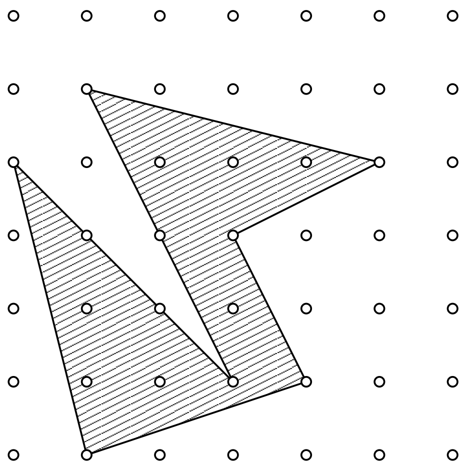
Sommige wiskundige stellingen zijn zo fantastisch simpel en elegant, dat je je afvraagt: "Waarom ben ik *daar niet op gekomen!" Dit stukje gaat over precies zo'n stelling: eenvoudiger dan de stelling van Pythagoras, maar onbekend zelfs bij veel professionele wiskundigen. De stelling wordt vernoemd naar haar 'ontdekker': de Oostenrijkse wiskundige wiskundige Georg Alexander Pick, geboren in 1859 in Wenen en omgekomen in 1942 in het concentratiekamp Theresienstadt, waarheen hij op 82–jarige leeftijd om zijn joodse afkomst gedeporteerd werd.*

De stelling van Pick

Dion Gijswijt



Figuur 1. Een roosterveelhoek. Bereken de oppervlakte van deze roosterveelhoek. Als je denkt dat dit een lange en misschien wel ingewikkelde rekenpartij wordt, dan heb je het mis! Volgens de stelling van Pick is het slechts een kwestie van tellen.

Dit stukje gaat over *roosterveelhoeken*. Dat zijn veelhoeken waarvan de hoekpunten roosterpunten zijn, zoals de roosterzevenhoek in figuur 1. Probeer nu eens, voordat je verder leest, de oppervlakte van deze figuur te bepalen.

Zelf zou ik het probleem misschien zo hebben aangepakt: splits de figuur op in driehoekjes en bepaal vervolgens de oppervlakte van elk van de driehoekjes. Als we van een driehoek de coordinaten van de hoekpunten kennen, dan kunnen we immers zijn oppervlakte uitrekenen. Er is echter een andere, wonderbaarlijk simpele methode om achter de oppervlakte te komen. We hebben geen rekenmachine of pen en papier nodig, we hoeven slechts te tellen! De methode is als volgt. Tel het aantal roosterpunten op de rand van de figuur, dat zijn er 10. Tel ook het aantal roosterpunten in het inwendige van de figuur, dat zijn er 7. De oppervlakte van de figuur is dan $7 + \frac{10}{2} - 1 = 11$. De stelling van Pick zegt dat deze truc altijd werkt:

Stelling. *Als een roosterveelhoek r roosterpunten op de rand heeft en i in het inwendige, dan is de oppervlakte gelijk aan* $i + r/2 - 1$.

Een bewijs

De stelling van Pick *gebruiken* is één, maar deze *bewijzen* is een heel ander verhaal. De kunst is het bewijs zo op te zetten dat het niet alleen voor eenvoudige roosterfiguren, zoals rechthoeken en driehoeken geldt, maar *alle* denkbare veelhoeken dekt, hoe complex ook. Het is handig om het getal dat in de stelling van Pick voorkomt een naam te geven.Voor een roosterveelhoek V met i roosterpunten in het inwendige en r roosterpunten op de rand, definieren we het *Pickgetal* $\mathrm{Pick}(V)$ van de veelhoek als het getal $i + \frac{r}{2} - 1$. We staan dus voor de opdracht om te bewijzen dat voor iedere roosterveelhoek V geldt: $\mathrm{opp}(V) = \mathrm{Pick}(V)$.

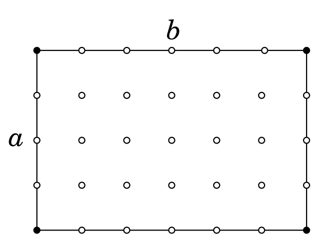
Een belangrijk ingrediënt in het bewijs is dat zelfs de meest complexe roosterveelhoek han worden opgebouwd door roosterdriehoekjes aan elkaar te leggen. De strategie is nu om de volgende twee beweringen te bewijzen:

(1) Voor iedere roosterdriehoek geldt $\mathrm{opp}(V) = \mathrm{Pick}(V)$.

(2) Als een roosterveelhoek A is opgebouwd is uit twee kleinere roosterveelhoeken B en C, dan geldt: $\mathrm{Pick}(A) = \mathrm{Pick}(B) + \mathrm{Pick}(C)$.

Neem nu in gedachten een willekeurige roosterveelhoek. We kunnen deze opbouwen door een aantal roosterdriehoekjes aan elkaar te leggen. De oppervlakte van de roosterveelhoek is de som van de oppervlaktes van de roosterdriehoekjes. Volgens (1) is dit gelijk aan de som van de Pickgetallen van de driehoekjes, en volgens (2) is dit weer gelijk aan het Pickgetal van de hele roosterveelhoek. Daarmee is de stelling van Pick bewezen.

Rechthoeken



Figuur 2. Picks stelling geldt voor rechthoeken

Om aan te tonen dat de stelling van Pick waar is voor roosterdriehoeken, is het handig om eerst te kijken naar een nog eenvoudiger type roosterveelhoeken: rechthoeken waarvan de zijden parallel lopen aan de coordinaatassen. Beschouw maar eens zo'n roosterrechthoek R waarvan de zijden lengte a en b hebben (zie figuur 2). Het aantal roosterpunten in het inwendige is gelijk aan $i = (a-1)(b-1)$ en het aantal roosterpunten op de rand is gelijk aan $r = 4 + 2(a-1) + 2(b-1)$. Dus

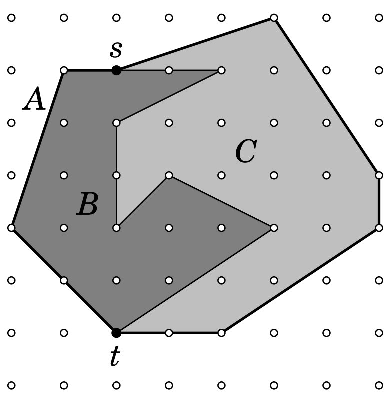
$$\begin{aligned}
\mathrm{Pick}(R) &= i + r/2 - 1 \\
&= (ab - a - b + 1) + (2 + a - 1 + b - 1) - 1 \\
&= ab \\
&= \mathrm{opp}(R).
\end{aligned}$$

De stelling van Pick geldt dus voor dit soort rechthoeken. Om nu te bewijzen dat de stelling van Pick ook geldt voor roosterdriehoeken, blijkt het handiger te zijn om eerst deel (2) van het bewijs te leveren: de het Pickgetal van het geheel is de som van de Pickgetallen van de delen.

Pickgetallen tellen op

Stel je voor dat je een roosterveelhoek hebt die is opgesplitst in een aantal kleinere roosterveelhoeken. Een belangrijke eigenschap van oppervlakte is dan, dat de oppervlakte van het geheel gelijk is aan de som van de oppervlaktes van de delen. We willen laten zien dat ook het Pickgetal deze someigenschap heeft. Daarbij is het voldoende om te laten zien dat als een roosterveelhoek A opgesplitst is in twee kleinere roosterveelhoeken B en C, geldt:

$$\mathrm{Pick}(A) = \mathrm{Pick}(B) + \mathrm{Pick}(C).$$



Figuur 3. Het Pickgetal van het geheel is de som van de Pickgetallen van de delen. Een roosterveelhoek A is opgebouwd uit twee roosterveelhoeken B en C. Sommige inwendige roosterpunten van A zijn randpunten van B en C. Bovendien zijn er precies twee randpunten van A die in de rand van zowel B als C liggen. Door nauwkeurig te tellen zien we dat $\mathrm{Pick}(A) = \mathrm{Pick}(B) + \mathrm{Pick}(C)$.

Geef het aantal inwendige roosterpunten van A, B en C aan met i_A, i_B en i_C. Geef het aantal randpunten van A, B en C aan met r_A, r_B en r_C, en noem het aantal randpunten dat B en C gemeenschappelijk hebben k. Er zijn twee bijzondere punten, die in figuur 3 aangegeven zijn met de letters s en t: het zijn de twee roosterpunten die in de rand van zowel A als B als C zitten.
De roosterpunten in de rand van A zijn precies de roosterpunten die óf in de rand van B óf in de rand van C zitten, plus de twee punten s en t. Dus we vinden:

$$r_A = (r_B - k) + (r_C - k) + 2.$$

De inwendige punten van A zijn precies de inwendige punten van B en C plus de gemeenschappelijke randpunten van B en C, behalve s en t. Zo vinden we:

$$i_A = i_B + i_C + (k - 2).$$

Door deze twee gelijkheden te combineren vinden we het gewenste resultaat:

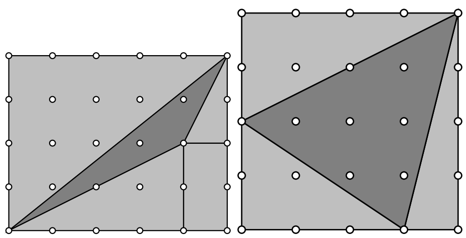
$$\begin{aligned}
\mathrm{Pick}(A) &= i_A + \frac{r_A}{2} - 1 \\
&= i_B + i_C + (k-2) \\
&\quad + \frac{r_B}{2} + \frac{r_C}{2} - k \\
&= i_B + \frac{r_B}{2} - 1 + \\
&\quad i_C + \frac{r_C}{2} - 1 \\
&= \mathrm{Pick}(B) + \mathrm{Pick}(C).
\end{aligned}$$

Het Pickgetal heeft dus, net als de oppervlakte, de someigenschap.

Driehoeken

Door slim gebruik te maken van de someigenschap van het Pickgetal en het feit dat de stelling van Pick geldt voor rechthoeken, kunnen we de stelling van Pick ook voor andere veelhoeken bewijzen. We zullen eerst aantonen dat de Stelling van Pick waar is voor roosterdriehoeken.
Als de roosterdriehoek een rechthoekige driehoek is waarvan de zijden evenwijdig

aan de coordinaatassen zijn, dan vormen twee van deze driehoeken samen een rechthoek. Omdat de twee driehoeken hetzelfde Pickgetal hebben, is volgens de someigenschap, het Pickgetal van de rechthoek precies tweemaal het Pickgetal van de driehoek. Maar het Pickgetal van de rechthoek, zo hebben we al bewezen, is gelijk aan de oppervlakte van de rechthoek en dus ook gelijk aan tweemaal de oppervlakte van de driehoek. Dus het Pickgetal van de driehoek is gelijk aan de oppervlakte van de driehoek.



Figuur 4. De stelling van Pick voor algemene roosterdriehoeken kan worden teruggebracht tot die voor rechthoeksdriehoeken.

Een willekeurige driehoek kunnen we met een aantal rechthoekige driehoeken completeren tot een rechthoek. Er zijn een aantal verschillende gevallen, waarvan de twee belangrijkste in figuur 4 zijn aangegeven. Door weer gebruik te maken van de someigenschap van het Pickgetal en het gegeven dat de stelling van Pick waar is voor rechthoekige driehoeken en rechthoeken, is het niet zo moeilijk in te zien dat de Stelling van Pick opgaat voor alle roosterdriehoeken.

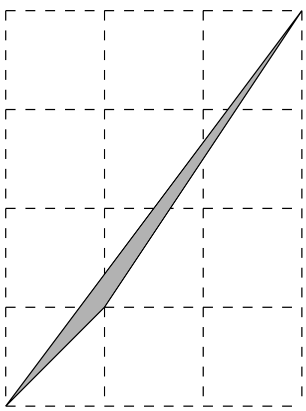
OPGAVE 1. Werk de twee gevallen in figuur 4 uit.

OPGAVE 2. Welke andere gevallen kunnen zich voordoen?

Een paar puzzeltjes

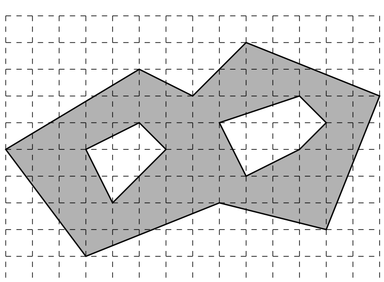
De stelling van Pick kun je niet alleen gebruiken om oppervlaktes van veelhoeken uit te rekenen. Met een beetje creativiteit kun je de stelling op veel manieren toepassen en resultaten bewijzen die op zichzelf al interessant zijn. Elk van de volgende puzzels kun je oplossen met behulp van de stelling van Pick.

OPGAVE 3.



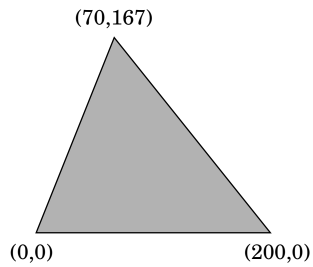
Laat zien dat een roosterdriehoek die geen roosterpunten in het inwendige of op de rand heeft (behalve de drie hoekpunten) oppervlakte $\frac{1}{2}$ heeft.

OPGAVE 4. In de figuur zie je een roosterveelhoek met twee 'gaten'. Hoe zou de stelling van Pick moeten luiden voor roosterveelhoeken met g gaten?



OPGAVE 5. De roosterveelhoek uit figuur 1 wordt geschaald met een factor 10. Hoeveel roosterpunten liggen er in het inwendige van de geschaalde figuur?

OPGAVE 6. Gegeven de drie punten $A = (0, 0)$, $B = (200, 0)$ en $C = (70, 167)$, bepaal het aantal roosterpunten in het inwendige van driehoek ABC.



OPGAVE 7. ** Bewijs de formule van Euler.