar een datum in januari of februari kijken, telt

2020 niet mee als schrikkeljaar. Voor data in maart tot en met december moet je wel een schrikkeldag meetellen.

@10 5 januari 2011 was op woensdag en 5 januari 2020 op …dag.

@11 30 april 2011 was ook op woensdag en 30 april 2020 valt op …dag.

@12 In 2013 valt 1 januari op dinsdag. Januari heeft 31 dagen, als je mod 7 rekent zijn dat er 3. Dus 1 februari valt op …

@13 Maak een lijstje van de dagen waarop 1 januari, 1 februari tot en met 1 december vallen in 2013, doe de eerste paar zonder in je agenda te kijken.

@14 Vergelijk je lijstje met het onderstaande en leg de overeenkomst uit

jan	**feb**	**mrt**	**apr**	**mei**	**jun**	**jul**	**aug**	**sep**	**okt**	**nov**	**dec**
0	**3**	**3**	**-1**	**1**	**4**	**-1**	**2**	**-2**	**0**	**3**	**5**

Om zonder kalender bij een datum de dag te kunnen bepalen, moet je dit laatste lijstje uit je hoofd leren. En ook nog: **0 januari 1900 was zondag** **0 januari 2000 was vrijdag**

Als we nu willen weten op welke dag 12 maart 2046 valt, dan doen we als volgt:

0 januari 2000 = vrijdag

Ieder jaar betekent een dag later: 2046 – 2000 = 46

Ieder schrikkeljaar nog één en 2000 was ook schrikkeljaar:

	46 : 4 = 11, ..	12 + 46 = 58 = 2 (mod 7)	*op je vingers: 2*
Uit het lijstje:	maart = 3	2 + 3 = 5	*op je vingers: 5*
Vanwege 12 maart:		5 + 12 = 17 = 3 (mod 7)	*op je vingers: 3*

3 dagen na vrijdag is maandag

Pas wel op met 1900! Van 1900 tot 1946 rekenen we voor de schrikkeldagen

46 : 4 = 11, .. en vervolgens tellen we 11 op.

@15 Reken nu na op welke dag je geboren bent. En op welke dag word jij 100? Gefeliciteerd!

AFSTANDEN

Materialen: globe, ballen, speld, fotokopie raam, kleurenkopie Van Gogh, gegevens

Op tafel staat een aardbol (of een bol die de aarde voorstelt) en er liggen enkele balletjes.

@1 Laat ieder voor zichzelf bedenken welke bal het beste de maan voorstelt en hoever van de aarde die maan moet staan.

@2 Vergelijk jullie antwoorden

@3 Kijk op de eerste bladzijde van de bijgevoegde gegevens en bereken de juiste antwoorden op bovenstaande vragen.

@4 Hoe groot schat je de zon op deze schaal? En hoe ver staat die naar jouw schatting weg?

Groot en ver, dat waren wel goede antwoorden! Op blz 2 van de gegevens staan ze uitgerekend.

@5 Bereken ze nu zelf voor het geval dat de aarde voorgesteld wordt door de knop van de speld.

@6 op blz 3 van de gegevens staat een schilderij van Van Gogh met een zon en een maan. Kloppen die groottes naar jouw idee ongeveer? Hoe groot zou je de volle maan tekenen op de fotokopie van het raam (gokken, niet rekenen)? Bekijk de echte foto met maan op blz 4 van de gegevens.

@7 Bereken hoe groot, uitgedrukt in booggraden, we de zon en de maan zien vanaf de aarde.

Over het algemeen worden de zon en de maan op schilderijen en tekeningen veel te groot gemaakt. Als je buiten bent is het heel moeilijk om de hoogte van zon, maan en sterren in graden te schatten.

Er zijn een paar hulpmiddeltjes: strek je arm uit,

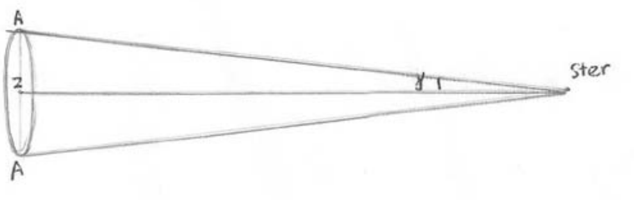
- van een uitgestrekte hand, is de afstand van duimpunt tot punt van de pink ca 20 .
- je vuist is ca 10
- de dikte van een vinger is ca 1

Het licht beweegt met een snelheid van 300 000 km / sec.

@8 Hoever beweegt het licht in 1 jaar? Die afstand heet 1 lichtjaar.

@9 De afstand zon – aarde heet 1 AE (astronomische eenheid). Hoeveel AE gaan er in 1 lichtjaar? Hoe lang doet het licht erover om van de zon naar de aarde te gaan?

Als je een uitgestrekte arm, met een vinger rechtop, voor je houdt en je kijkt afwisselend met je linker en je rechteroog, dan wijst je vinger verschillende plaatsen aan. Omgekeerd kunnen we de plaats van een ster bepalen door naar die ster te kijken op 2 tijdstippen met een half jaar ertussen. De halve hoek heet de parallax van de ster. Die hoek wordt niet uitgedrukt in graden maar in seconden, parsec (zie in de tekening hoek ϒ). We gebruiken parsec als maat voor de afstand van sterren.



De ster die het dichtst bij de aarde staat, α – Centauri, heeft een parallax van 0,76 parsec.

@10 Bereken van 1 parsec hoeveel km dat is. Bereken de afstand van α – Centauri tot de zon.

@11 Kijk nog even op het lijstje met afstanden en laat tot je doordringen hoe groot alleen al ons melkwegstelsel is. Als de zon en de aarde samen in de knop van de speld zitten, hoe groot is dan in verhouding ons melkwegstelsel?

Gegevens

Blz 1:

Straal aarde varieert van 6378,4 km bij de equator tot 6356,9 km bij de polen.

Straal maan is ca 1738 km, afstand maan – aarde varieert van 363 300 km tot 405 500 km.

Blz 2:

Straal zon = 696 000 km en afstand zon –aarde = 149 675 000 km. Bedenk wel dat deze afstanden niet constant zijn.

Berekening uitgaande van een aardbol met diameter 20 cm, dus straal 10 cm:

6370 km		10 cm
696.000km		—— x 696.000 cm ≈1092 cm≈ 11 m
149.675.000km		—— x 150 milj ≈ 235.000 cm ≈ 2350 m ≈ 2,35 km

Blz 3:

Blz 4:

Maan	1 lichtsec	Zon	8 lichtmin
Uranus	2 lichtuur en 40 min	Sirius	8,7 lichtjaar (parallax 0,375 sec)
Andromedanevel	2,2 miljoen lichtjaar	Doorsnede melkweg	100 000 lichtjaar

HOE LAAT IS HET?

Materialen: globe, overzicht tijdsystemen

Soms, als je een zonnewijzer ziet hangen, ben je blij met je goed lopende horloge. Een zonnewijzer lijkt nooit precies de goede tijd aan te wijzen. Is dat ook zo?

Ooit had iedere plaats op aarde zijn eigen tijd. Als de zon op zijn hoogste punt was en door de meridiaan ging, was dat het middaguur, 12.00 uur dus. De tijd die op die manier door de zon wordt bepaald heet Ware Lokale Zonnetijd (WLZ).

@1 In 24 uur draait de aarde 360 , dus 1 uur komt overeen met … en 1 draaiing duurt …

We laten in gedachten de aarde stilstaan en de zon erom heen draaien.

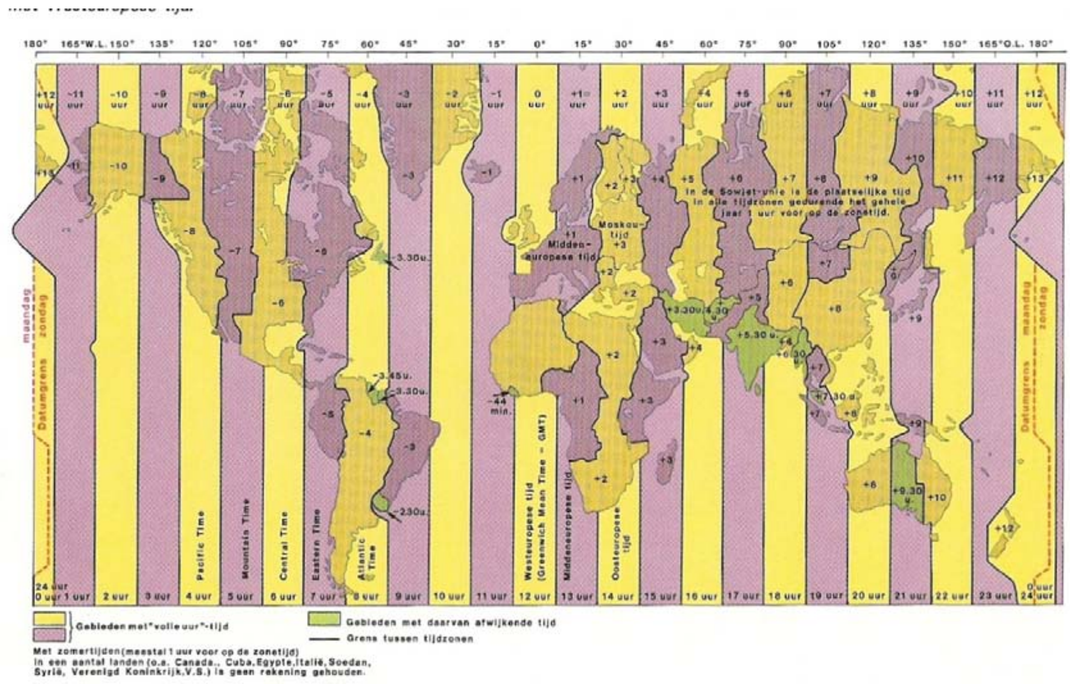
De snelheid van de zon t.o.v. de aarde is gedurende het jaar niet constant, soms loopt de zon een beetje voor, soms een beetje achter. Middelbare Zonnetijd is de tijd die hoort bij een zon die met constante snelheid langs de hemelequator beweegt. Het verschil tussen Middelbare Zonnetijd en Ware Zonnetijd heet tijdsvereffening. (Pas op: soms wordt de tijdsvereffening als het omgekeerde gedefinieerd. Niet erg, maar je moet wel op het plus of minteken letten).

@2 Noordwijkerhout heeft als coördinaten 52 15' NB en 4 30' OL. Hoeveel vroeger gaat de zon hier door de meridiaan dan in Greenwich?

@3 Leg uit dat MLZ = (MLZ van Greenwich) + 4λ minuten , waarbij λ = plaatselijke lengtegraad oost.

@4 Gegeven: Vlissingen 51 26' NB en 3 35' OL en Winschoten 53 08' NB en 7 02' OL. Hoeveel tijdsverschil zit er tussen de hoogste stand van de zon in beide plaatsen?

Dat iedere plaats op aarde zijn eigen tijd heeft is niet praktisch. Daarom is de aarde aan het eind van de 19^{e} eeuw ruwweg verdeeld in 24 tijdzones van 15 breed. Daarbij is de meridiaan door Greenwich de 0-meridiaan geworden, dus dat is het nulpunt van de zonetelling en de zones worden oostwaarts geteld van 0 tot en met 23.



De Middelbare Zonnetijd van Greenwich is de basis voor de wereldtijd geworden, Greenwich Mean Time (GMT).

Het gebied waar het even laat is als in Greenwich loopt ongeveer van 7,5 WL tot 7,5 OL. Als je op de globe kijkt kun je controleren dat Nederland in dat gebied ligt, maar wij houden ons aan de tijd van de volgende zone, die tijd heet Midden Europese Tijd (MET) of in het Engels Central European Time (CET). 's Zomers staat de klok nog een uur later en hebben we Midden Europese Zomer Tijd (MEZT), dat is dus de tijd die behoort bij 30 OL.

@5 Zoek op de globe een plaats 90 oostelijk van Greenwich. Hoe laat, in GMT, gaat de zon daar door zijn hoogste punt? Idem voor 90 westelijk.

@6 Beantwoord nu dezelfde vragen voor 180 oostelijk en 180 westelijk van Greenwich.

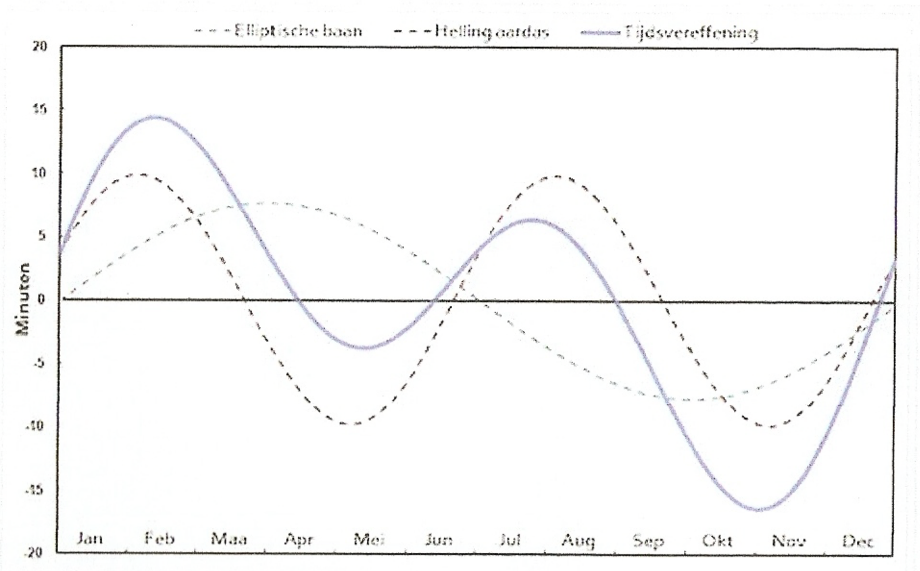
@7 Wat is er aan de hand bij 180 OL? Was het handig om de meridiaan van Greenwich als 0-meridiaan te nemen?

@8 Probeer op de bijlage de verschillende tijdsystemen en hun verbanden nog eens te begrijpen.

@9 Welke van deze tijden staat er op ons horloge? Welke tijd geeft een zonnewijzer aan?

Het verschil tussen de middelbare zonnetijd en de ware zonnetijd, de tijdsvereffening, varieert van 14 minuten (rond 11 februari) tot – 16,5 minuten (rond 3 november).

Hieronder staan een grafiek en een tabel van de tijdsvereffening. Overigens is deze niet ieder jaar precies hetzelfde. De exacte waarden staan in de Sterrengids, die uitgegeven wordt door Stichting De Koepel. De variaties vallen bij ons weg in de afleesfouten op de zonnewijzer.



De tijdsvereffening - boven de as het aantal minuten dat de plaatselijke middelbare tijd voorloopt op de zonnewijzer (maximaal 14 minuten), en onder de as het aantal minuten dat hij achterloopt (maximaal 16,5 minuut). De bijdragen van de elliptische aardbaan en de helling van de aardas zijn afzonderlijk aangegeven.

We gaan nu proberen de tijd die een zonnewijzer aangeeft om te rekenen naar onze kloktijd.

We zitten in Noordwijkerhout en het is 3 februari.

@10 Stel dat hier een zonnewijzer staat die 16.00 aangeeft. Hoe laat is het dan volgens Middelbare Lokale Zonnetijd (zie grafiek of tabel)?

@11 Reken deze tijd nu om naar MLZ in Greenwich, dus naar GMT.

@12 En als laatste stap: hoe laat is het nu in MET ?

G.M.T. Correction Factor (Equation of Time) in minutes (C.F.)

Date	C.F.	Date	C.F.	Date	C.F.	Date	C.F.
Jan 2	+ 4	Apr 1	+ 4	Aug 17	+ 4	Nov 11	–16
Jan 4	+ 5	Apr 5	+ 3	Aug 22	+ 3	Nov 17	–15
Jan 7	+ 6	Apr 8	+ 2	Aug 26	+ 2	Nov 22	–14
Jan 9	+ 7	Apr 12	+ 1	Aug 29	+ 1	Nov 25	–13
Jan 11	+ 8	Apr 15	0	Sep 1	0	Nov 29	–12
Jan 14	+ 9	Apr 20	– 1	Sep 5	– 1	Dec 1	–11
Jan 17	+10	Apr 25	– 2	Sep 8	– 2	Dec 4	–10
Jan 20	+11	May 2	– 3	Sep 11	– 3	Dec 6	– 9
Jan 24	+12	May 15	– 4	Sep 13	– 4	Dec 9	– 8
Jan 28	+13	May 28	– 3	Sep 16	– 3	Dec 11	– 7
Feb 3	+14	Jun 4	– 2	Sep 19	– 6	Dec 13	– 6
Feb 20	+14	Jun 10	– 1	Sep 22	– 7	Dec 15	– 5
Feb 27	+13	Jun 14	0	Sep 25	– 8	Dec 17	– 4
Mar 1	+12	Jun 20	+ 1	Sep 28	– 9	Dec 19	– 3
Mar 8	+11	Jun 24	+ 2	Oct 1	–10	Dec 21	– 2
Mar 12	+10	Jun 29	+ 3	Oct 4	–11	Dec 23	– 1
Mar 16	+ 9	Jul 4	+ 4	Oct 7	–12	Dec 25	0
Mar 19	+ 8	Jul 10	+ 5	Oct 11	–13	Dec 27	+ 1
Mar 23	+ 7	Jul 19	+ 6	Oct 15	–14	Dec 29	+ 2
Mar 26	+ 6	Aug 4	+ 6	Oct 20	–15	Dec 31	+ 3
Mar 29	+ 5	Aug 12	+ 5	Oct 27	–16		

BIJLAGE OVERZICHT TIJDSYSTEMEN

$$
\begin{array}{llcl}
\text{Greenwich} & \textbf{WLZ} & \xrightarrow{+4\lambda} & \textbf{WLZ}\ \text{in Noordwijkerhout} \\
 & \downarrow E & & \downarrow E = \text{tijdsvereffening} \\
\text{Greenwich} & \textbf{MLZ} & \xrightarrow{+4\lambda} & \textbf{MLZ}\ \text{in Noordwijkerhout} \\
 & \downarrow = & & \\
7{,}5\ \text{OL tm } 7{,}5\ \text{WL} & \textbf{GMT} & \xrightarrow{+60} & \textbf{MET} \\
 & & \searrow +120 & \\
 & & & \textbf{MEZT}
\end{array}
$$

(λ = aantal graden OL in Noordwijkerhout)

ZONSOPKOMST

Materialen: bol met 2 elastiekjes en 1 prikker, 2 satépennen, zwarte sok, tekeningenblad

In dit deel van de workshop gaan we na waar de zon opkomt. We zeggen zo gemakkelijk dat die zon in het oosten opkomt, maar is dat ook precies het oosten?

@1   Neem de kleine witte bol; die stelt onze aarde voor, bij de Noordpool zit een prikker. We kijken rond 21 juni. Met de zwarte sok gaan we de helft van de bol bedekken, dat is dan de nachtzijde van de aarde. Doe één of twee elastiekjes op de rand van de sok. Ga na hoe de aarde draait (de richting van de zonnestralen nemen we constant).

@2   Plaats B ligt op 52 NB en daar komt juist de zon op. Steek bij B onder één elastiekje een pen, zó dat die naar het oosten wijst. Steek er ook een pen zó dat die in de richting van de zon wijst (tweede elastiekje gebruiken anders draaien ze naar elkaar). Ga na dat de twee pennen in een vlak liggen dat de bol in B raakt.

Op het tekeningenblad is de bol getekend, O is het middelpunt van de aarde, C is de Noordpool en A is het punt op de grenslijn van de schaduw dat zo ligt dat vlak OAC loodrecht staat op vlak OAB. In een andere tekening is het deel van de bol O.ABC eruit gehaald en is het raakvlak in B aan de bol, vlak BQP, getekend.

@3   Toon aan dat de hoek tussen de vlakken OBA en OBC gelijk is aan de hoek tussen de twee pennen uit opdracht 1.

@4   Wat is het verband tussen *bg a* en de plaats van B op aarde? Wat stelt *bg b* voor?

@5   Twee stellingen uit de boldriehoeksmeting, die slaan op rechthoekige boldriehoeken, zijn afgeleid. Ga na.

@6   Bereken nu de hoek tussen de twee pennen, dus de hoek tussen de richting Oost en de richting waarvandaan de zon opkomt.

@7   Bereken die hoek ook voor een plaats B die ligt op 67   NB op 21 juni. (Dat is dus een plaats op de poolcirkel). Waar komt de zon dus ‘’op’’?

@8   Ongeveer op 21 maart en 21 september staat de zon boven de equator. Doe de sok en de elastiekjes op de bijbehorende positie. Hoe kun je de richting van de zonnestralen beschrijven? Als B op 52 NB ligt, hoe groot is dan nu hoek B? Waar komt de zon op? Hoe zit het als we in die perioden B zelf op de equator kiezen?

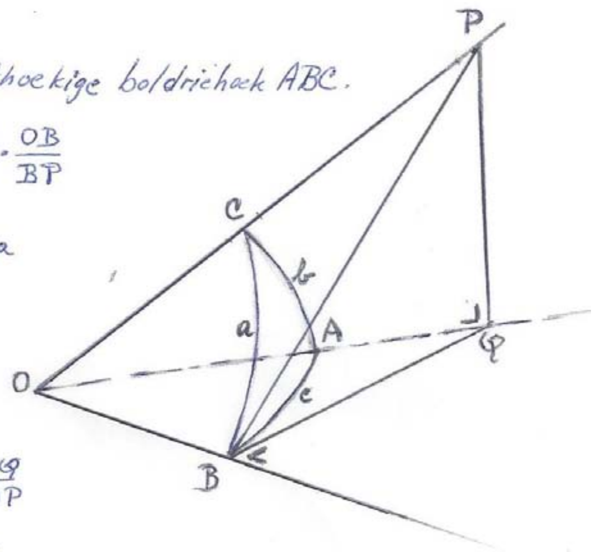
@9   Bereken de hoek ook voor een plaats B op 52 NB, terwijl de zon boven de Steenbokskeerkring staat (dus 23 zuidelijk van de equator).

Beschouw de rechthoekige boldriehoek ABC.

$$\cos B = \frac{B\varphi}{BP} = \frac{B\varphi}{OB} \cdot \frac{OB}{BP}$$

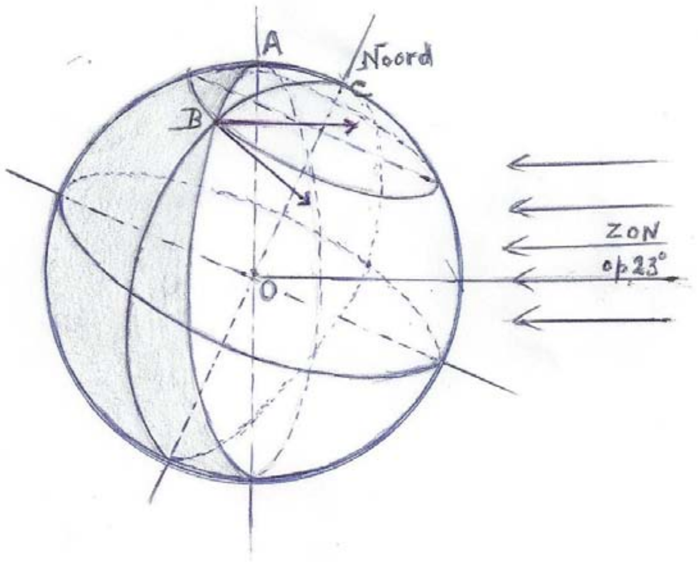
$$\cos B = \tan c \cdot \frac{1}{\tan a}$$

$$\underline{\tan c = \tan a \cdot \cos B}$$



$$\cos a = \frac{OB}{OP} = \frac{OB}{O\varphi} \cdot \frac{O\varphi}{OP}$$

$$\underline{\cos a = \cos c \cdot \cos b}$$



DE BAAN VAN DE ZON

Materialen: pp een houten cilinder en een half vel A4, plakband, schaar, blad met 4 figuren, grafische rekenmachine, kaart uit Noorwegen

Vlak bij mijn nieuwe huis staat een boom. Wanneer neemt die boom de zon weg van mijn terras? Dat is natuurlijk afhankelijk van de hoogte van de zon en die hangt weer af van de tijd van de dag en van de datum.

Als je buiten bent is het heel moeilijk om de hoogte van de zon in graden te schatten. Er zijn een paar hulpmiddeltjes: strek je arm uit,

- van een uitgestrekte hand, is de afstand van duimpunt tot punt van de pink ca 20 .
- je vuist is ca 10
- de dikte van een vinger is ca 1

De zon bereikt zijn maximale hoogte op 21 juni, en op 21 december is zijn hoogste punt minimaal. We gaan eerst berekenen hoe hoog de zon op die dagen komt. We zoeken het verband tussen die hoogste stand van de zon in een plaats W (waarnemer) en de geografische breedte α van de plaats W.

@1 Stel je nu eerst voor dat je buiten in de zon staat. Tussen welke twee lijnen meet je dan de hoogtehoek van de zon?

Stel dat de hoek tussen het equatorvlak en de richting van de zon gelijk is aan β .

@2 Hoe groot kan β zijn?

We nemen voor het gemak aan dat de zonnestralen evenwijdig invallen en dat de zon puntvormig is. Dat is natuurlijk niet zo. Je kunt op een zonnige dag aan je eigen schaduw zien dat die aan de rand minder donker is dan in het midden.

@3 Bereken als de zon op het noordelijk halfrond staat met behulp van de figuur 1a het verband tussen de hoogste stand van de zon (in graden) en α en β.

@4 Idem voor de zon op het zuidelijk halfrond (figuur 1b).

@5 Bereken voor een plaats W op 52 NB (noorder breedte) de hoogste en de laagste zonshoogte op het midden van de dag in de loop van een jaar.

Om te weten hoe de zonshoogte op één dag verloopt, laten we in gedachten de aarde stilstaan en de zon er omheen draaien. We denken op de cirkelvormige horizon om ons heen een cilinder. De hoogte van de zon meten we op die cilinder.

Onze bodem met horizon is niet het draaivlak van de zon, want de zon draait in een vlak evenwijdig aan de equator. De stralen van de zon die naar ons toe komen vormen op een dag een kegel en de as van die kegel is evenwijdig met de aardas. (In de onderdelen *Gnomon* en *Zonnewijzers* wordt dit met materiaal duidelijk gemaakt). Hier gaan we ervan uit dat de zonnestralen die cilinder snijden in punten van een plat vlak.

En de hoogte van de zon in de loop van de dag wordt dus bepaald door het snijden van onze horizoncilinder met het vlak waarin de zon draait.

@6 Neem ieder één van de houten cilinders en een half vel wit papier. Rol het papier strak om de cilinder, zó dat de onderrand van het papier evenwijdig met de onderkant van de cilinder loopt en zó dat de bovenkant boven de cilinder uitkomt. Zet het vast met een klein stukje plakband. Knip het papier nu zorgvuldig af langs de schuine kant van de cilinder.

@7   Haal het papier van de cilinder af. Wat voor kromme heb je geknipt?

We gaan deze uitkomst eerst bewijzen.

@8   Neem een cirkel met straal *r* in het XOY-vlak. Schrijf de coördinaten x en y van een willekeurig punt op de cirkel als functie van *r* en de hoek φ (zie figuur 2).

@9   Ga na dat een vlak zoals getekend in figuur 3 als vergelijking heeft $z = c + p\, y$

@10   Combineer de antwoorden van 8 en 9 en toon daarmee aan dat de kromme die je hebt geknipt een sinus is.

De aarde draait om de zon, zijn baan is een ellips. Omdat deze ellips een excentriciteit heeft die bijna 1 is, beschouwen we hier de baan als een cirkel. Verder draaien we ons wereldbeeld om en laten de zon om de aarde draaien. Als we om ons heen kijken (en er niets in de weg staat) is ons zicht in alle richtingen even ver beperkt, we beschouwen onze horizon als een cirkel met daarbovenop een cilinder. Het vlak van de zon snijdt deze cilinder.

Op een gegeven plaats W op aarde is de baan van de zon in de loop van een dag dus een sinus. Als we daar een grafiek van willen maken hebben we een aantal gegevens nodig.

We gaan uit van Noordwijkerhout op 52 NB op 21 juni.

@11   In @5 heb je al berekend hoe hoog de zon op die dag maximaal komt. Bereken nu ook de hoek met de horizon in het midden van de nacht(zie fig. 1c).

We maken nu een grafiek met de hoogte van de zon op 21 juni. Op de x-as nemen we de uren 0 tot en met 24. We laten de hoogste punt van de zon om 12.00 uur vallen (dat klopt natuurlijk meestal niet, maar voor de baan van de zon is dat niet belangrijk).

@12   Bekijk figuur 4 en druk de maximale hoogte *h* uit in hoek χ. Neem hierbij ZW = 1

@13   Doe hetzelfde voor de minimale hoogte bij de laagste stand van de zon.

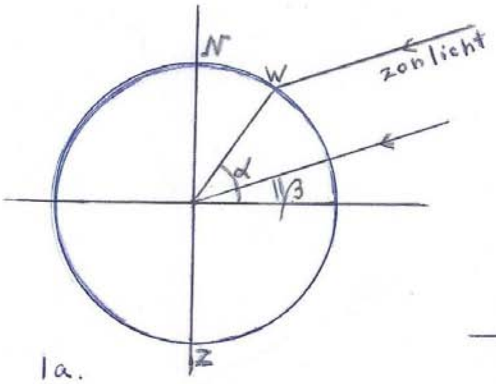
Om de grafiek $y = a \sin b(x-c) + d$ op de GR te tekenen heb je nu alle gegevens.

@14   Bereken a, b, c en d en teken de grafiek (vergeet niet je GR op radialen te zetten).

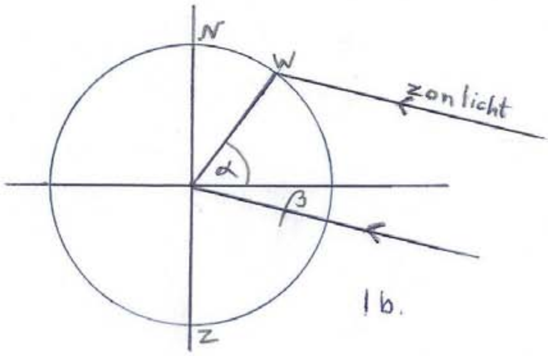
@15   Bepaal de snijpunten met de horizon en bereken daaruit hoe lang de dag duurt op 21 juni in Noordwijkerhout.

@16   Als jullie nog moed hebben, kun je hetzelfde doen voor Caïro op 30 NB en voor Trondheim op 63 NB.

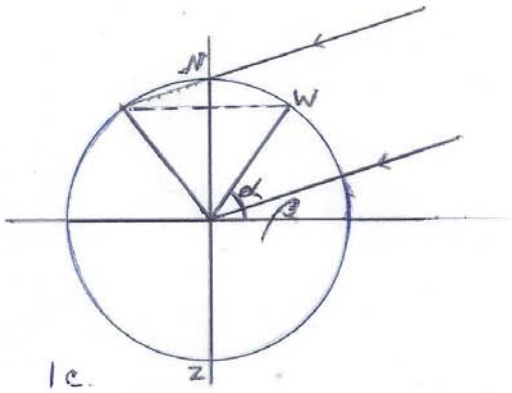
@17   Bekijk de drie grafieken bij elkaar in één assenstelsel en bespreek het verschil in daglengte en het verschil in tijd die de schemering duurt.



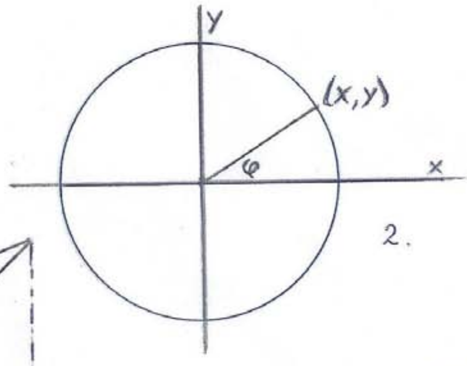
1a.



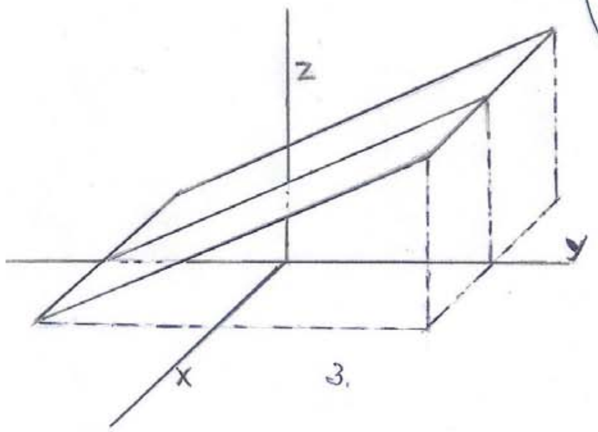
1b.



1c.



2.



3.

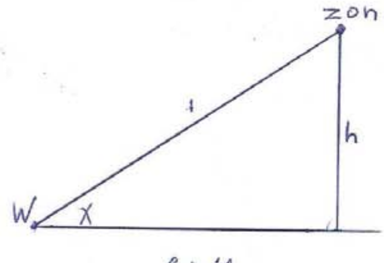


fig.4.

DE LENGTE VAN DE DAG EN DE NACHT

Materialen: bladen met gegevens over op- en onder- gaan van de zon in Stockholm en in Nederland , 2 tekeningenbladen

We gaan eerst, met de almanak gegevens, uitzoeken hoe lang de dag heeft geduurd in Stockholm in 1918 en in Nederland in 2011. Uiteraard zijn die lengtes heel verschillend in de loop van een jaar en op verschillende breedtegraden. We nemen telkens dagen die een week uit elkaar liggen.

@1 Zoek in de tabellen de tijden van zonsopgang en zonsondergang en vul die in. Bereken daarna de lengten van de dagen en daarna de verschillen van de tijden. Verdeel het werk! Welke bijzonderheden zijn jullie opgevallen?

We gaan nu theoretisch onderzoeken hoe de lengte van de nacht afhangt van de breedtegraad α van de plaats van de waarnemer W en de hoek β, de hoek tussen de richting naar de zon en het equatorvlak.

Op het tekeningenblad staat de aarde stereometrisch voorgesteld in figuur 1. N en Z zijn de polen, W is de waarnemer. W draait gedurende een dag langs cirkel WHKP.

De halve aarde ligt in de schaduw en W heeft zijn nacht van Q via K naar P. Op figuur 2 staat een doorsnede van de aarde door W. α is de noorderbreedte van W en β is de hoek tussen de richting naar de zon en het equatorvlak. De cirkel door WHKP staat gewenteld in figuur 3. De plaats waar de schaduwlijn CD het vlak WHKP snijdt is overgebracht naar de gewentelde cirkel.

We zoeken nu de verhouding van de lengte van boog QKP en de omtrek van de cirkel. Dat is de maat voor het deel van de dag dat het donker is bij W.

@2 Ga na dat de hoek van de lijn CD en NZ gelijk is aan β.

@3 Ga na dat $r = R. \cos \alpha$ en dat $s = R. \sin \alpha$ en dat $t = s. \tan \beta$.

@4 De hoek tussen MQ en MH is ϕ. Toon aan dat geldt $\sin \phi = \tan \beta \,.\, \tan \alpha$.

@5 Als ϕ in radialen genomen wordt, toon dan aan dat de gezochte verhouding gelijk is aan ($\frac{1}{2} - \phi/\pi$).

@6 Controleer dat, als de zon op het zuidelijk halfrond staat, de formules in 3 en 4 blijven gelden terwijl in 5 de verhouding wordt $\frac{1}{2} + \phi/\pi$.

@7 Controleer de formules in 5 en 6 als $\beta = 0$. Wat betekent dat voor de lengte van de dag en de nacht?

@8 Hoe lang duurt de nacht op 52 NB op 4 februari? (Flink afronden toegestaan).

	Stockholm					Nederland			
datum	zon op	zon onder	lengte dag	verschil		zon op	zon onder	lengte dag	verschil
4-2									
11-2									
18-2									
25-2									
4-3									
4-6									
11-6									
18-6									
25-6									
2-7									
7-10									
14-10									
21-10									
28-10									
4-11									

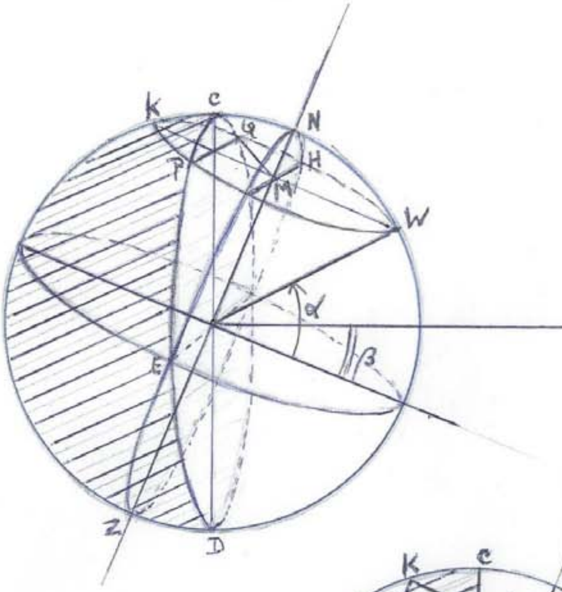


Fig. 1

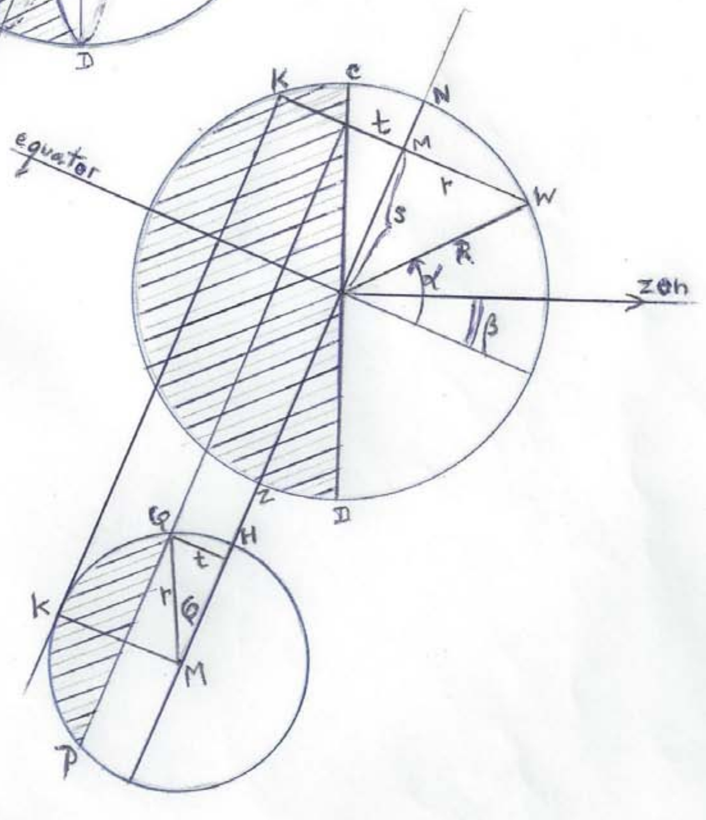


Fig 2

Fig. 3

TIJDSVEREFFENING

Materialen: doos met gleuf en pingpong-bal, schuimplastic bol met ijzerdraden ed, gradenboog, GR of ruitjespapier

Voor ons gevoel worden de dagen in november snel korter en in februari snel langer.

Vooral in de namiddag openbaart zich dat gevoel. We gaan nu onderzoeken of we hier een verklaring voor kunnen vinden, zonder al te precies op de ingewikkelde theorie in te gaan.

De begrippen *tijd, daglengte en kalenderindeling* hebben natuurlijk te maken met de manier waarop de aarde en de zon t.o.v. elkaar bewegen. Je kunt zeggen dat de aarde om de zon beweegt, soms is het handiger om de zon om de aarde te laten bewegen. Je kunt zeggen dat de aarde om zijn as draait, maar soms is het handiger om de aarde stil te zetten en zon en sterren te laten draaien.

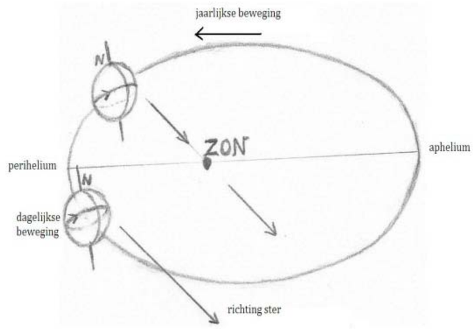
In het heliocentrisch wereldbeeld draait de aarde om de zon. De baan is een ellips, waarbij de zon in een van de brandpunten staat (eerste wet van Kepler). Het vlak door de baan van de aarde noemen we het *eclipticavlak.*

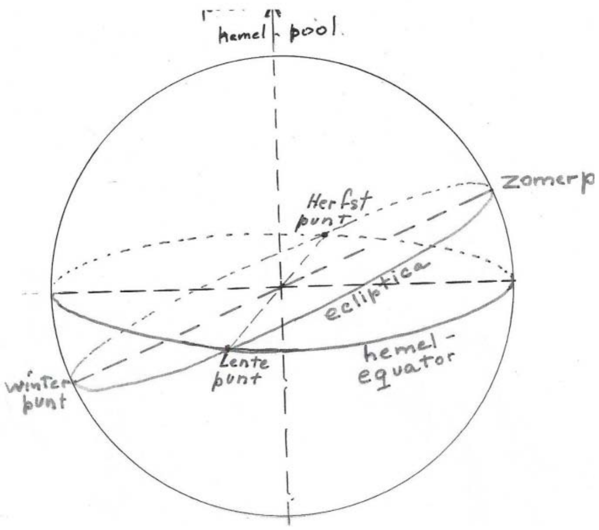
@1 Stel dat het pingpongballetje de aarde is. Hoe draait hij dan om zijn as om te bereiken dat de zon in het oosten opgaat?

@2 Omdat de as van de aarde schuin staat t.o.v. het eclipticavlak hebben we een zomer en een winter. Leg dat uit.

Perihelium en aphelium zijn de eindpunten van de lange as van de ellips. Het perihelium ligt iets dichter bij de zon. De aarde gaat in de noordelijke winter door het perihelium (zie tek).

Soms is het voor de verklaringen van de beweging van de zon handiger om de aarde centraal te zetten, en de zon om de aarde te laten draaien. Dat is een geocentrisch wereldbeeld. We bedoelen met de *hemelbol* een denkbeeldige bol, met de aarde als middelpunt, waarop de sterren, de zon de maan en de planeten rond bewegen. De *hemelequator* is de snijlijn van het vlak door de equator van de aarde met de hemelbol (zie tek).





Een *meridiaan* van een plaats is de grote cirkel op aarde door die plaats en de beide polen. Het vlak door de meridiaan snijdt de hemelbol in een grote cirkel, die we ook meridiaan noemen. Als een ster (en dus ook de zon) door de meridiaan gaat spreken we over *culmineren.* Door de dagelijkse draaiing van de aarde gaat een ster er 2 keer door. Er is zodoende een bovenste en een onderste culminatiepunt.

Een *sterrendag* is de tijd die verloopt tussen twee opvolgende doorgangen van een ster door zijn bovenste culminatiepunt. Pas op: nu hebben we dus de aarde stilstaand genomen en de sterren laten draaien.

Een *ware zonnedag* is de tijd tussen twee gelijksoortige doorgangen van de zon door de meridiaan. Dat bepaalt daarmee de *ware zonnetijd*, en dat is de tijd die een zonnewijzer aangeeft.

Een *middelbare zonnedag* is de tijd die verloopt tussen twee gelijksoortige meridiaan doorgangen van een denkbeeldige zon die eenparig (d.w.z. met constante snelheid) over de hemelequator beweegt.

@3 De gleuf in de doos heeft een ellipsvorm. Het is een sterk overdreven voorstelling van de ecliptica (de excentriciteit van de aardbaan is maar ongeveer 0,0017). De plaats van de zon is veel te excentrisch. Het is echter te proberen om de pingpong bal rond te laten gaan en te zien dat er een versnelling optreedt in de buurt van de zon. Deze veroorzaakt een grotere snelheid van de aarde die doorwerkt in het volgende (stijgende) stuk van de doos. Uiteraard is de echte oorzaak de aantrekkingskracht van de zon die in het perihelium net iets groter is dan in het aphelium, maar nu laten we de schuine stand van de doos dit effect nabootsen.

Een jaar telt afgerond 365 dagen. In een jaar zien we de zon dus 365 keer opkomen en ondergaan. In een jaar heeft de aarde ook eenmaal zijn baan om de zon afgelegd. Hoe vaak is de aarde dan om zijn as gedraaid? We gaan dat uitproberen met het pingpong-balletje en de doos.

@4   Neem een plaats W op aarde. Zet dat van de zon af, het is daar dus nacht. Laat de aarde nu, zonder draaiing om zijn as, zijn baan om de zon maken. Hoe vaak is het dag geweest in W?

We doen nu alsof een jaar uit 3 dagen bestaat. Eén persoon neemt het balletje en zet W op nachtstand. Hij of zij draait nu het balletje om zijn as en beweegt tegelijkertijd de baan rond de zon helemaal langs, en wel zó dat het gegeven punt 3 keer naar de zon gericht wordt en eindigt zoals hij begonnen is. Iemand anders telt hoe vaak het balletje om zijn as gedraaid is. De draaiingen t.o.v. de doos zijn sterredagen.

@5   Dus 3 zonnedagen zijn … sterredagen. En 365 zonnedagen zijn … sterredagen. Hoe lang duurt een sterredag?

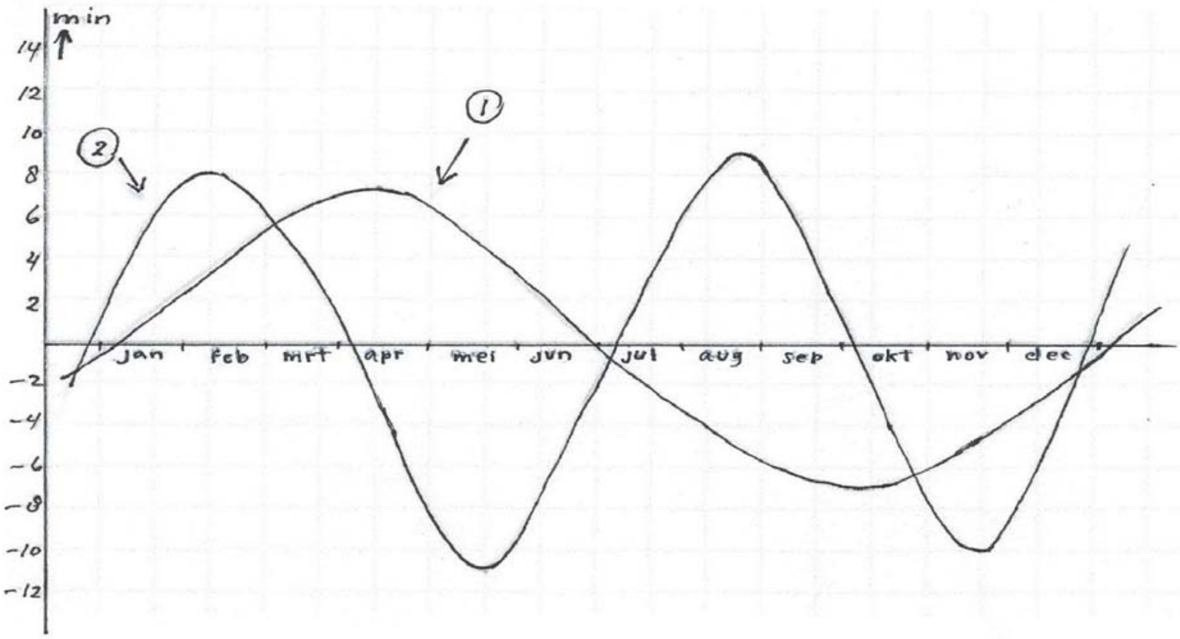
Je kunt dit ook op de volgende manier begrijpen: Als je het balletje (de aarde) met de meridiaan naar de zon richt en 360 draait is een sterredag voltooid, maar omdat het balletje tegelijkertijd ook een stukje van de ecliptica moet doorlopen kun je inzien dat het balletje verder moet draaien om de zon weer in de meridiaan te krijgen. Die laatste tijd behoort gemiddeld bij onze klok van 24 uur, en die dag op de klok is dus langer dan een sterredag.

@6   Ga na dat de aarde in het aphelium veel minder door moet draaien dan in het perihelium.

Twee opvolgende meridiaandoorgangen van de zon duren in onze winter vele minuten langer dan 24 uur en in onze zomer vele minuten korter dan 24 uur.

Je kunt dus ook zeggen dat bij de zonnewijzertijd, in de winter veel moet worden opgeteld om de middelbare tijd te krijgen en in de zomer juist tijd moet worden afgetrokken.

Het vermoeden is nu gerechtvaardigd dat er een periodieke functie aan ten grondslag ligt en wel één met een periode van één jaar. In grafiek 1 is aangegeven hoeveel minuten men bij de ware zonnetijd (zonnewijzer) op moet tellen om de middelbare tijd (onze klok) te krijgen.



Een geheel andere reden voor de tijdsvereffening is het schijnbare verschil in snelheid van de ware zon in zijn baan (ecliptica) en die van de denkbeeldige middelbare zon langs de hemelequator. De oorzaak hiervan is de helling van het eclipticavlak t.o.v. het equatorvlak.

Het *Lentepunt* is het snijpunt van de ecliptica en de hemelequator en wel op de plaats waar de zon weer naar het noordelijk halfrond trekt (zie tek. op vorige blz)

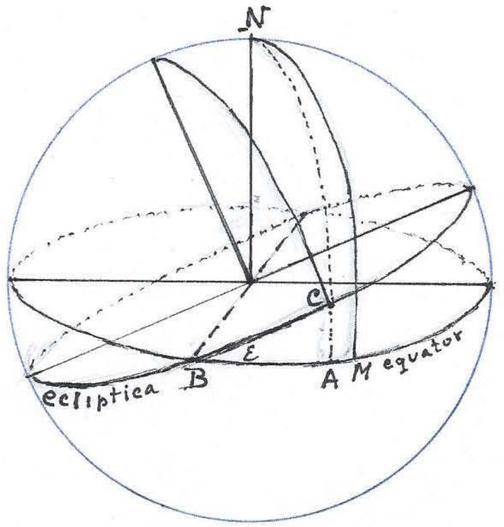
Neem de grote schuimplastic bol, die stelt de hemelbol voor. We nemen aan dat de zon eenparig langs de ecliptica (die met groen ijzerdraad is aangegeven) beweegt. Het paarse en rode lint zijn aangebracht op de assen van ecliptica en equator en wel waar die assen de hemelbol snijden.

@7 Welk lint hoort bij de ware zon en welke bij de middelbare zon?

@8 Begin nu met beide linten in het Lentepunt. Met behulp van een gradenboog kun je de linten 20 laten draaien vanuit hun aangrijpingspunt, vanaf het Lentepunt in de richting waarin de zon beweegt. Bekijk waar de ware en de middelbare zon zijn. Met de blauwe draad kun je de projectie bepalen van de ware zon op de equator. De blauwe draad, de ecliptica en de equator sluiten een rechthoekige boldriehoek in.

Doe dit allemaal ook voor 40 , 60 en 80 .

@9 Ga na dat in de eerste kwartcirkel de ware zon achter loopt op de middelbare zon en in de volgende kwart cirkel de ware zon juist voor ligt op de middelbare zon.



B = Lentepunt.

BC = hoek doorlopen door ware zon langs ecliptica.

BA = hoek doorlopen door schijnbare zon langs equator.

BM = hoek doorlopen door middelbare zon langs equator.

ε = hoek ecliptica en equator $\approx 23^\circ$.

BC	10	20	30	40	50	60	70	80
BA								
BC - BA								

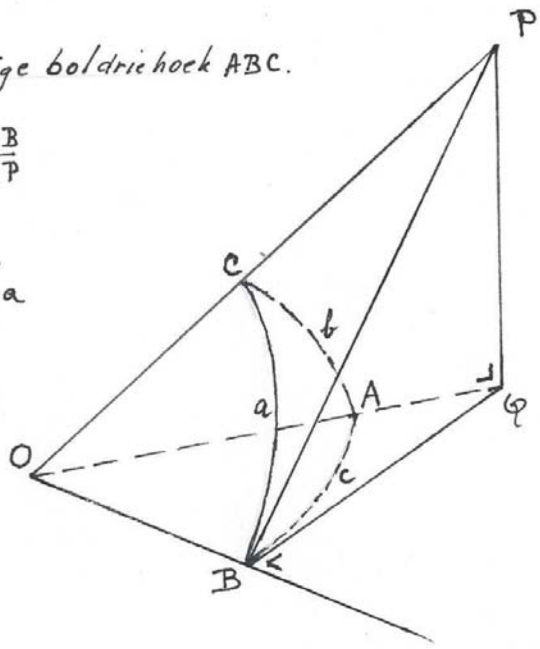
@10 De tabel hoort bij de boldriehoek uit opdracht 8. Neem de tabel over en vul deze in mbv de stelling voor een rechthoekige boldriehoek. Ga na dat het verschil van de afgelegde hoeken van de twee zonnen op een kwart bolcirkel eerst toeneemt en dan weer afneemt.

Beschouw de rechthoekige boldriehoek ABC.

$$\cos B = \frac{B\varphi}{BP} = \frac{B\varphi}{OB} \cdot \frac{OB}{BP}$$

$$\cos B = \tan c \cdot \frac{1}{\tan a}$$

$$\underline{\tan c = \tan a . \cos B}$$



Weer is het vermoeden gerechtvaardigd dat er ook bij dit verschijnsel een periodieke functie aan ten grondslag ligt en wel één met een periode van een half jaar. Zie nu grafiek 2.

@11 Neem de grafieken 1 en 2 en tel die twee op. Je kunt dat doen door de grafieken over te nemen en de y-waarden te meten en op te tellen. Je kunt ook voor beide de sinusformule bepalen en die optellen en op je grafische rekenmachine tekenen.

De somgrafiek is de grafiek die de tijdsvereffening aangeeft. Je zult zien dat er een top is in februari en een dal in november.

ZONNEWIJZERS

Materialen: grote witte bol met 2 stokjes erin, zaklantaarn, witte blaadjes, witte band met draden en schroefje, afgesneden doos met houten stok waarop elastiekjes en draad, kartonnen kegels, platte kartonnen schijf met lijnen erop, één kleine zonnewijzer (met kompasje erin), witte kegel met bijpassende doorsneden.

Zonnewijzers zijn er in allerlei soorten. In vroeger tijden, toen er nog geen klokken waren was men afhankelijk van de zonnewijzer voor de tijdsbepaling. Hierbij ging het altijd om lengte en richting van de schaduw.

Een gnomon is een paal(tje) loodrecht op de grond, waarvan de schaduw gebruikt werd voor tijdmeting. Denk aan alle obelisken in de zuidelijkere landen. Hierover is een aparte opdracht in onze workshop. Een belangrijke verbetering is de zonnewijzer, die een stijl heeft die evenwijdig met de aardas loopt. De schaduw valt op een ring of een vlak.

Bij equatoriale zonnewijzers staat de stijl loodrecht op deze ring of dat vlak. Er zijn ook zonnewijzers waarbij de schaduw op een horizontaal of een vertikaal vlak terecht komt.

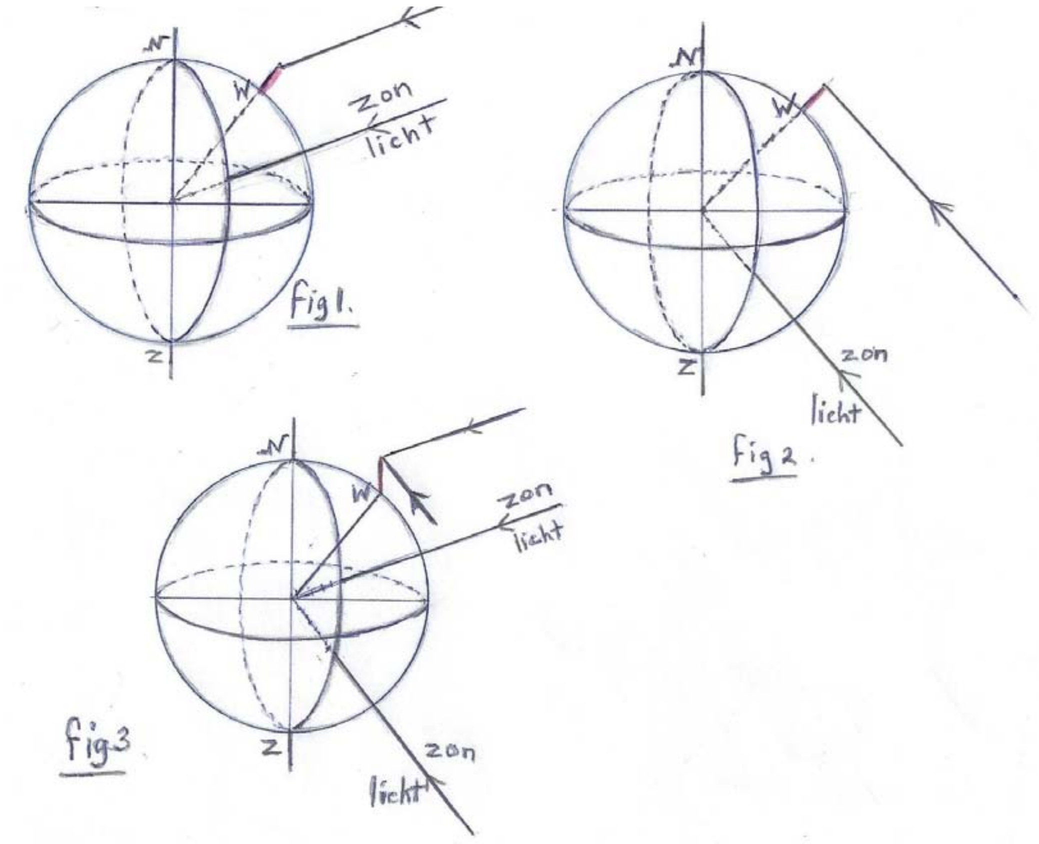
@1 Zie de plaatjes van zonnewijzers en bekijk de zonnewijzers die rondom staan en liggen.

We gaan eerst de verschillen onderzoeken tussen de schaduw van een gnomon en die van de stijl van een zonnewijzer.

Neem de grote witte bol, waarop de satehpen de Noordpool van de aarde aangeeft en het kleine stokje als gnomon dienst doet. Prik het vlakke blaadje om de gnomon, het blaadje stelt het horizontale vlak ter plaatse voor. De zaklantaarn stelt de zon voor. Richt het licht op de bol en wel zo dat de zon zich niet bevindt in het vlak van de meridiaan van de plaats waar de gnomon staat. Draai de aarde zo dat de zon voortdurend in hetzelfde meridiaanvlak blijft, tussen 23 noord en 23 zuid van de equator. Kijk naar de verandering van de schaduw in verschillende delen van het jaar op ongeveer dezelfde tijd.

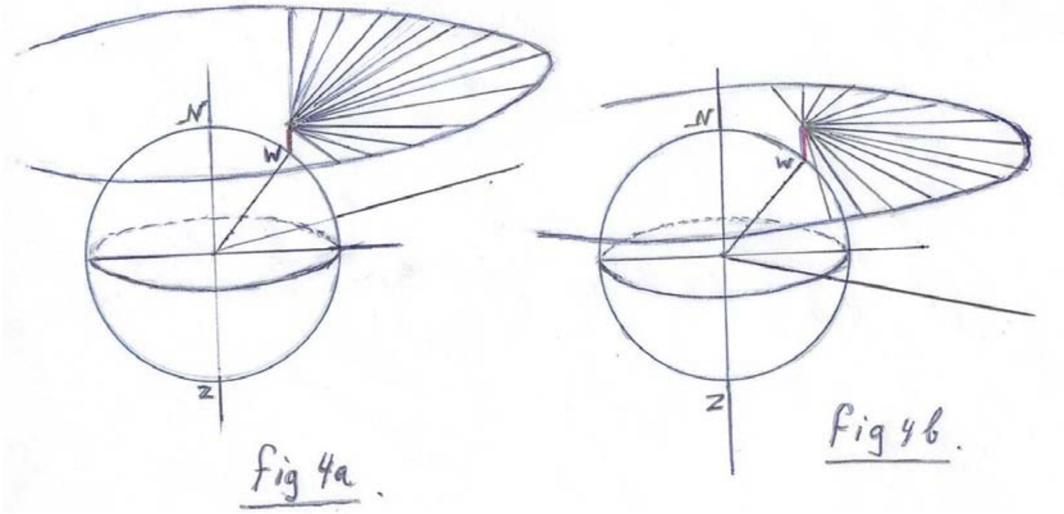
Doe precies hetzelfde als de gnomon vervangen is door een stijl die evenwijdig is met de aardas.

@2   Welke verschillen merk je op en probeer die te verklaren met de figuren 1, 2 en 3.



Ga nu werken met de witte band waar draden inzitten. We gaan er nu vanuit dat de aarde stil staat en dat de zon om de aarde draait. De witte band stelt de cirkel voor, waarlangs de zon gedurende een dag beweegt. De draden stellen de zonnestralen voor en de schroef moet voorzichtig als een stijl, evenwijdig met de aardas, in de bol gestoken worden bijv. op 50 noorderbreedte. Nu moet de band bewogen worden van 23 noord naar 23 zuid.

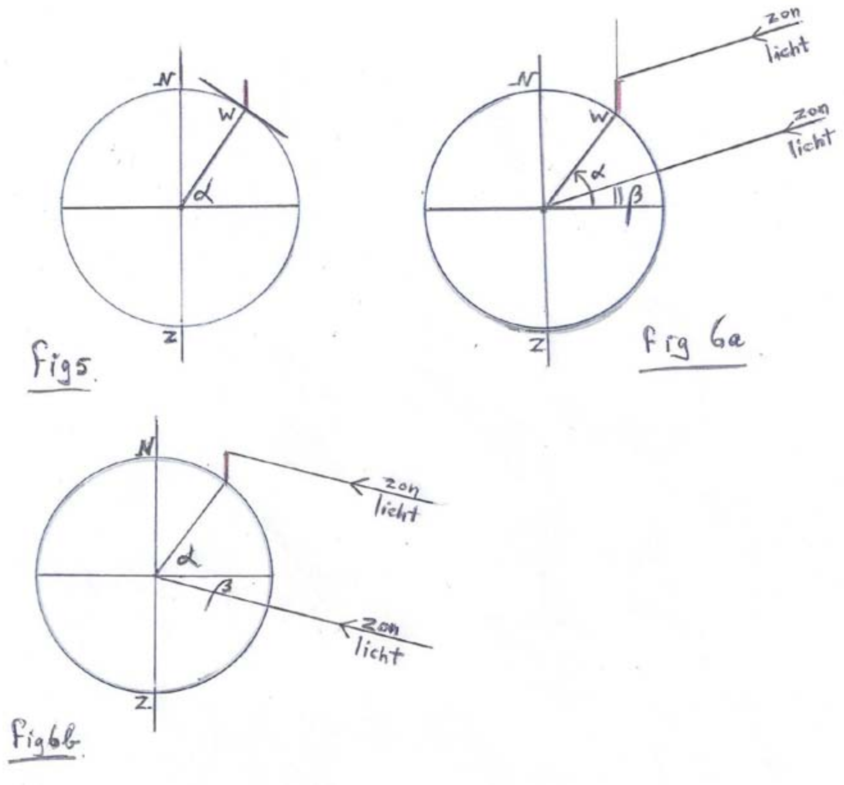
De bedoeling is te ontdekken dat de zonnestralen op de mantel van een kegel liggen. Je moet ook zien dat er twee soorten kegels zijn, nl. die met de opening naar het noorden en die met de opening naar het zuiden. Met de figuren 4a en 4b is één en ander ook te zien.



De plaats van de zonnewijzer W heeft geografische breedte α en de hoek tussen de equator en de richting van de zon is β.

@3 Zie figuur 5 en ga na dat de hoek van de as van de kegel en het horizontale vlak in W gelijk is aan α.

@4 De halve tophoeken van de kegels zijn gelijk aan $90 - \beta$. Zie fig. 6a en 6b. Ga na.



@5 Verklaar dat bij de equatoriale zonnewijzers de uurlijnen 15 graden uit elkaar liggen.

Neem nu de afgezaagde doos. Er zijn twee gaten in het verticale gedeelte. In het horizontale deel zit één gat. Een rond houten staafje doet dienst als stijl. Doe de stijl in het bovenste gat, hij maakt nu een hoek van ongeveer 50 met het horizontale. (Laat de elastiekjes en het draadje zitten).

Plaats het vlakke kartonnen schijfje, met uurlijnen om de 15 graden op het onderste elastiekje. Het moet zo liggen dat de schijf loodrecht op de stijl staat. De zonnestralen zouden de schaduw van de stijl op de kartonnen schijf werpen op een manier die het mogelijk maakt via de uurlijnen de tijd te bepalen. Wij willen echter de tijd bepalen via de doos. Leg nu een stuk wit papier op het horizontale vlak; jullie gaan proberen hierop de uurlijnen te tekenen. Plaats dus de stijl met schijfje eerst in het bovenste gat van het verticale deel van de doos en dan de onderkant in het gat in het horizontale deel.

@6 Breng mbv het draadje aan de stijl de uurlijnen over op het papier.

Je zou dit op dezelfde manier op de verticale kant kunnen doen.

Bij de kleine zonnewijzer met het kompasje zie je in de stijl een knoop zitten. De schaduw van die knoop kan verschillende krommen doorlopen. Dit zijn kegelsnedes. We hebben al gezien dat de zonnestralen op een kegelmantel liggen en dat er twee soorten kegels zijn.

@7 Haal de stijl uit het gat. Schuif een afgeknipte kartonnen kegel op de stijl boven het bovenste elastiekje. Dat kan op twee manieren. Doe daarna de stijl weer in het gat. De kromme, waarmee deze kegel tegen de verticale kant van de doos komt, is de lijn die de schaduw van de knoop doorloopt.

We doen nu eerst een stukje theoretische wiskunde.

@8 Gebruik een echte kegel als hulp bij het beantwoorden van de vragen die komen. Teken een kegel en snij deze kegel met een plat vlak, dat niet door de top van de kegel gaat. Soms is de snijlijn een hyperbool, soms een parabool, een ellips of een cirkel. Hoe groot is de hoek tussen het snijvlak en de as van de kegel in ieder van deze gevallen in vergelijking met de halve tophoek van de kegel?

Op zonnewijzers zie je soms ook de tekens van de dierenriem, dat zijn de sterrenbeelden waarlangs de zon beweegt als de schaduw de bijbehorende lijn doorloopt.

@9 Bekijk nu de liggende stenen zonnewijzer met de scheve stijl. Zoek uit wat er vreemd is aan deze zonnewijzer.

@10 Er staan nog meer zonnewijzers in de zaal waar iets vreemds mee is. Kunnen jullie vinden wat?

DE GNOMON

Materialen: tekeningenbladen, twee grote witte bollen met stokjes en kleine witte blaadjes, kartonnen knipsels van diverse vormen, grote doos met rond gat erin, een grote witte band met draden en een schroef, zaklantaarn

Duizenden jaren geleden hebben primitieve volkeren al de noodzaak ingezien van het vaststellen van de tijd. Men moest bij het verlaten van de hut, bijv. op zoek naar voedsel of brandhout, altijd zorgen dat men voor donker terug kon zijn. Men had de dagelijkse loop van de zon al behoorlijk in de gaten en zeker ook de samenhang met de lengten en richtingen van schaduwen.

Een gnomon is eigenlijk niet meer dan een paaltje in de grond loodrecht op het horizontale vlak, dat door de zon beschenen wordt en waarvan men de lengte en richting van de schaduw op de grond kan gebruiken voor tijdmeting. Zonder twijfel is dit de eerste vorm van een zonnewijzer. In de landen rond de Middellandse zee zijn nog altijd vele obelisken te bewonderen. Dat waren ook gnomons.

Wij gaan bij deze opdracht in onze workshop onderzoeken hoe het puntje van de schaduw verloopt en of dat overal op de wereld gelijk is.

@1 Heb je zonder verder te lezen een vermoeden over dat verloop?

Het is duidelijk dat de schaduw zo kort mogelijk is als de zon zijn hoogste stand heeft bereikt.

Die plek is ook te bepalen door twee plaatsen vast te leggen waar de schaduw even lang is.

@2 Hoe doe je dat en welke belangrijke richting ter plekke is daarmee gevonden?

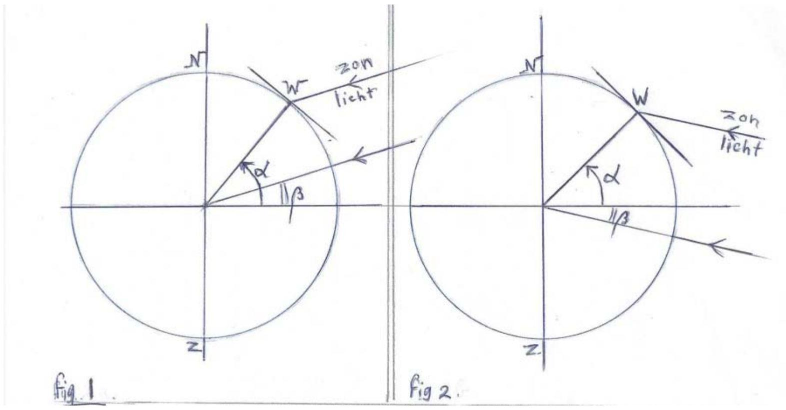
@3 Stel je nu eerst voor dat je buiten in de zon staat. Tussen welke twee lijnen meet je dan de hoogtehoek van de zon?

Stel dat de hoek tussen het equatorvlak en de richting van de zon gelijk is aan β (zie fig 1).

@4 Hoe groot kan β zijn?

We gaan eerst het verband zoeken tussen die hoogste stand van de zon in een plaats W (waarnemer) en de geografische breedte α van de plaats W.

We nemen voor het gemak aan dat de zonnestralen evenwijdig invallen en dat de zon puntvormig is. Dat is natuurlijk niet zo. Je kunt op een zonnige dag aan je eigen schaduw zien dat die aan de rand minder donker is dan in het midden.



@5 Bereken als de zon op het noordelijk halfrond staat met behulp van de figuur 1 het verband tussen de hoogste stand van de zon en α en β.

@6 Idem voor de zon op het zuidelijk halfrond (figuur 2).

@7 Bereken voor een plaats W op 52 NB (noorder breedte) de hoogste en de laagste zonshoogte op het midden van de dag in de loop van een jaar.

De afmetingen van de aarde zijn heel erg klein t.o.v. de afstand tot de zon. Als we aan zouden nemen dat de top van de gnomon en de baan van de zon gedurende een dag in een plat vlak lagen dan zou de te bepalen baan een rechte lijn zijn en dat is meestal niet zo. We zullen dus iets nauwkeuriger moeten werken met de vorm van de verzameling stralen van de zon die gedurende een dag de top van de gnomon verlichten.

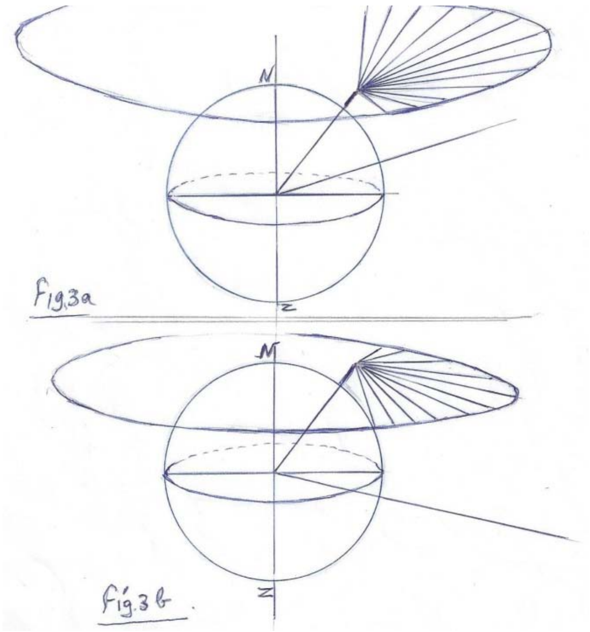
@8 Wanneer is die baan een rechte lijn?

Pak nu de witte band waar draden in gemonteerd zijn. De witte band stelt de cirkel voor waarlangs de zon gedurende een dag beweegt. We gaan er nu dus vanuit dat de aarde stil staat en de zon om de aarde draait. De draden zijn de zonnestralen en de schroef waar de zonnestralen door gaan is de gnomon

De grote witte bol met de twee stokjes stelt de aarde voor. De sateh-pen staat op de Noordpool, het kleine stokje is onze plaats op aarde W. Zet de gnonom voorzichtig in het gat van de bol.

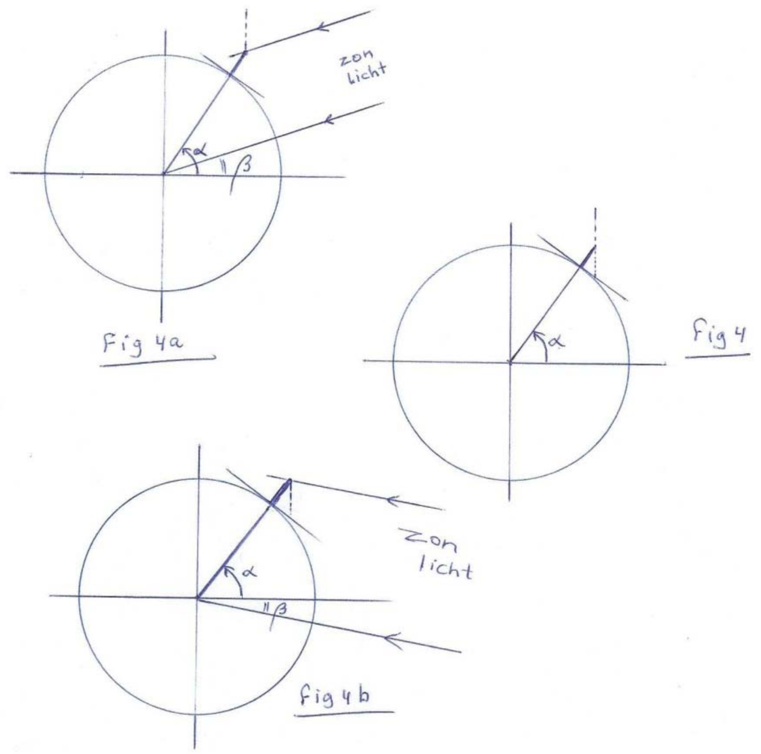
De band moet je nu bewegen, loodrecht op de aardas en wel zo dat de zonnestralen van 23 graden uit het noorden tot 23 graden uit het zuiden van de equator komen.

De zonnestralen vormen steeds een kegel. Met de figuren 3a en 3b is ook te zien dat er twee soorten kegels te onderscheiden zijn. De ene heeft de opening naar het noorden en de andere naar het zuiden. De as van de kegel is niet de gnomon, maar een lijn evenwijdig met de aardas (ga na).



@9   Ga na dat de hoek van de as van de kegel met het horizontale vlak in W gelijk is aan α. Zie hiervoor figuur 4.

@10   Ga met de figuren 4a en 4b na dat de halve tophoek van beide kegels gelijk is aan 90   - β.



Op de aardbol kun je nu in W een horizontaal vlak aanbrengen (een papiertje), zodat de gnonom loodrecht op dit vlak staat.

Met een lantaarn gaan we de schaduw van de gnomon onderzoeken. We laten nu de zon op een vaste plaats en we gaan de aardbol draaien.

In W is het niet midden op de dag, dus de zon staat niet in het meridiaanvlak van W maar boven een andere meridiaan. Boots dit na met de zaklantaarn. We houden in gedachten dezelfde tijd op de dag aan, dus de zon blijft boven dezelfde meridiaan staan.

In de loop van het jaar staat de zon steeds wel op een andere “hoogte”. We wiebelen de aardbol zodanig dat de zon boven diezelfde meridiaan blijft en laten de Noordpool eerst iets naar de zon toe hellen en daarna iets van de zon af. Kijk goed naar de schaduw van de gnonom.

@11 Wat merk je op aan de lengte en de richting van de schaduw?

@12 Ga met de figuren 5a en 5b na, dat de stand van de gnomon er de oorzaak van is dat de schaduwen in andere vlakken liggen.

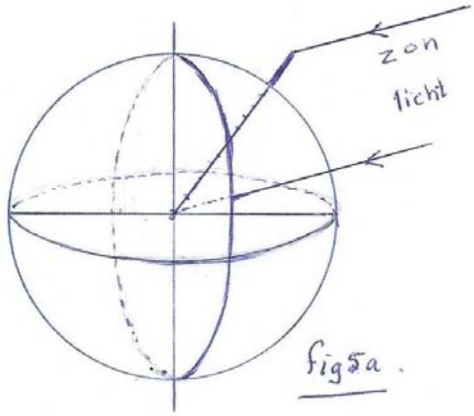


fig 5a.

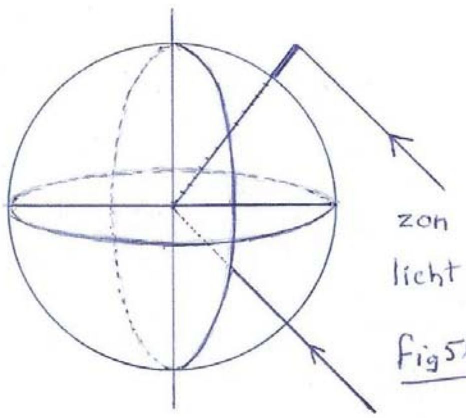


Fig 5b

Bij een vaste stand van de aardas laten we nu de aardbol draaien om te zien hoe de punt van de schaduw van de gnomon beweegt in de loop van een dag.

We doen nu eerst een stukje theoretische wiskunde.

@13 Teken een kegel. Snij deze kegel met een plat vlak, dat niet door de top van de kegel gaat. Soms is de snijlijn een hyperbool, soms een parabool, een ellips of een cirkel. Hoe groot is de hoek tussen het snijvlak en de as van de kegel in ieder van deze gevallen in vergelijking met de halve tophoek van de kegel? Gebruik eventueel een witte kegel met kartonnen kegelsnedes.

Neem nu de doos met het grote ronde gat en een van de bijgeleverde kartonnen kegels. De doos stelt het horizontale vlak voor en de kegel de zonnestralen.

Door een kegel op verschillende manieren gedeeltelijk in het gat te stoppen kun je de verschillende situaties nabootsen. Tegen de kegel kun je in het horizontale vlak mogelijke vormen van schaduwlijnen schuiven.

@14 Kijk nog eens terug naar @9 en @10.

@15 Ga na dat voor de meeste plaatsen op aarde de schaduwkromme van de punt van de gnonom in de loop van een dag een van de takken van een hyperbool is.

@16 Kan de schaduwkromme een cirkel zijn?

@17 Ga na dat de kromme een parabool is op een dag waarop geldt dat $\alpha + \beta = 90$

@18 Waar zal die parabool te zien zijn op 21 juni?

@19 Hoe ziet de kromme er uit op 21 juni als we noordelijker gaan kijken?

@20 Ga na dat de fout die we voor de halve tophoeken maakten door de as van de kegels bij de gnomon te nemen i.p.v. bij de aardas zelf, te verwaarlozen is (afstand aarde - zon is ongeveer 150 miljoen kilometer en straal aarde is ongeveer 6000 kilometer).

ANTWOORDEN

<u>Kalenders</u>

2 1 keer per 4 jaar, 100-tallen niet, 400-tallen wel. 1900 was geen schrikkeljaar, 2000 wel

3 6 * 9 = 54 = 6 (mod12)   4 9 + 6 = 1 (mod7) 6 * 9 = 5 (mod7) 6 – 9 = -3 = 4 (mod7)

5 zaterdag   6 zaterdag   7 zondag   8 zondag

9 2012, 2016, 2020,2024 dus 4 schrikkeljaren. Donderdag

10 9 jr en 2 schrikkel, dus 11 dagen = 4 (mod7) dus zondag

11 9 jr en 3 schrikkel dus 12 dagen = 5 (mod7) dus maandag   12 vrijdag

13 en 14 Betreft 2013   dag   lengte vd vorige mnd   opgeteld

1 jan	di		0
1 feb	vr	jan = 31 = 3 (mod7)	3
1 mrt	vr	feb = 28 = 0	3
1 apr	ma	mrt = 31 = 3	6 = -1
1 mei	wo	apr = 30 = 2	1
1 jun	za	mei = 31 = 3	4
1 jul	ma	jun = 30 = 2	6 = -1
1 aug	do	jul = 31 =3	2
1 sep	zo	aug = 31 = 3	5 = -2
1 okt	di	sep = 30 = 2	0
1 nov	vr	okt = 31 = 3	3
1 dec	zo	nov = 30 = 2	5

Uitleg: januari telt 31 dagen, 31 = 3 (mod7), dus data in febr vallen 3 dagen later in de week dan die in januari. Als je een dag in bijv. mei wilt weten, moet je de verschuivingen van januari, februari, maart en april optellen. We werken dus cumulatief.

AFSTANDEN

3 uitgaande van een globe met diam = 20 cm: diam maan ≈ 5,5 cm en afstand (aarde,maan) ≈ 6m

5 Diam speld = 3 mm

1,5 mm	6370 km
x	696 000 km
y	150 milj km

x = 1,5 / 6370 * 696 000 mm = 163 mm ≈ 16 cm   y = 1,5 / 6370 * 150 milj mm ≈ 35322 mm ≈ 35 m

7 tan α = 1738 * 2 / 368000   α ≈ 0,54   tan α ≈ 696000 * 2 / 150 milj   α ≈ 0,53

8 1 lichtjaar = 365 *24 * 60 * 60 * 300 000 km ≈ 9,4 *   km

9 9,4 *   / 150 000 000 = 63072 ≈ 63 000 keer   150 000 000 / 300 000 sec = 500 sec ≈ 8 min

10 tan (1 sec) = 150 milj / x   x * 150 milj / tan (1/3600) ≈ 3 *   km

D (zon, α-centauri) ≈ 2,4 *   km ≈ 156 800 AE

11

8 min	3 mm
100 000 lichtjaar	18669 km

HOE LAAT IS HET?

1 1 uur = 15   1 = 4 min   2 4 30' * 4 min = 4,5 * 4 min = 18 min

3 Volgens 1 gaat de zon bij iedere graad verder OL 4 min eerder op.

4 7 02' – 3 35' = 3 27' Ong 3,5 * 4 min = 14 min

5 90 OL = Bangladesh 90 * 4 min = 360 min = 6 uur eerder, dus om 6.00 GMT

90 WL = New Orleans 6 uur later, dus om 18.00 GMT

6 180 * 4 min = 12 uur Fiji eilanden 0.00 u en 24.00 u GMT

7 Datumgrens Ja, op 180 ligt weinig land   9 Horloge = MET of MEZT zonnewijzer = WLZ

10 Zonnewijzer 16.00 = WLZ Noordwijk 16.14 = MLZ

11 en 12 Greenwich 16u14 –17min = 15u56 GMT = 16.56 MET

ZONSOPKOMST

2 Zowel de richting naar de zon als de richting naar het oosten zijn bij zonsopkomst lijnen die liggen in het horizontale vlak dat in B raakt aan de aardbol.

3   De pen naar het oosten staat loodrecht op vlak OBC. De pen naar de zon staat loodrecht op vlak OBA. De hoek van de twee vlakken is dus de hoek van de twee pennen.

4   bg a = 90 - breedtegraad B = 90 - 52 = 38 .   bg b = 23 omdat OC en OA resp. loodrecht staan op de equator en de lijn naar de zon.

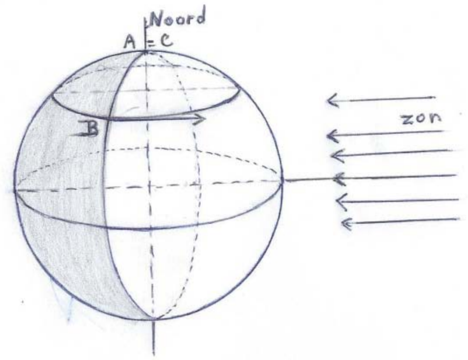
6   ∠(OAB,OBC)= ∠B in de bovenste figuur. Uit cos a = cos c .cos b volgt cos c = 0,856 en tan c = 0,6038. Uit tan c = tan a . cos B volgt cos B 0,7728 dus ∠B = 39,4 . De zon komt in B 39,4 noordelijker dan oost op.

7   Als α = 67 dan is bg a =23 en ook bg b = 23 . Uit cos a = cos c . cos b volgt dan cos c = 1 dus c = 0 . Uit tan c = tan a . cos B volgt dan ∠ B = 90 . De zon komt in het noorden "op".

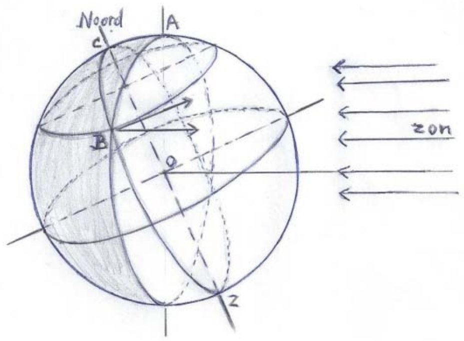
8   De zonnestralen staan loodrecht op de poolas. b = 0 en als B ligt op 52 is a = 38 dus volgt uit cos a = cos c . cos b dat c = 38 . Uit tan c = tan a . cos B volgt cos B = 1 dus ∠ B = 0 . De zon komt in het oosten op. Als B op de equator ligt dan is b = 0 , c = 90 , a = 90 en ∠ B = 0 dus weer zon komt op in het oosten (zie tek.).

9   Als B op 52 NB ligt en de zon is op – 23 dan geldt hetzelfde als bij 6 alleen komt de zon dan 39,4 ten zuiden van het oosten op. Zie ook tekening van deze situatie.

8.



9.



DE BAAN VAN DE ZON

1   De hoogtehoek van de zon is de hoek tussen een lijn van de waarnemer naar de horizon en een lijn naar de zon. Deze kan op verschillende manieren worden bepaald. Op internet ziet men bijv bij zonsopkomsttijden grote verschillen tussen "civil-opkomst", "nautical-opkomst"en "astronomical-opkomst". Je kunt dus een lijn naar de bovenkant van de zon kiezen, maar ook naar het midden of naar de onderkant. Hierdoor kunnen grote verschillen ontstaan. Als we de zon puntvormig nemen (voor het gemak) dan gaan we uit van het midden.

2 $-23{,}5 \leqq \beta \leqq +23{,}5$.
3 $90 - \alpha + \beta$ Zie tekeningenblad antwoorden gnomon 5 en 6.
4 $90 - \alpha - \beta$ (of $90 - \alpha + \beta$ als β negatief wordt genomen. Idem.
5 90 – 52 +23,5 = 61,5 en 90 – 52 – 23,5 = 14,5 dus 14,5 ≦ hoogte zon ≦ 61,5 .
6 –
7 Een sinusoïde.
8 $x = r.\cos\phi$ en $y = r.\sin\phi$.
9 De snijlijn met het (y,z)-vlak heeft vgl. $z = c + p.y$. Bij ieder punt (y,z) op die lijn levert elke x-waarde een punt in het vlak omdat het vlak evenwijdig is met de x-as.
10 $z = c + p.r.\sin\phi$.
11 De laagste zonnestand = $90 - \alpha - \beta = 14{,}5$, dus 14,5 onder de horizon.
12 $h = \sin\chi = \sin 61{,}5 = 0{,}88$.
13 $h = \sin\chi = \sin(-14{,}5) = -0{,}25$.
14 a = (0,88 +0, 25)/2 = 0,565 d = (0,88 – 0, 25)/2 = 0,315 dus $y = 0{,}565 \sin((\pi/12)(x-6)) + 0{,}315$.
15 Snijpunten met x-as: 3,73 en 20,26 uur dus daglengte 16,52 uur.
16 Voor Caïro: $y = 0{,}79\sin((\pi/12)(x-6)) + 0{,}2$. Snijpunten x-as: 5,02 en 18,8 uur. Daglengte 13,78 uur.
17 Trondheim: $y = 0{,}415 \sin((\pi/12)(x-6)) + 0{,}355$. Snijpunten 2,08 en 21,9 dus daglengte 19,82

Overigens op internet gevonden: daglengte op 21 juni in Nederland 16u51,Cairo 14u05 en Trondheim 19u07

DE LENGTE VAN DE DAG EN DE NACHT

1 Zie tabel. In St. gaat de verandering in voor- en najaar sneller, in St zijn de dagen in juni ong 2 uur langer, in St valt de dag veel vroeger

2 De benen van de hoek staan loodrecht op de benen van de hoek tussen equator en richting zon.

3 KW is evenwijdig met de equator dus de hoek bij W is α. Hieruit volgt dat $r = R.\cos\alpha$ en $s = R.\sin\alpha$.

$\tan\beta = \tan\angle(CD, NZ)$. Dus $\tan\beta = t/s$ en dus $t = s.\tan\beta$.

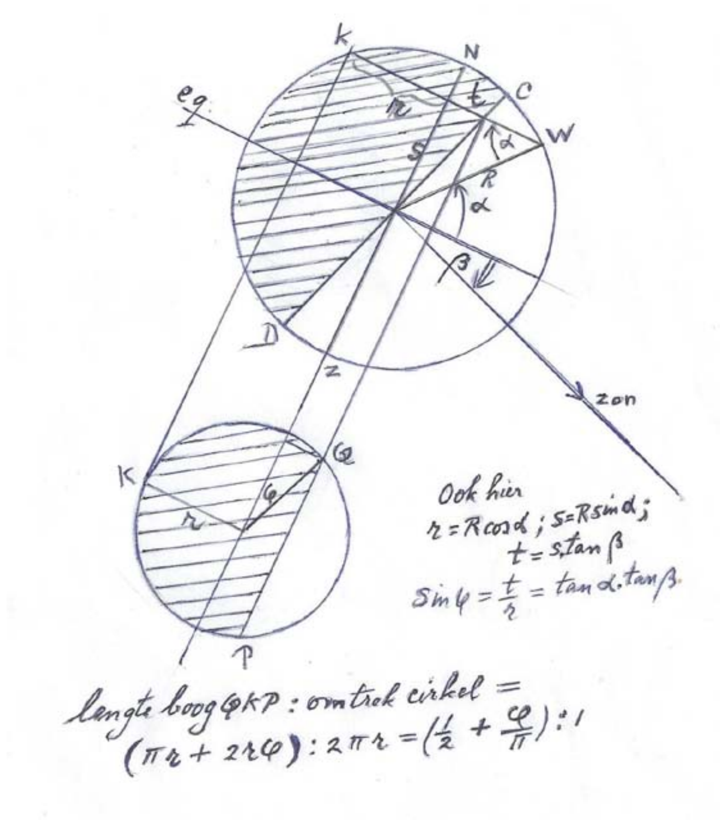
4 $\sin\phi = t/r = (s.\tan\beta)/(R.\cos\alpha) = (R.\sin\alpha.\tan\beta)/(R.\cos\alpha) = \tan\alpha.\tan\beta$.

5 Lengte boog QKP : omtrek cirkel = $(\pi.r - 2.r.\phi) / 2.\pi.r = (½ - \phi/\pi) : 1$.

6 Zie volgende bladzijde

7 Als β = 0 dan is t = 0 en ϕ = 0. Dus tan β = 0 en sin ϕ = 0. ½ = ϕ / π = ½ , dus lengte dag = lengte nacht

8 Op 4 februari in een plaats op 52 NB zoeken we eerst β. De zon keert als het ware om op 21 december. De beweging van de zon in noord zuid richting is bij de omkering iets trager, dus ondanks het feit dat 4 februari midden tussen 21 december en 21 maart ligt, is de zon nog niet halverwege naar de evenaar. We kiezen β = 14 (zuid). $\sin\phi = \tan\alpha . \tan\beta = \tan 52 . \tan 14 = 1{,}28 . 0{,}25 = 0{,}32$. Dan is ϕ = 0,32 rad.en de formule geeft voor de verhouding 6:10. Daaruit volgt een nacht van 14 uur en 24 min. Met de tabel hadden we voor de dag 9 uur en 17 min. Dus 14 uur en 43 min nacht.



6

TIJDSVEREFFENING

1 Als je van boven de Noordpool op de aarde kijkt draait de aarde linksom.

2 Omdat de aardas scheef staat t. o. v. het eclipticavlak zal de zon gedurende een halfjaar boven het noordelijk halfrond staan (onze zomertijd) en gedurende het andere halfjaar boven het zuidelijke halfrond (onze wintertijd).` 4 1 keer

5 3 zon = 4 ster 365 zon = 366 ster Een sterredag is dus 365/366 –ste deel van een zonnedag.

Verschil is dus 1/366 . 24. 60 minuten ≈ 4 minuten.

6 In het aphelium gaat de aarde iets langzamer dan in het perihelium omdat het iets verder van de zon ligt. Hierdoor moet de aarde in het aphelium minder ver doordraaien dan in het perihelium.

7 De ware zon (paars) beweegt langs de ecliptica en de middelbare zon (rood) langs de equator.

9 klopt en symmetrie

10

BC	10	20	30	40	50	60	70	80
BA	9,2	18,5	28,0	37,7	47,6	57,9	68,4	79,2
BC - BA	0,8	1,5	2,0	2,3	2,4	2,1	1,6	0,8

11 Zie in tekst HOE LAAT IS HET ?

ZONNEWIJZERS

2 Zowel bij de gnomon als bij de zonnewijzer verandert de lengte van de schaduw. Bij de gnomon verandert ook de richting van de schaduw. Dit komt omdat het vlak door de gnomon en de zonnestralen telkens anders

ligt. Bij de zonnewijzer is de stijl evenwijdig met de aardas en dus evenwijdig met het meridiaanvlak waarin de zon zich bevindt. Daarbij zullen dus de zonnestralen en de stijl telkens in hetzelfde vlak liggen.

3 en 4   Zie antwoorden Gnomon 9 en 10.

5   Aangezien de stijl evenwijdig is met de aardas, de ring loodrecht staat op de stijl en de zon in een dag (ongeveer) beweegt in een vlak loodrecht op de stijl zal de schaduw gedurende een dag regelmatig verlopen. Dat betekent dus in een uur 360 /24 = 15 .

8   Zie antwoord Gnomon 13

9   Als je de hoeken meet tussen de uurlijnen op de grijze horizontale zonnewijzer dan blijken die constant (ongeveer) 15 te zijn terwijl het geen equatoriale zonnewijzer is.

10   Bij verschillende zonnewijzers is de stand van de stijl merkwaardig.

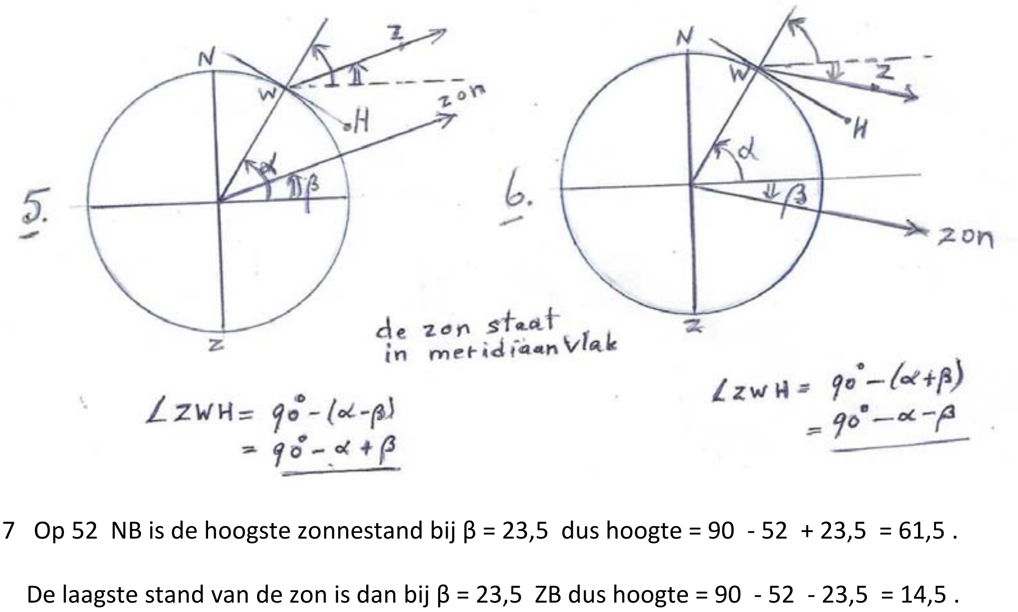
<u>GNOMON</u>

2   De bissectrice van de hoek gevormd door de twee even lange schaduwen geeft de richting noord aan. Je krijgt zo het meridiaanvlak ter plaatse.

3   De hoogte van de zon is de hoek tussen de richting naar de horizon en het hoogste punt van de zonneschijf.

4   Voor β geldt: -23,5 ≦ β ≦ +23,5 Als we β niet negatief nemen geldt op NB en ZB dat: β≦ 23,5 .

5 en 6   Zie tekeningen.

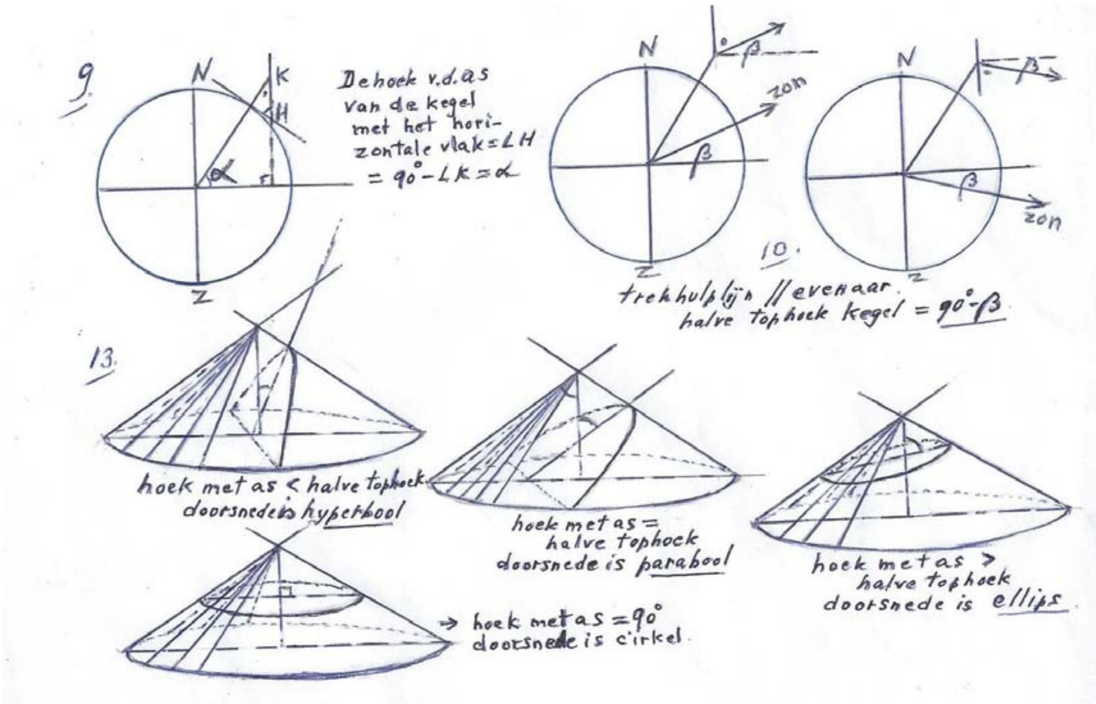


7   Op 52 NB is de hoogste zonnestand bij β = 23,5 dus hoogte = 90 - 52 + 23,5 = 61,5 .

De laagste stand van de zon is dan bij β = 23,5 ZB dus hoogte = 90 - 52 - 23,5 = 14,5 .

8   Als de zon boven de evenaar staat zal de schaduwlijn een rechte lijn zijn

9 en 10   Zie tekeningen.



11 De lengte en de richting van de schaduw veranderen bij de gnomon. Bij de zonnewijzer verandert alleen de lengte.

12 De gnomon is niet evenwijdig met het meridiaanvlak waar de zon zich in bevindt. De zonnestralen en de gnomon liggen dus telkens in verschillende vlakken.

13 Zie tekeningen.

15 Volgens 9 is de hoek van de as van de kegel en het horizontale vlak gelijk aan α. Volgens 10 is de halve tophoek van de kegel gelijk aan 90 - β. Volgens 13 is de kromme dus geen hyperbool als geldt:

$\alpha \geqq 90 - \beta \geqq 90 - 23{,}5 = 66{,}5$. Dit geldt maar voor weinig plaatsen op aarde.

16 Volgens 13 is de kromme een cirkel als α = 90 dus op de polen.

17 Volgens 13 is de kromme een parabool als α = 90 - β dus als: α + β = 90 .

18 Op 21 juni is β = 23,5 dus α = 66,5 en dat is op de Noordelijke poolcirkel.

19 Gaan we noordelijker dan is op 21 juni 90 - β = 66,5 en α > 66,5 dus α > halve tophoek kegel en dus is volgens 13 de kromme een ellips.

20 Zie tekening.