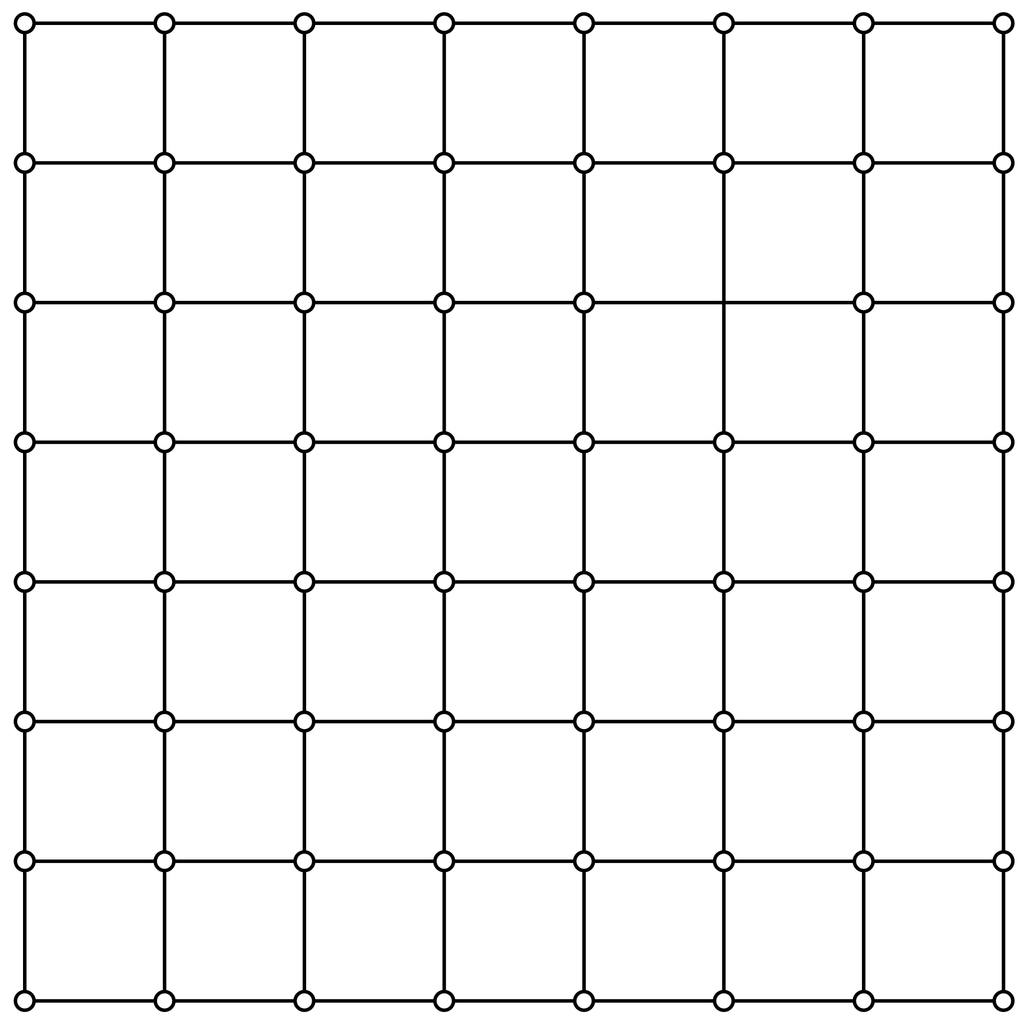
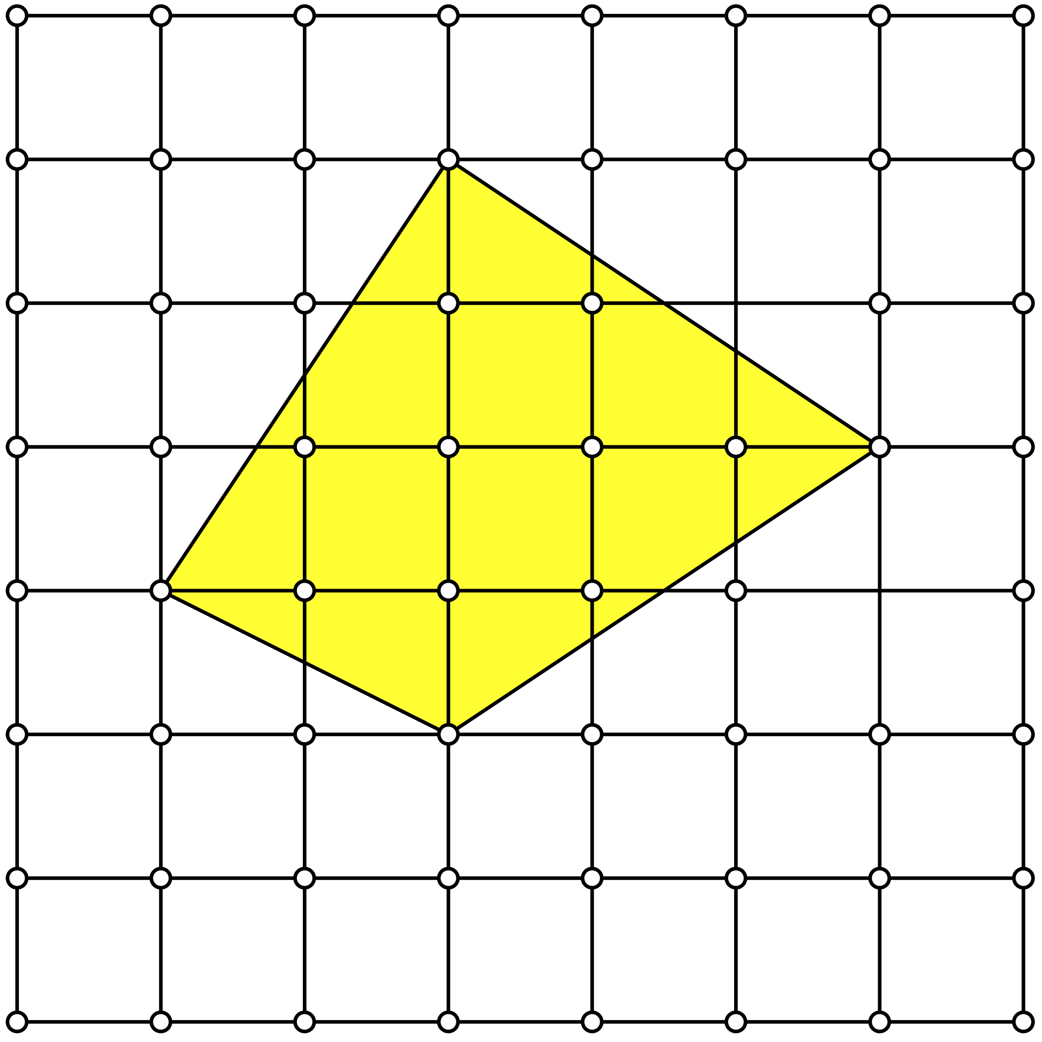
Meetkunde die telt (NWD 2012)

Dion Gijswijt

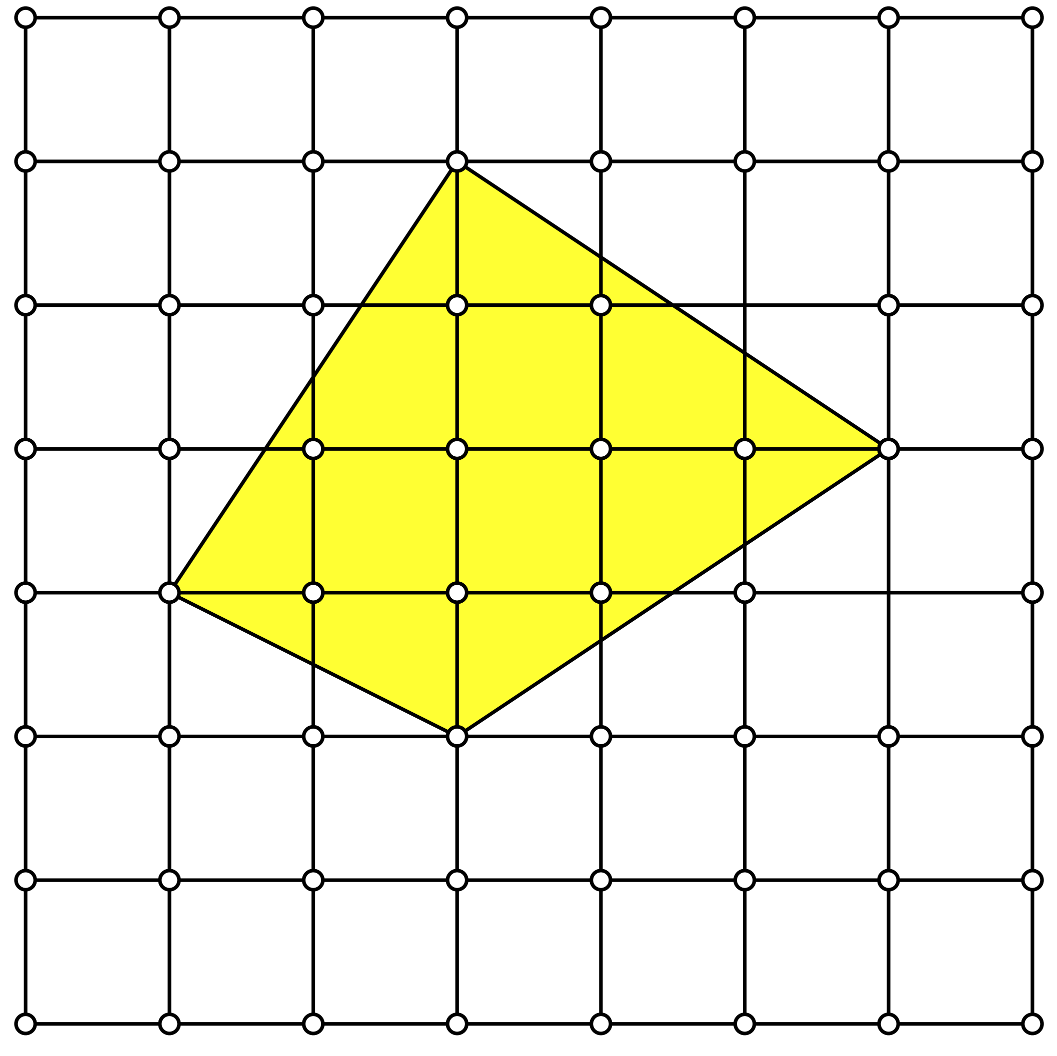
Rooster

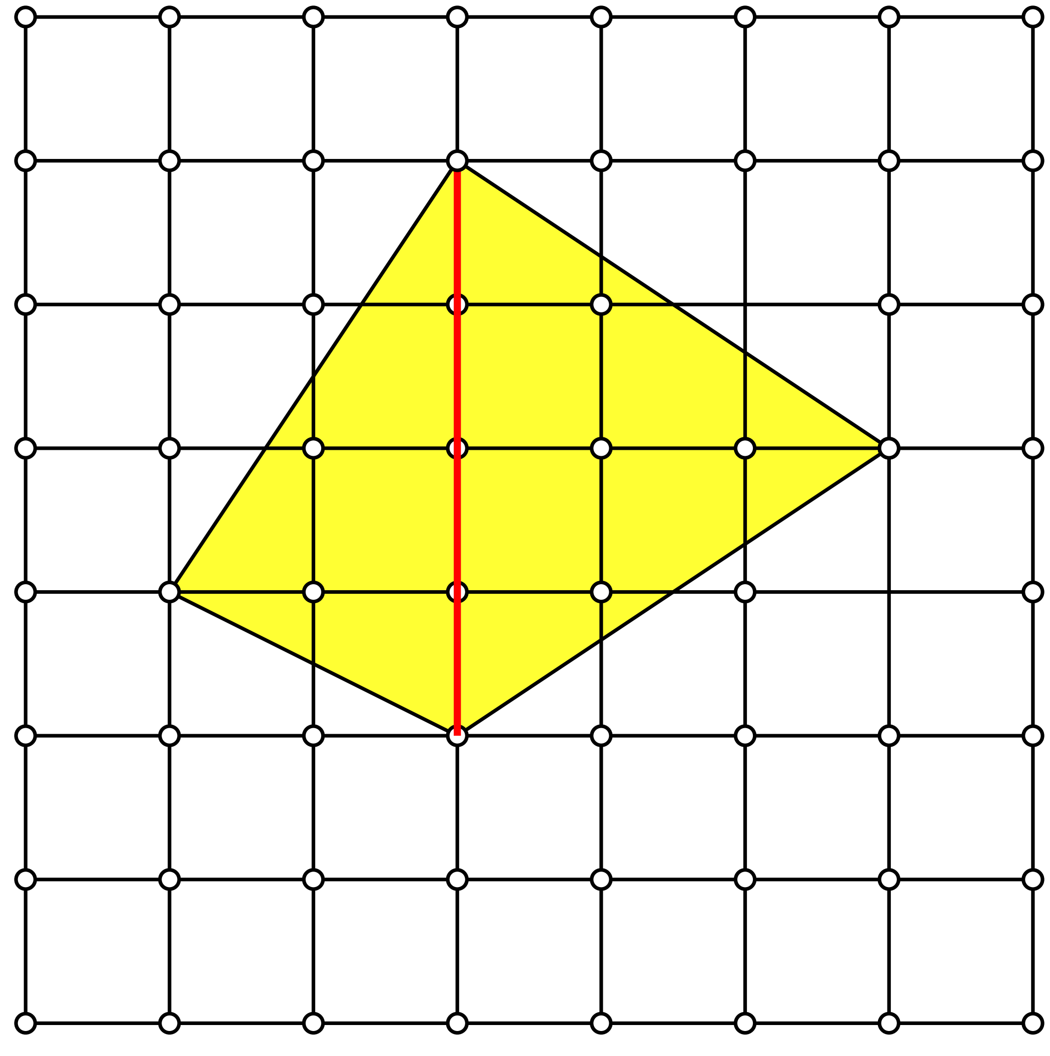


Roosterveelhoek



Bepaal de oppervlakte van deze roosterveelhoek

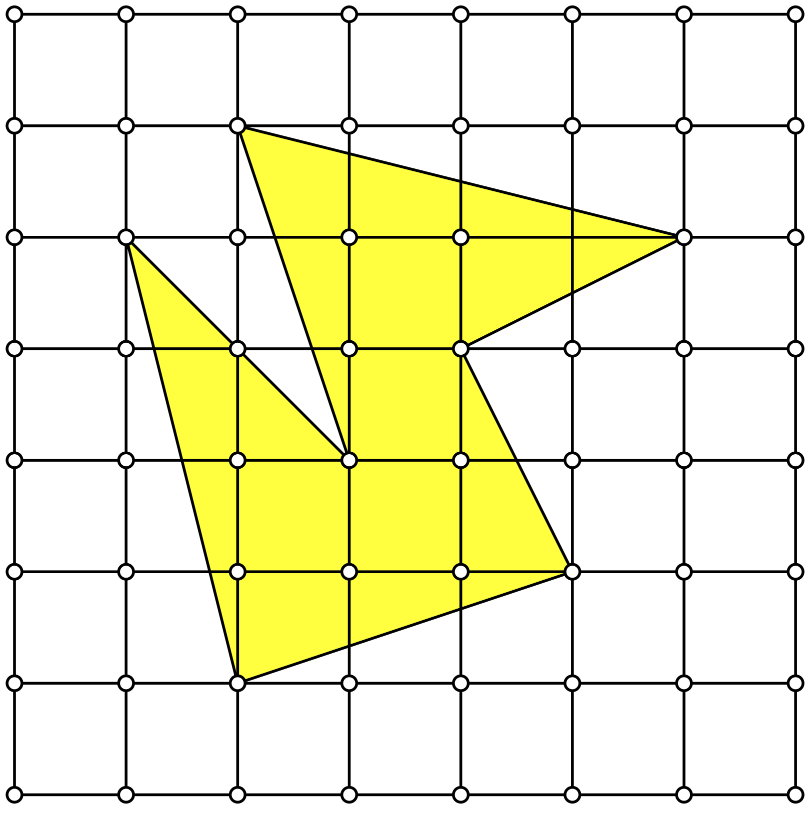


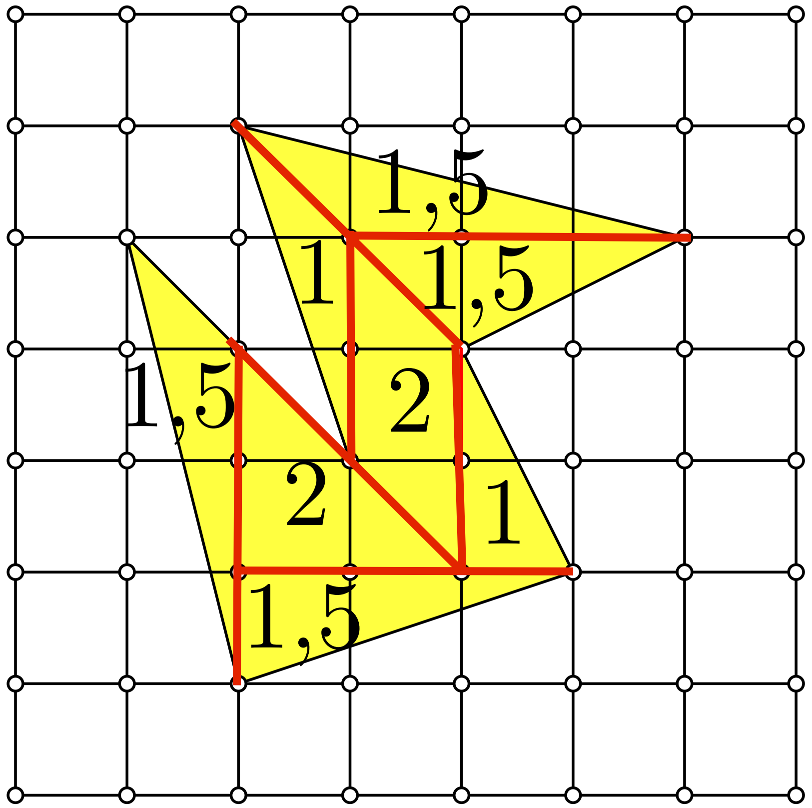


Oppervlakte is

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 2 + \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 10$$

Probeer het nu zelf!

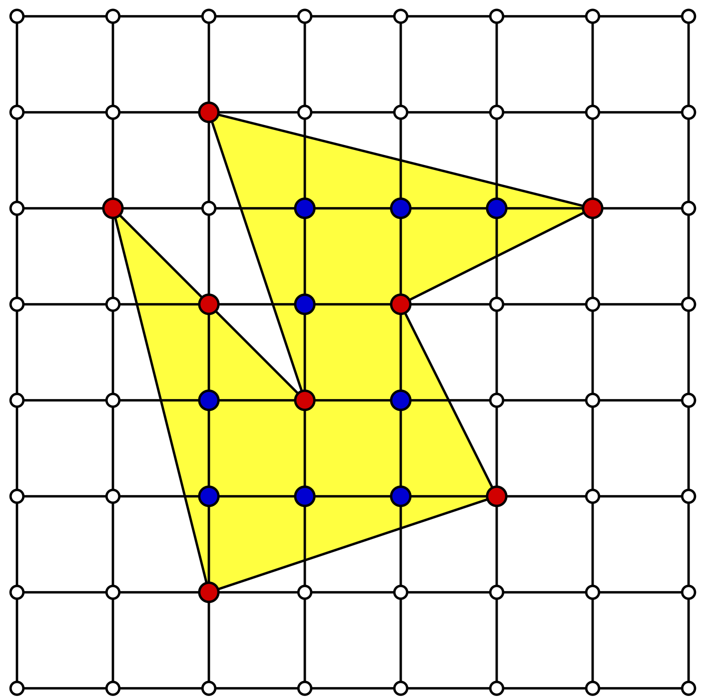




Oppervlakte:

$$1 + 1 + 1{,}5 + 1{,}5 + 1{,}5 + 1{,}5 + 2 + 2 = 12$$

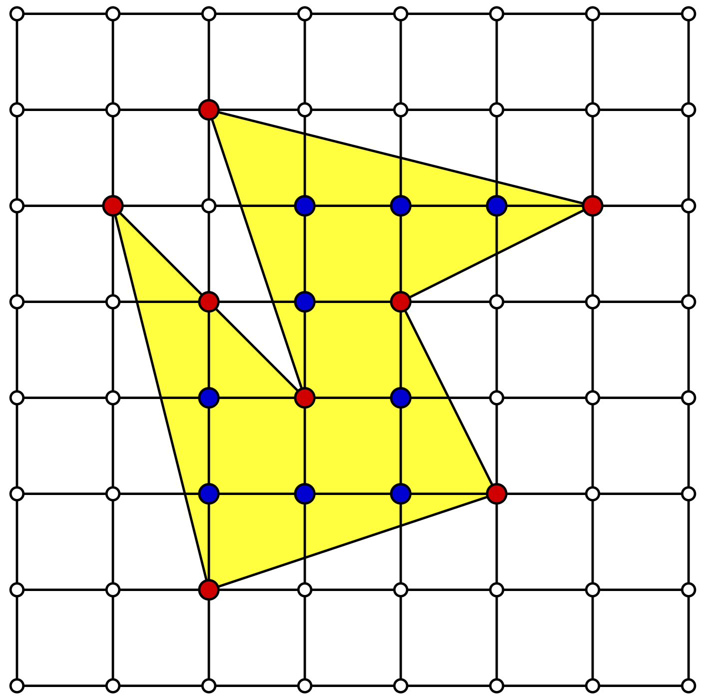
Meten door te tellen



Aantal randpunten $R = 8$

Aantal inwendige punten $I = 9$

Meten door te tellen



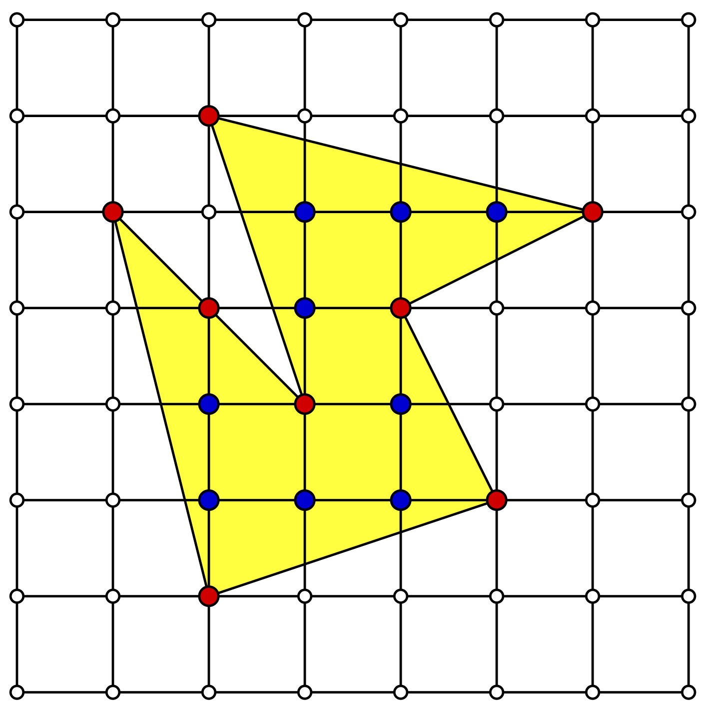
Aantal randpunten $R = 8$

Aantal inwendige punten $I = 9$

Oppervlakte $O = I + \frac{1}{2}R - 1$

$$= 9 + 4 - 1 = 12$$

Meten door te tellen

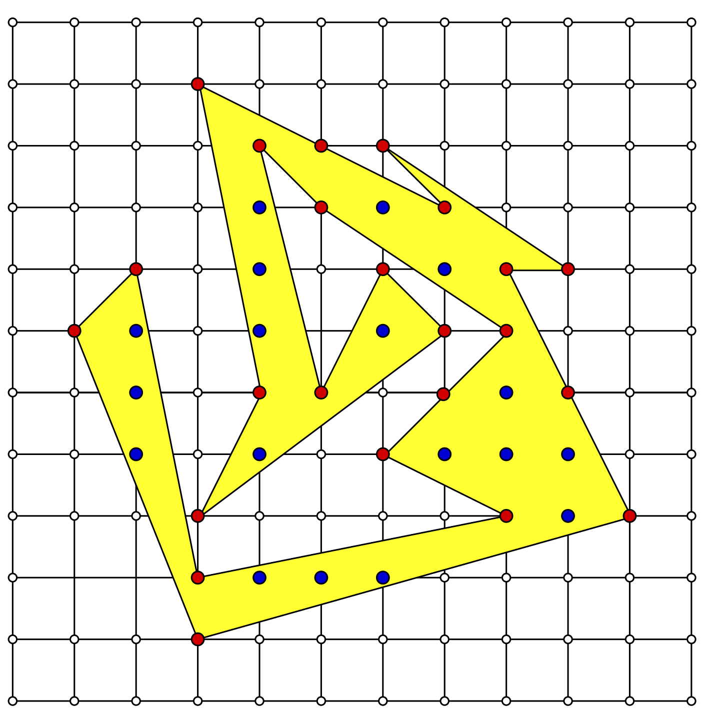


Aantal randpunten $R = 8$

Aantal inwendige punten $I = 9$

Oppervlakte $O = I + \frac{1}{2}R - 1$

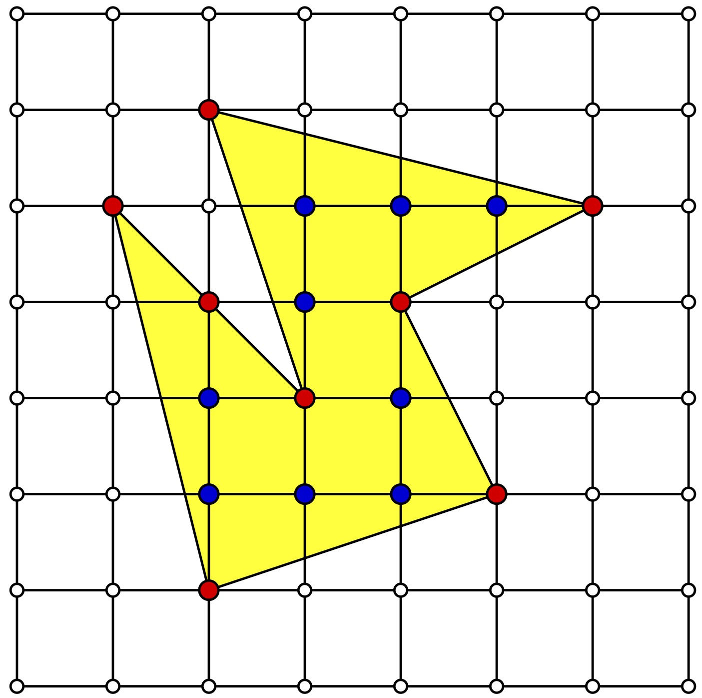
$= 9 + 4 - 1 = 12$



$R = 23$

$I = 18$

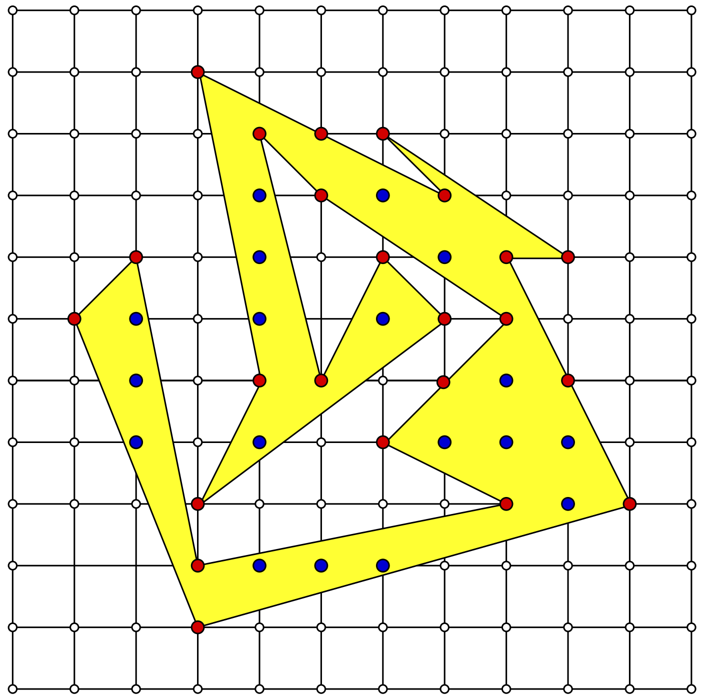
Meten door te tellen



Aantal randpunten $R = 8$

Aantal inwendige punten $I = 9$

$$\begin{aligned} \text{Oppervlakte } O &= I + \tfrac{1}{2}R - 1 \\ &= 9 + 4 - 1 = 12 \end{aligned}$$



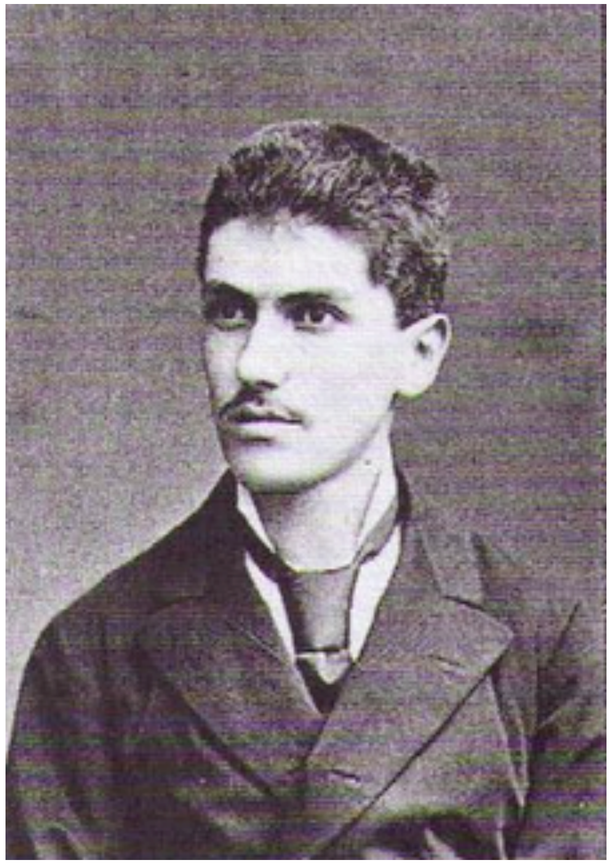
$R = 23$

$I = 18$

$O = 18 + \frac{1}{2} \times 23 - 1 = 28\frac{1}{2}$

Meten door te tellen

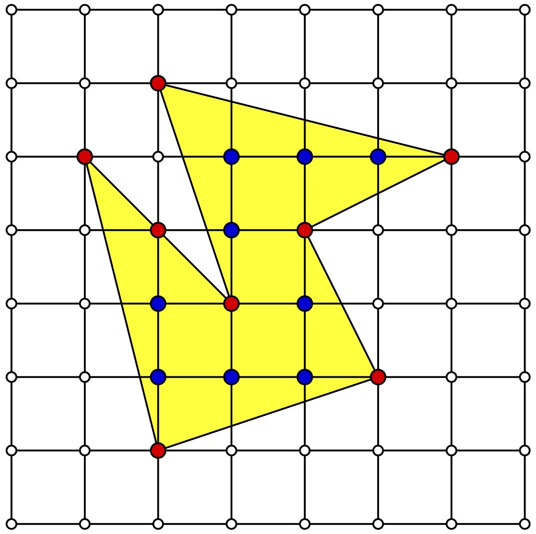
Georg Alexander Pick
1859--1942



Stelling van Pick

De oppervlakte van een roosterveelhoek is gelijk aan $O = I + \frac{1}{2}R - 1$

$I :=$ aantal roosterpunten in inwendige
$R :=$ aantal roosterpunten op de rand



Bewijs van de stelling van Pick

Pick-getal P van een roosterveelhoek

$$P := I + \tfrac{1}{2}R - 1$$

Te bewijzen:

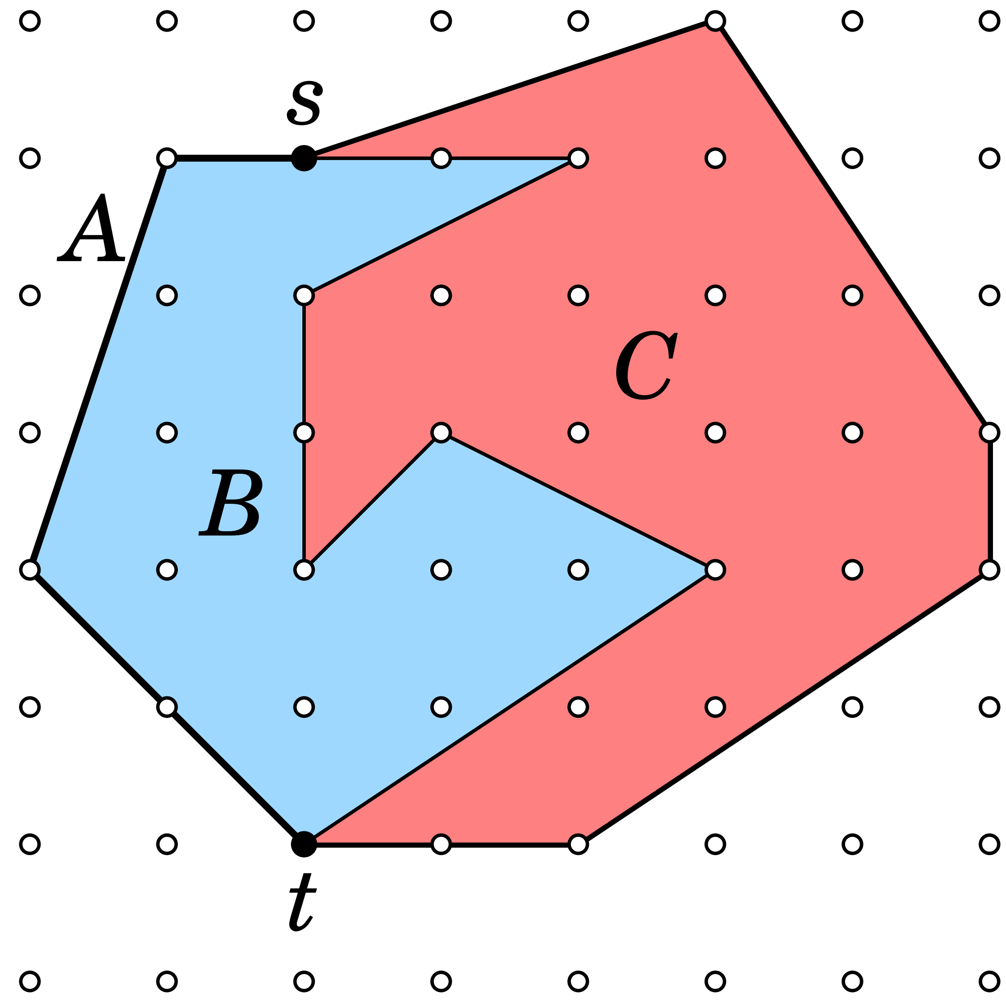
voor elke roosterveelhoek geldt: $O = P$.

Bewijs van de stelling van Pick

Stap 1

Additiviteit van Pick-getal

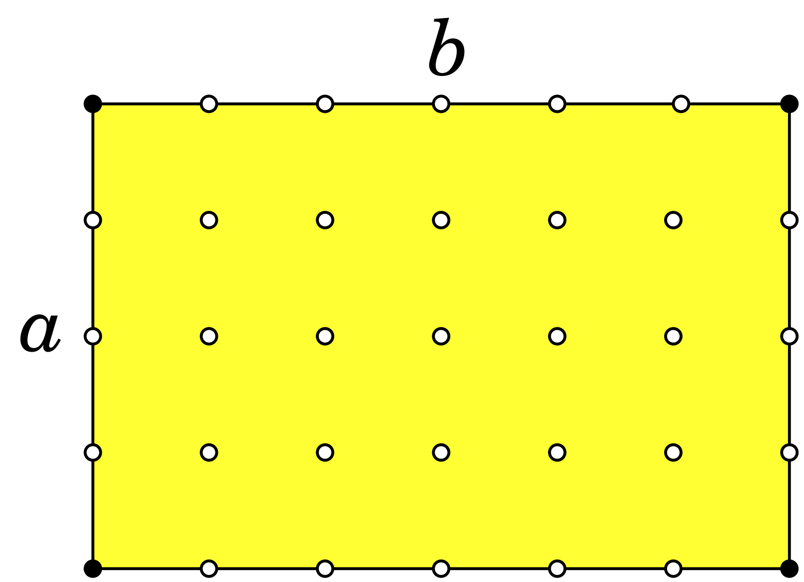
$$P(A) = P(B) + P(C)$$



Bewijs van de stelling van Pick

Stap 2

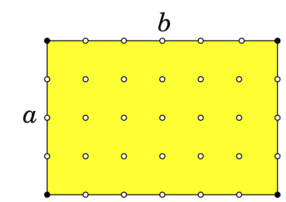
Verzamelen bouwstenen....:

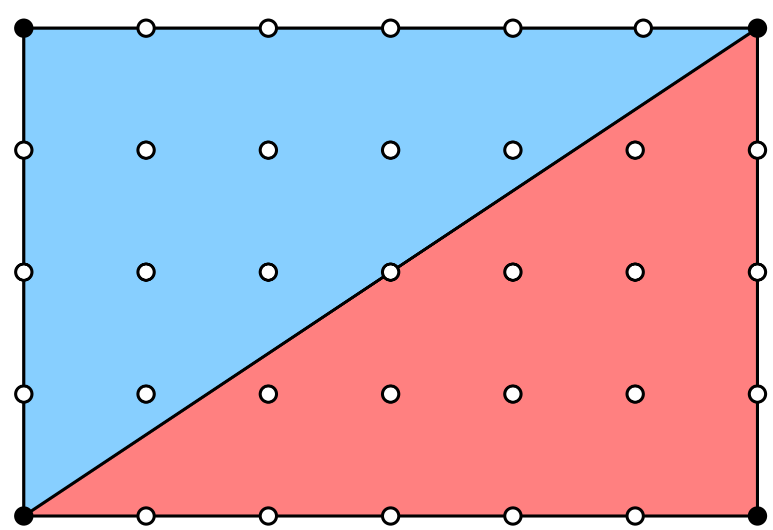


Rechthoeken

Bewijs van de stelling van Pick

Stap 2

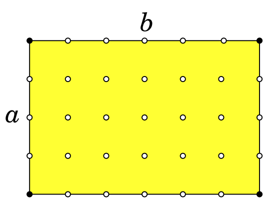
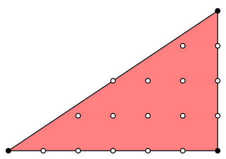
Verzamelen bouwstenen....: 

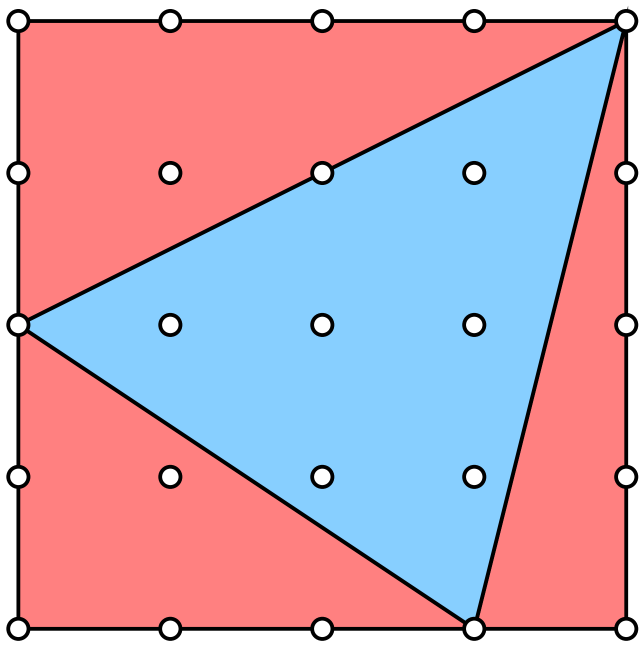


Rechthoekige driehoek

Bewijs van de stelling van Pick

Stap 2

Verzamelen bouwstenen....:  

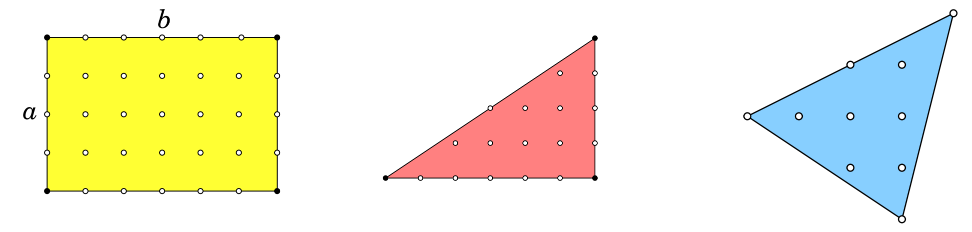


Driehoeken

Bewijs van de stelling van Pick

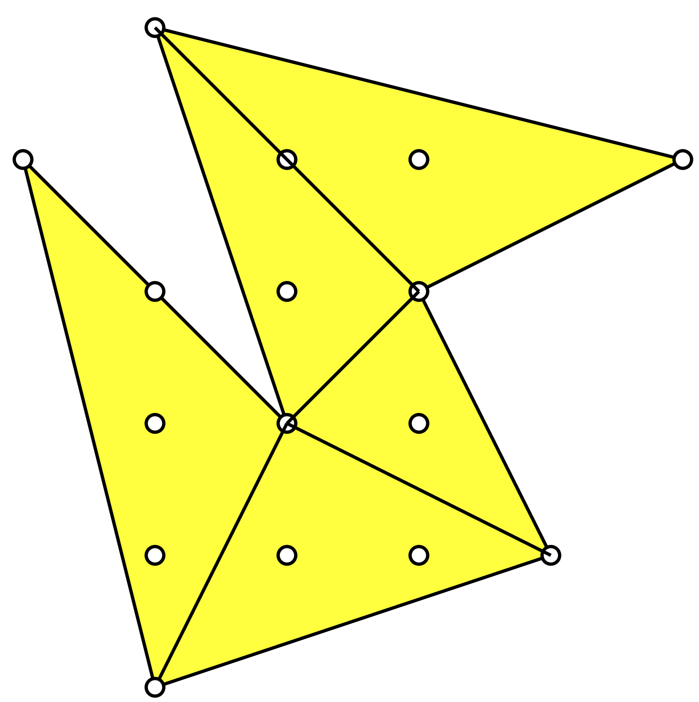
Stap 2

Verzamelen bouwstenen....:



Stap 3

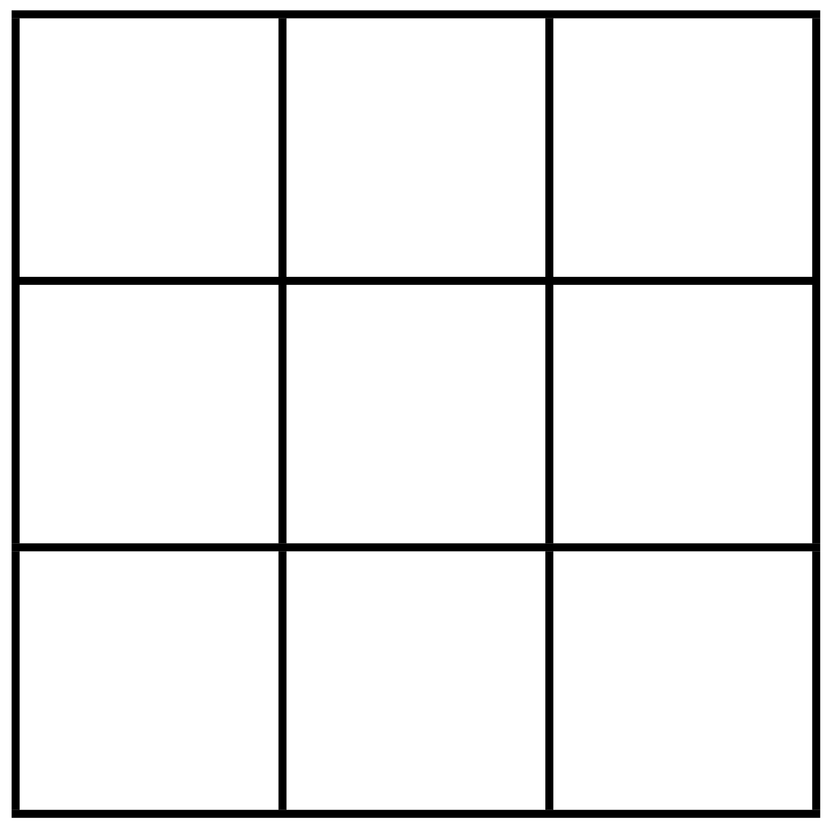
Triangulatie roosterveelhoek



QED ■

Tellen door te meten!

Hoeveel 3x3 magische vierkanten zijn er met magische som 15?



- rij-, kolom-, diagonaal-sommen gelijk aan 15
- positieve gehele getallen (mogen gelijk zijn)

Tellen door te meten!

Hoeveel 3x3 magische vierkanten zijn er met magische som 15?

	5	

- rij-, kolom-, diagonaal-sommen gelijk aan 15
- positieve gehele getallen (mogen gelijk zijn)

Tellen door te meten!

Hoeveel 3x3 magische vierkanten zijn er met magische som 15?

x	y	
	5	

- rij-, kolom-, diagonaal-sommen gelijk aan 15
- positieve gehele getallen (mogen gelijk zijn)

Tellen door te meten!

Hoeveel 3x3 magische vierkanten zijn er met magische som 15?

x	y	$15-x-y$
	5	
	$10-y$	$10-x$

- rij-, kolom-, diagonaal-sommen gelijk aan 15
- positieve gehele getallen (mogen gelijk zijn)

Tellen door te meten!

Hoeveel 3x3 magische vierkanten zijn er met magische som 15?

x	y	$15-x-y$
$20-2x-y$	5	$2x+y-10$
$x+y-5$	$10-y$	$10-x$

- rij-, kolom-, diagonaal-sommen gelijk aan 15
- positieve gehele getallen (mogen gelijk zijn)

Tellen door te meten!

Hoeveel 3x3 magische vierkanten zijn er met magische som 15?

x	y	$15-x-y$
$20-2x-y$	5	$2x+y-10$
$x+y-5$	$10-y$	$10-x$

$$x, y > 0$$
$$x, y < 10$$

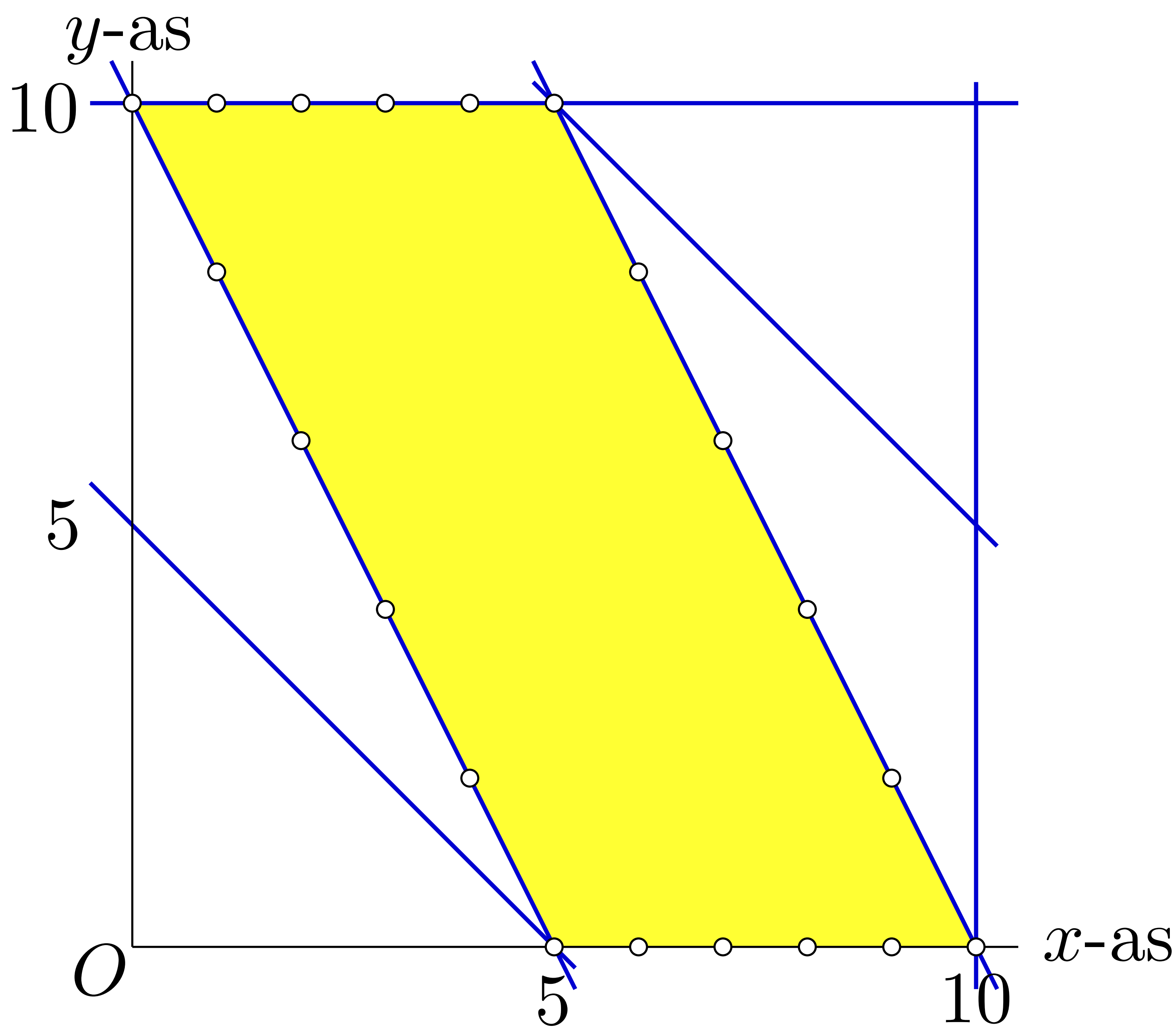
$$x + y > 5$$
$$x + y < 15$$

$$2x + y > 10$$
$$2x + y < 20$$

- rij-, kolom-, diagonaal-sommen gelijk aan 15
- positieve gehele getallen (mogen gelijk zijn)

Tellen door te meten!

Hoeveel 3x3 magische vierkanten zijn er met magische som 15?



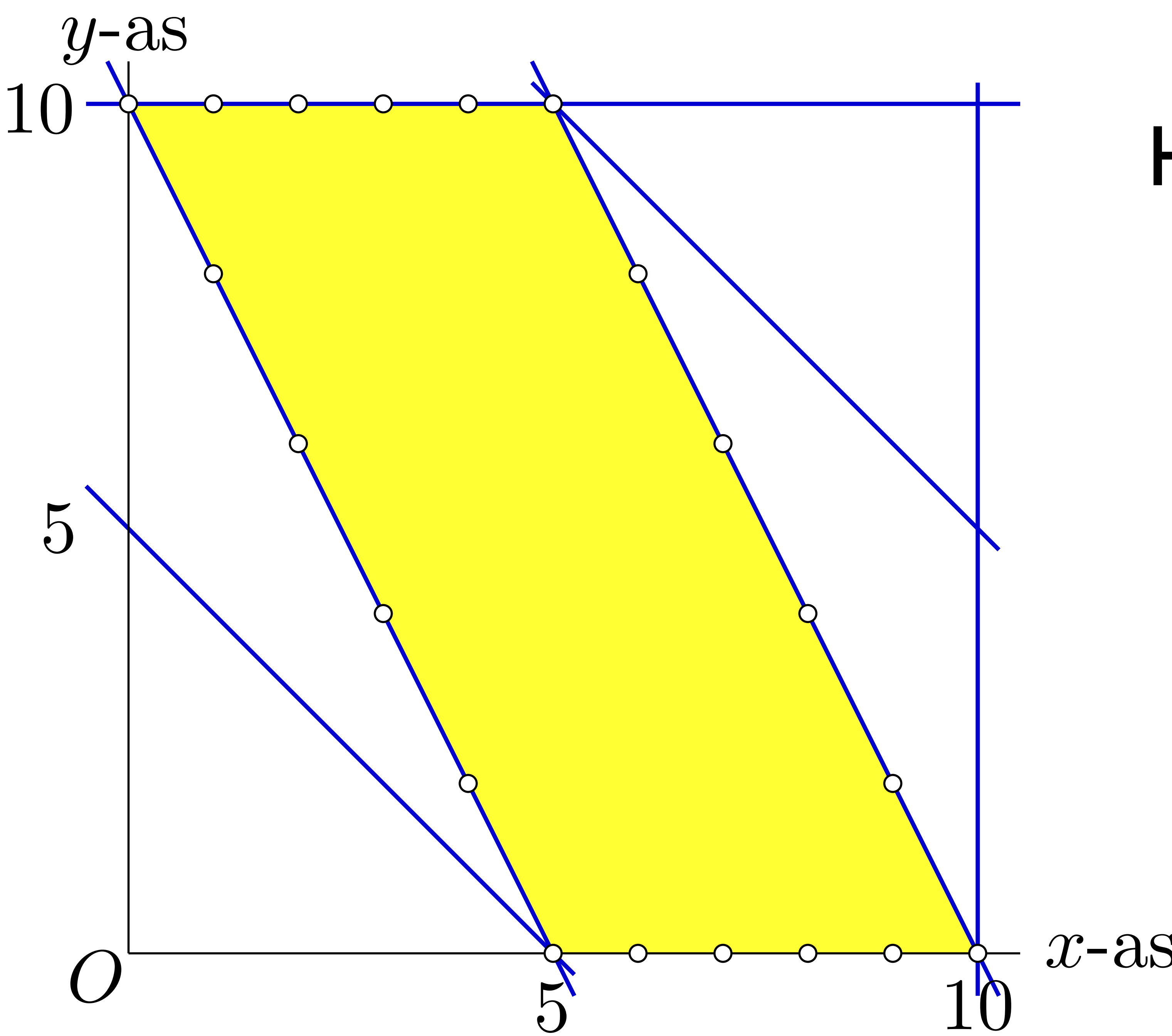
$$x, y > 0$$
$$x, y < 10$$

$$x + y > 5$$
$$x + y < 15$$

$$2x + y > 10$$
$$2x + y < 20$$

Tellen door te meten!

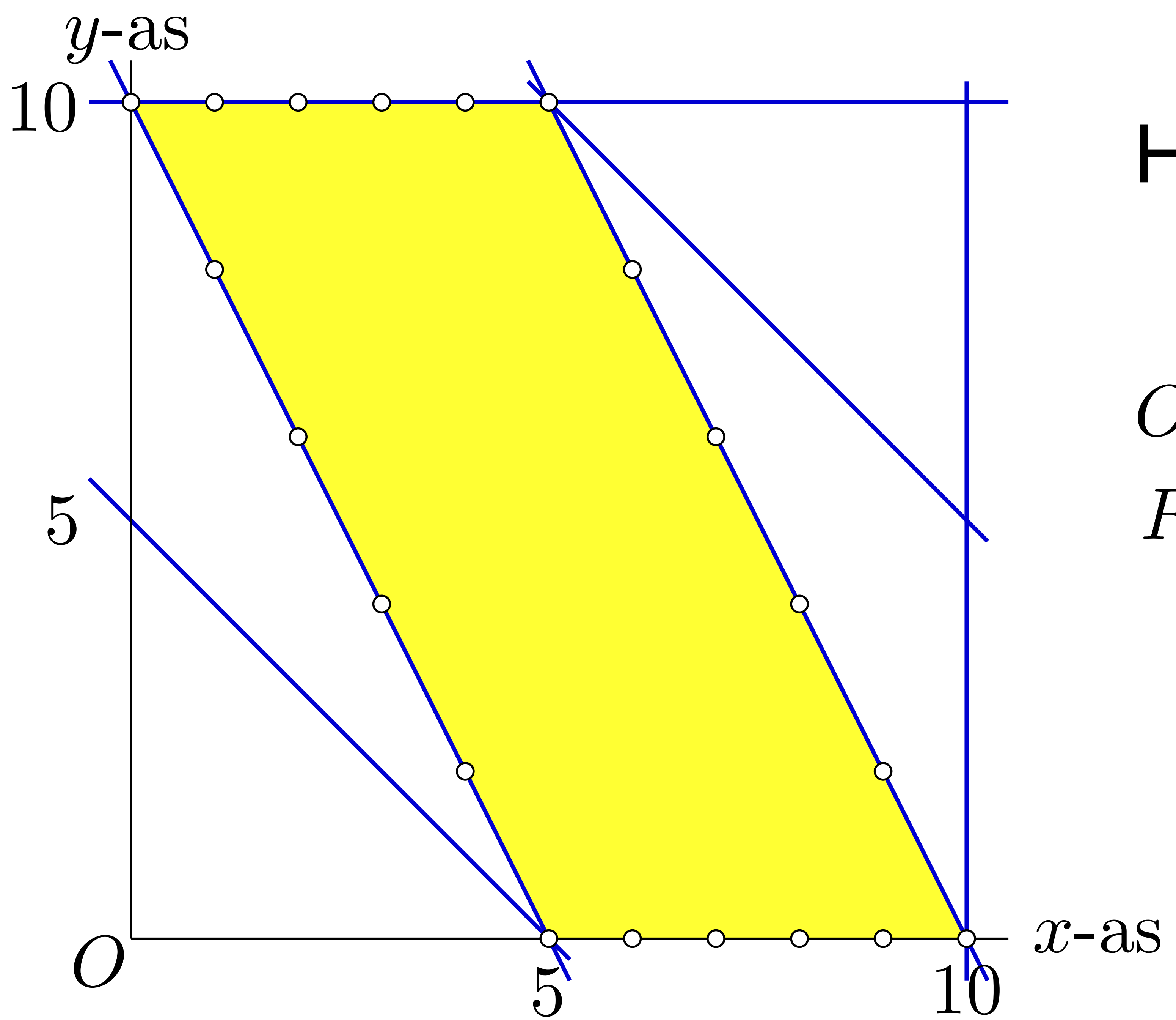
Hoeveel 3x3 magische vierkanten zijn er met magische som 15?



Hoeveel inwendige punten zijn er?

Tellen door te meten!

Hoeveel 3x3 magische vierkanten zijn er met magische som 15?



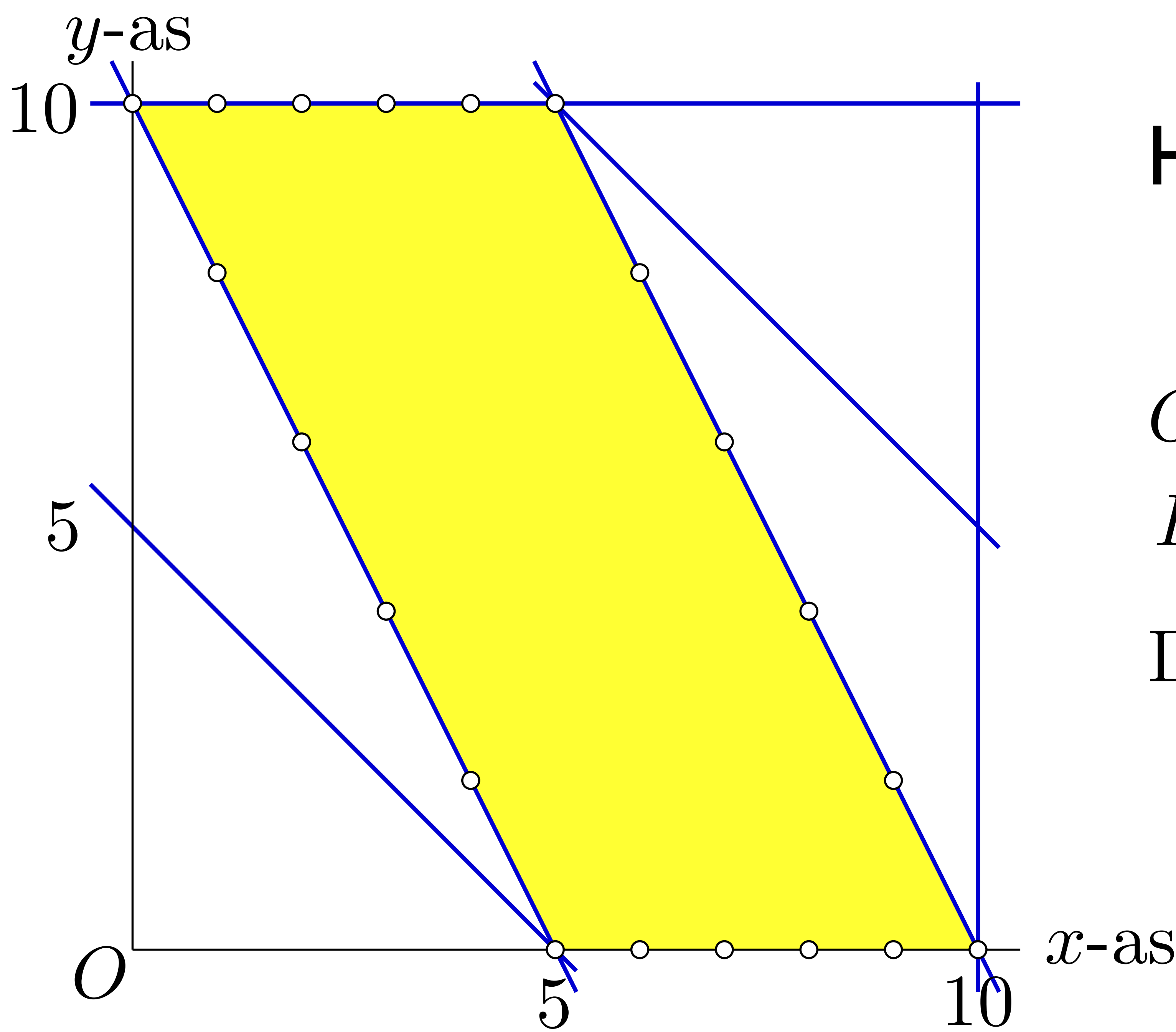
Hoeveel inwendige punten zijn er?

$$O = 5 \times 10 = 50$$

$$R = 5 \times 4 = 20$$

Tellen door te meten!

Hoeveel 3x3 magische vierkanten zijn er met magische som 15?



Hoeveel inwendige punten zijn er?

$O = 5 \times 10 = 50$

$R = 5 \times 4 = 20$

Dus

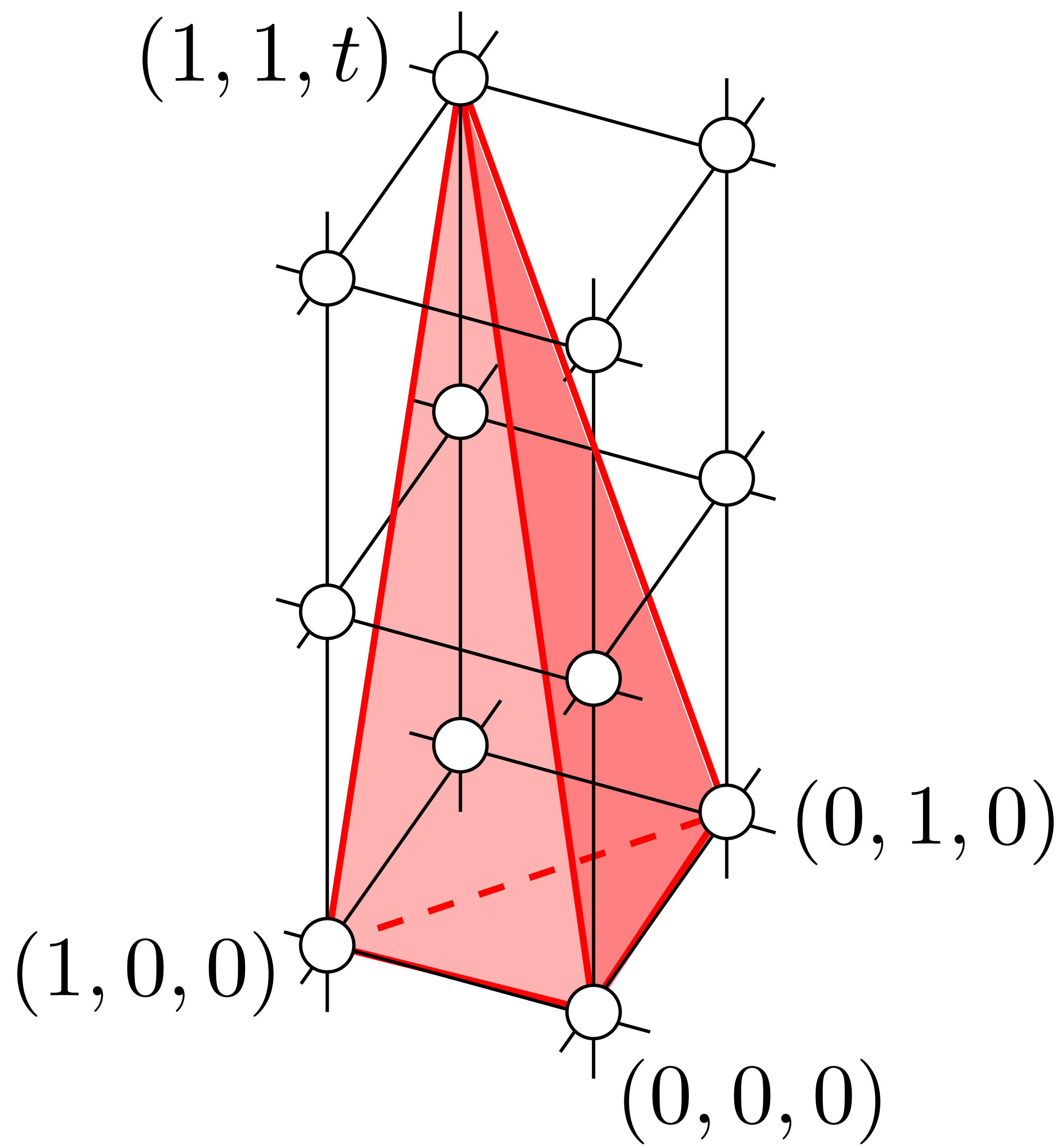
$I = O - \frac{1}{2} R + 1 = 41$

We verlaten platland...

Is er een generalisatie naar 3D?

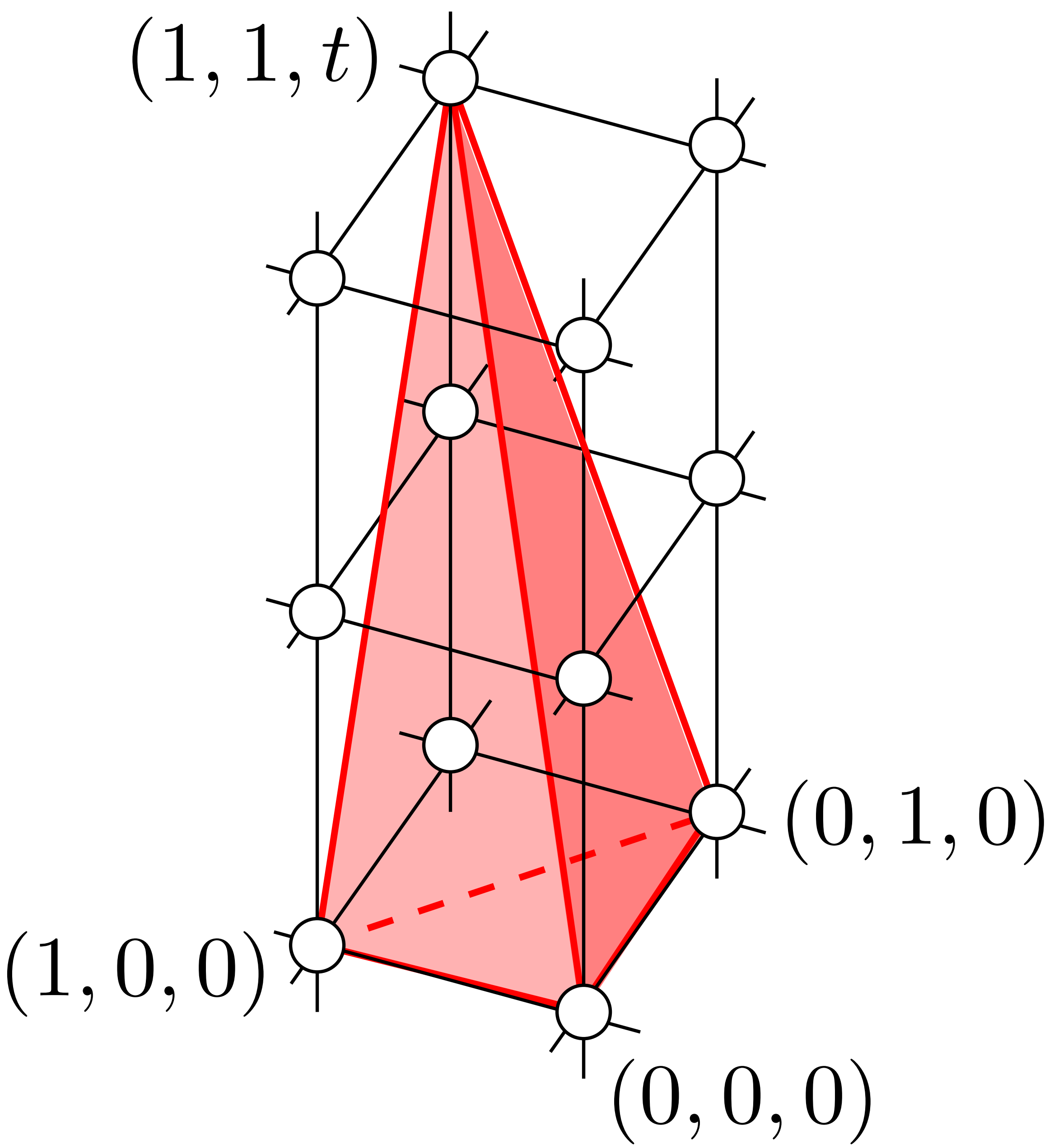
We verlaten platland...

Is er een generalisatie naar 3D?



We verlaten platland...

Is er een generalisatie naar 3D?



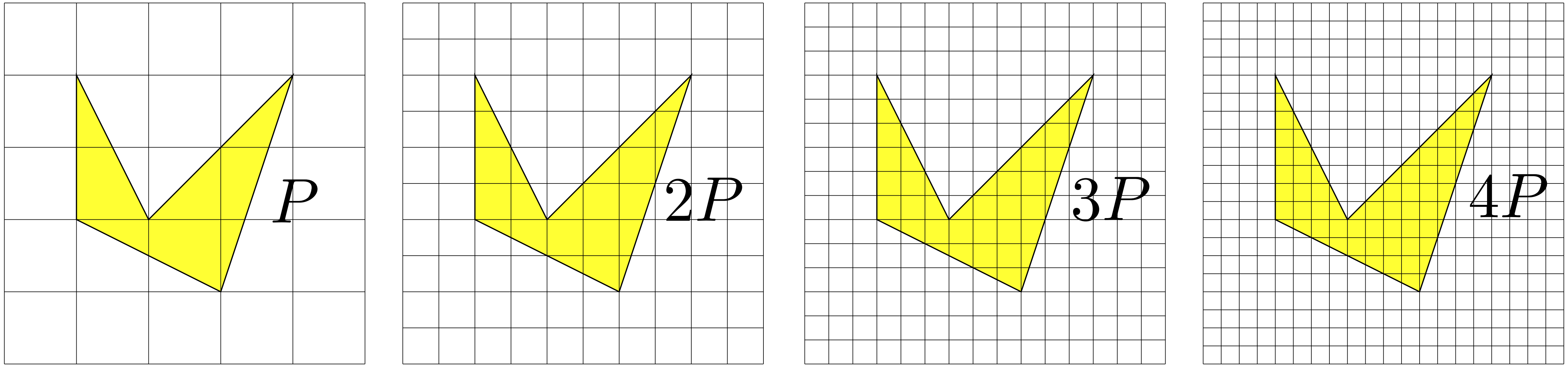
Inwendige punten: 0

Randpunten: 4

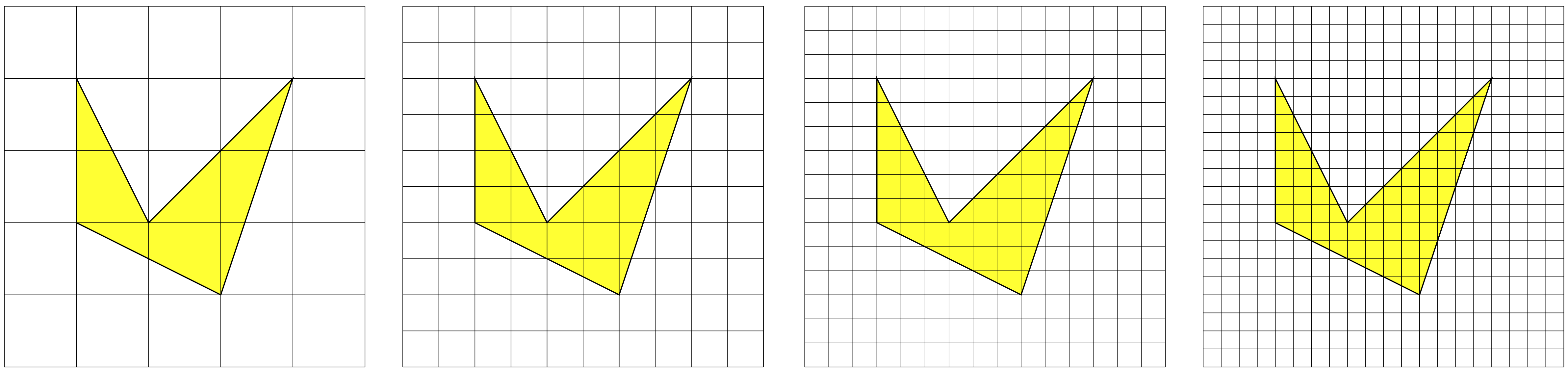
Volume: $\frac{1}{6}t$

Antwoord: NEE.

Schalen



Schalen



$I + R = 8$

$I = 1$

$I + R = 22$

$I = 8$

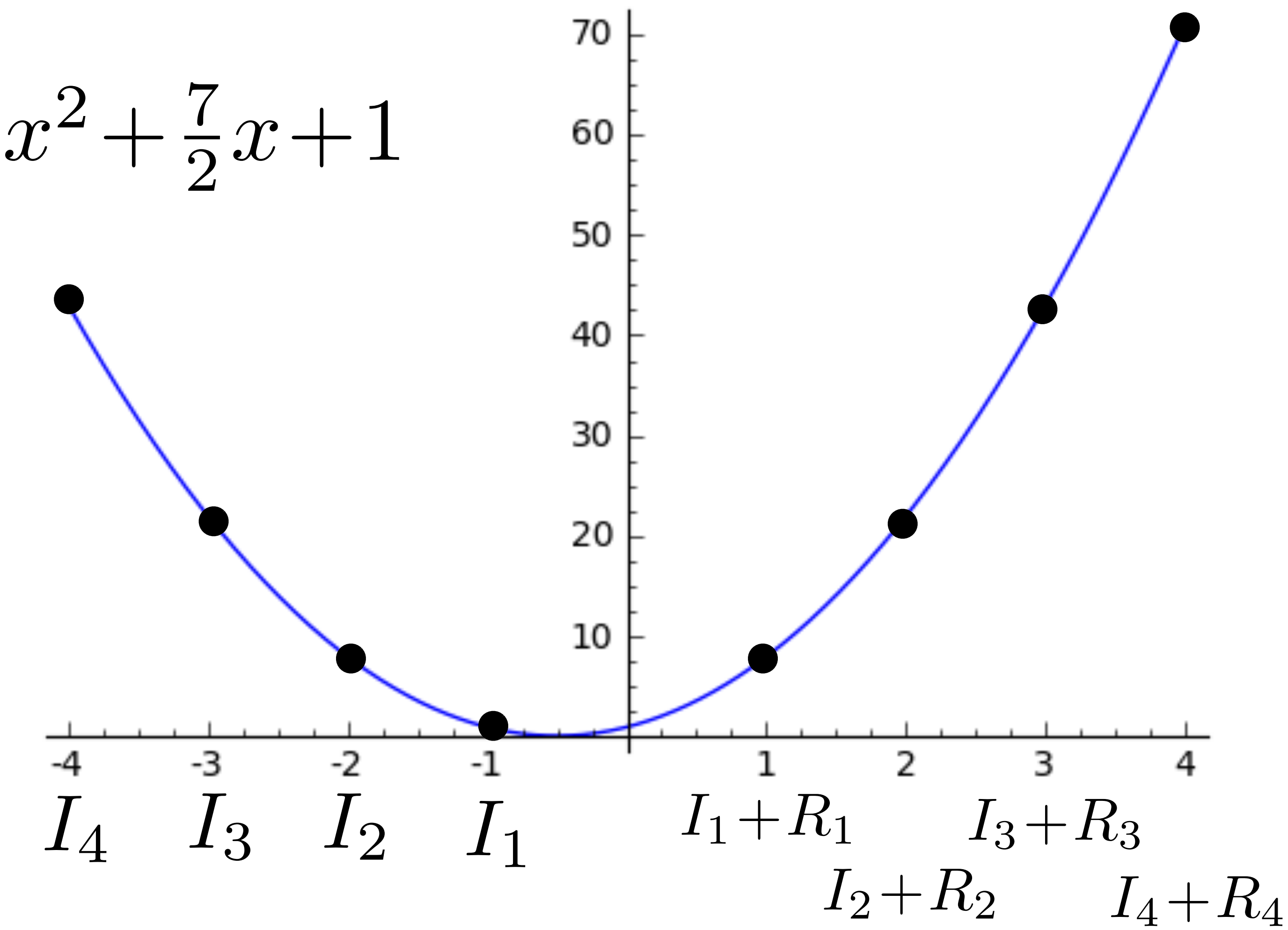
$I + R = 43$

$I = 22$

$I + R = 71$

$I = 43$

$$f(x) = \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{2}x + 1$$



Stelling (volgt uit Pick)

Er is een tweedegraads functie $f = ax^2 + bx + 1$

met

$$f(k) = I_k + R_k \text{ aantal roosterpunten in } k \cdot P$$

$$f(-k) = I_k \text{ aantal inwendige roosterpunten in } k \cdot P$$

Stelling (volgt uit Pick)

Er is een tweedegraads functie $f = ax^2 + bx + 1$

met

$$f(k) = I_k + R_k \text{ aantal roosterpunten in } k \cdot P$$

$$f(-k) = I_k \text{ aantal inwendige roosterpunten in } k \cdot P$$

Hier is a de oppervlakte van P.

Generalisatie naar 3D

Er is een derdegraads functie $f = ax^3 + bx^2 + cx + 1$

met

$$f(k) = I_k + R_k \text{ aantal roosterpunten in } k \cdot P$$

$$-f(-k) = I_k \text{ aantal inwendige roosterpunten in } k \cdot P$$

Hier is a het volume van P.

Gevolg:

Volume van P is $\frac{I(2P)+R(P)-2I(P)-3}{6}$