

Chaos, weer en klimaat

Alef Sterk
University of Exeter
a.e.sterk@exeter.ac.uk

Nationale Wiskunde Dagen
3 & 4 februari 2012

Eerste weersvoorspelling op 1 augustus 1861

THE WEATHER.								
METEOROLOGICAL REPORTS.								
Wednesday, July 31, 8 to 9 a.m.	R.	E.	M.	D.	F.	C.	I.	S.
Nairn	29.54	57	56	W.S.W.	6	9	o.	3
Aberdeen ..	29.60	59	54	S.S.W.	5	1	b.	3
Leith	29.70	61	55	W.	3	5	c.	2
Berwick .. .	29.69	59	53	W.S.W.	4	4	c.	2
Arbroath ..	29.73	57	55	W.	5	4	a.	5
Portrush ..	29.72	57	54	S.W.	2	2	b.	2
Shields .. .	29.80	59	54	W.S.W.	4	5	o.	3
Galway .. .	29.83	65	63	W.	5	4	c.	4
Scarborough	29.56	59	55	W.	3	6	c.	2
Liverpool ..	29.91	61	56	S.W.	2	3	c.	2
Valentia ..	29.87	62	60	S.W.	2	5	o.	3
Queenstown	29.83	61	59	W.	3	5	c.	2
Yarmouth ..	30.05	61	59	W.	5	2	c.	3
London .. .	30.02	62	56	S.W.	3	2	b.	—
Dover .. .	30.04	70	64	S.W.	3	7	o.	2
Portsmouth ..	30.01	61	59	W.	3	6	o.	2
Portland .. .	30.03	63	59	S.W.	3	2	a.	3
Plymouth ..	30.00	62	59	W.	5	1	b.	4
Penzance ..	30.04	61	60	S.W.	2	6	a.	3
Copenhagen	29.94	64	—	W.S.W.	2	6	c.	3
Helder .. .	29.99	63	—	W.S.W.	6	5	c.	3
Brest .. .	30.09	60	—	S.W.	2	6	c.	5
Dayonne ..	30.13	63	—	—	—	9	m.	5
Lisbon .. .	30.18	70	—	N.N.W.	4	3	b.	2

General weather probable during next two days in the—
 North—Moderate westerly wind; fine.
 West—Moderate south-westerly; fine.
 South—Fresh westerly; fine.

Explanation.
 B. Barometer, corrected and reduced to 32° at mean sea level; each 10 feet of vertical rise causing about one-hundredth of an inch diminution, and each 10° above 32° causing nearly three-hundredths increase. E. Exposed thermometer in shade. M. Moistened bulb (for evaporation and dew-point). D. Direction of wind (true—two points $\frac{1}{2}$ of magnet). F. Force (1 to 12—estimated). C. Cloud (1 to 9). I. Initials:—b, blue sky; c, clouds detached; f, fog; h, hail; l, lightning; m, misty (hazy); o, overcast (dull); r, rain; s, snow; t, thunder. S. Sea disturbance (1 to 9).



Robert FitzRoy
(1805–1865)

Inhoud

Deel 1: kracht en evenwicht

Deel 2: convectie en chaos

Coriolis en Buys-Ballot: draaiende luchtmassa's

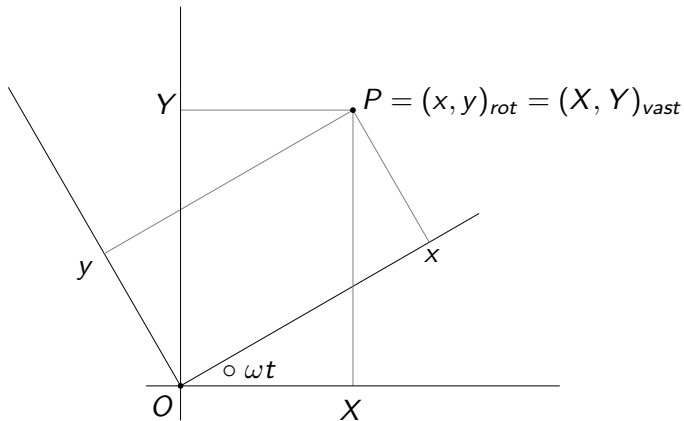


Gaspard-Gustave de Coriolis
(1792–1843)

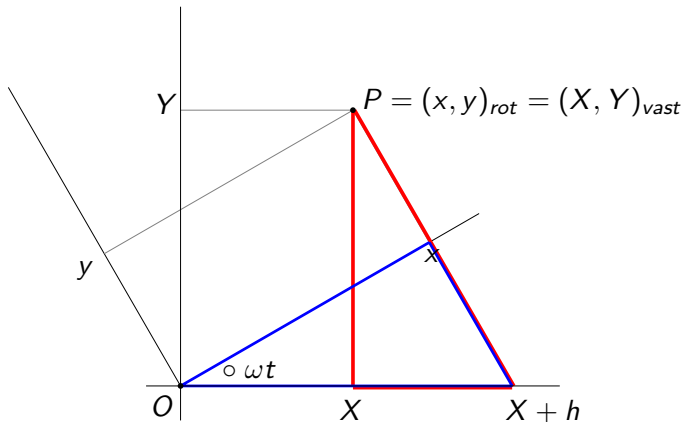


Christophorus Buys-Ballot
(1817–1890)

Beweging in een roterend assenstelsel

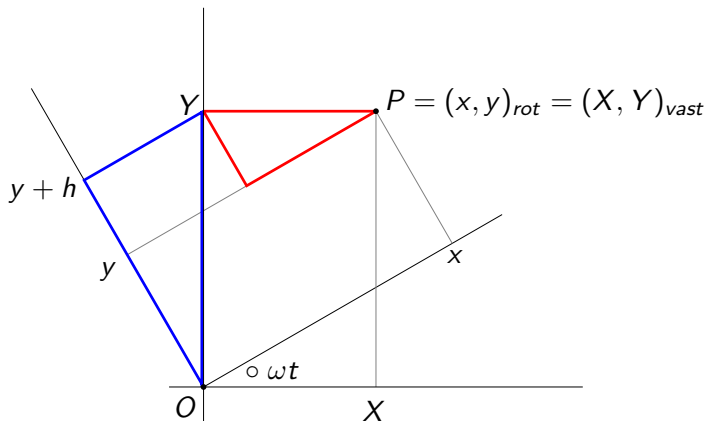


Beweging in een roterend assenstelsel



$$\cos(\omega t) = \frac{x}{X+h} = \frac{x}{X+Y \tan \omega t} \Rightarrow x = X \cos \omega t + Y \sin \omega t$$

Beweging in een roterend assenstelsel



$$\cos(\omega t) = \frac{y + h}{Y} = \frac{y + X \sin \omega t}{Y} \Rightarrow y = -X \sin \omega t + Y \cos \omega t$$

Beweging in een roterend assenstelsel

Positie t.o.v. roterend stelsel

$$x = X \cos \omega t + Y \sin \omega t$$

$$y = -X \sin \omega t + Y \cos \omega t$$

Snelheid = afgeleide:

$$\dot{x} = \dot{X} \cos \omega t + \dot{Y} \sin \omega t + \omega y$$

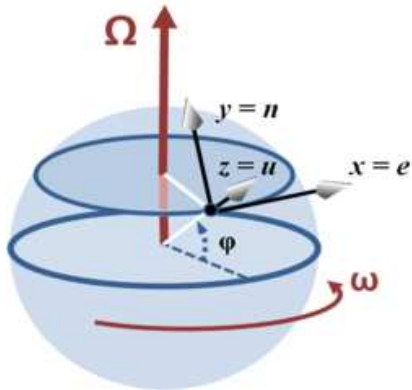
$$\dot{y} = -\dot{X} \sin \omega t + \dot{Y} \cos \omega t - \omega x$$

Versnelling = tweede afgeleide:

$$\ddot{x} = \ddot{X} \cos \omega t + \ddot{Y} \sin \omega t + 2\omega(-\dot{X} \sin \omega t + \dot{Y} \cos \omega t) - \omega^2 x$$

$$\ddot{y} = -\ddot{X} \sin \omega t + \ddot{Y} \cos \omega t - \underbrace{2\omega(\dot{X} \cos \omega t + \dot{Y} \sin \omega t)}_{\text{versnelling t.g.v. Corioliskracht}} - \omega^2 y$$

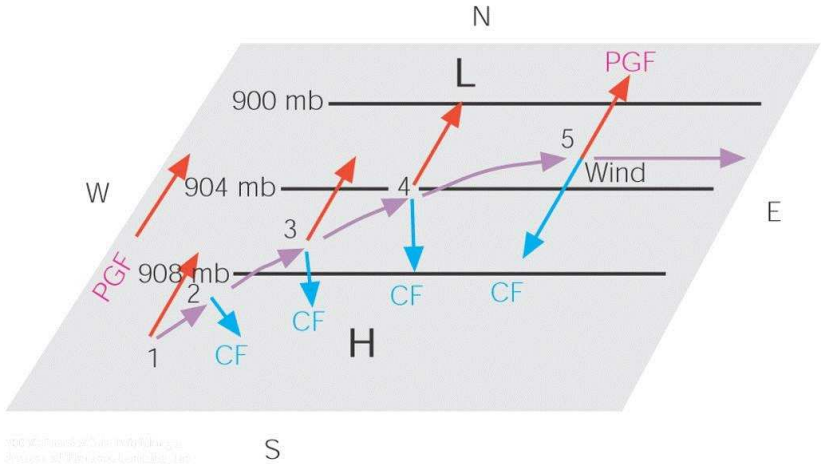
Beweging ten opzichte van een draaiende aarde



De Corioliskracht is evenredig met de sinus van de breedtegraad:

$$F_{C,x} \sim 2\omega \sin(\varphi)v_y, \quad F_{C,y} \sim -2\omega \sin(\varphi)v_x$$

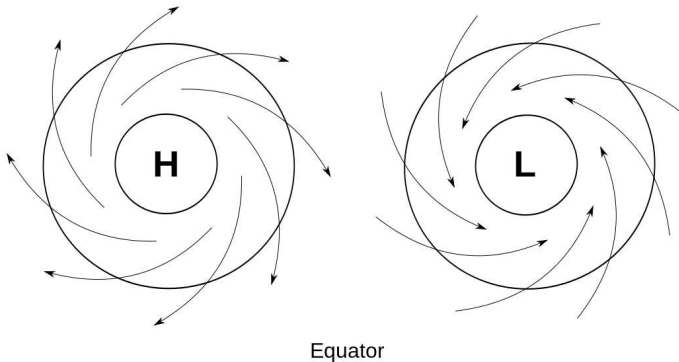
Geostroof evenwicht



Op gemiddelde noorderbreedte zijn drukgradiënt en Corioliskracht bijna in evenwicht \implies windrichting parallel aan isobaren

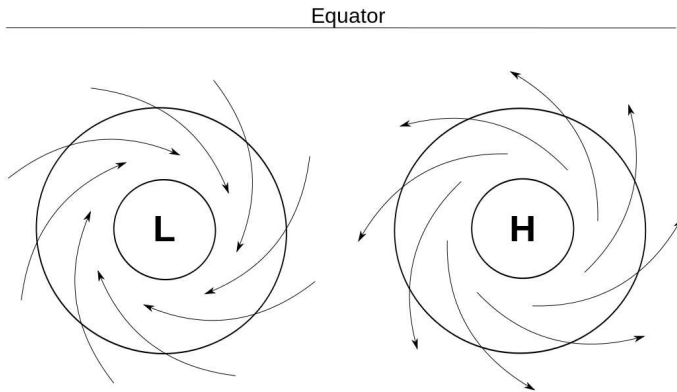
De wet van Buys-Ballot

Als je op het noordelijk halfrond met de rug naar de wind staat, ligt een hogedrukgebied rechts en een lagedrukgebied links

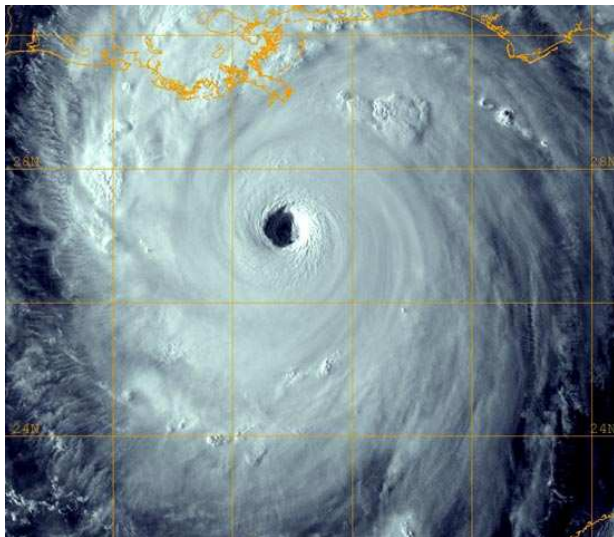


De wet van Buys-Ballot

Als je op het zuidelijk halfrond met de rug naar de wind staat, ligt een hogedrukgebied links en een lagedrukgebied rechts

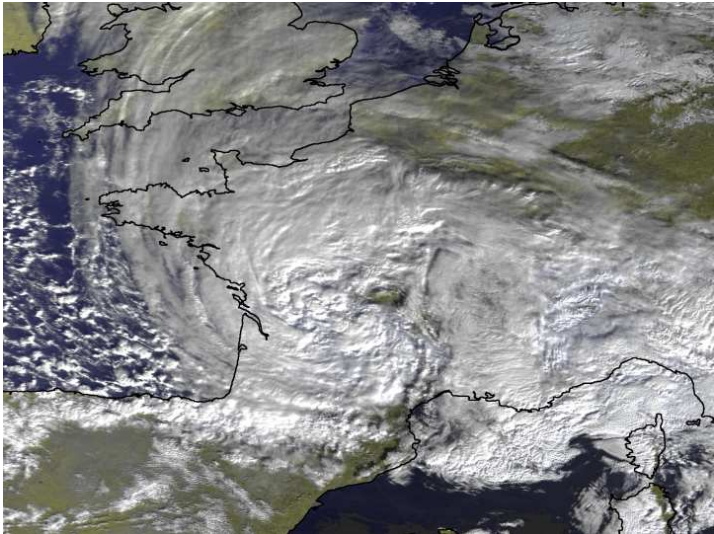


Spiraalvormige luchtmassa's



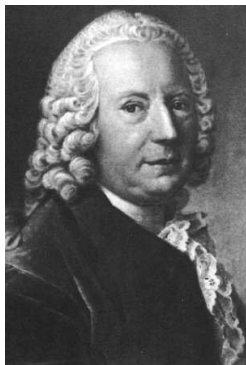
Orkaan Katrina boven de Golf van Mexico (2005)

Spiraalvormige luchtmassa's



Storm Klaus boven Frankrijk (2009)

De wet van Bernoulli

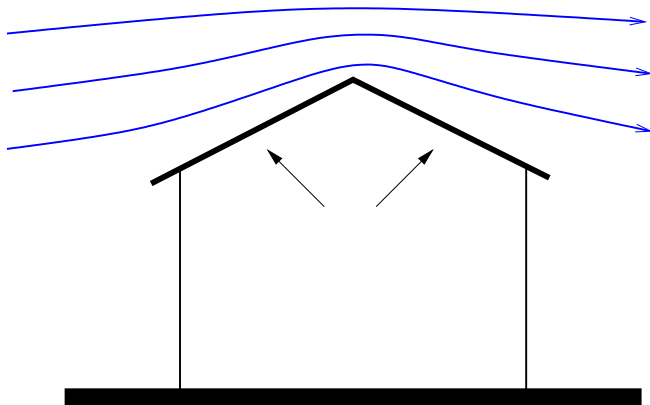


Voor een onsamendrukbare vloeistof gaat een toename van de snelheid gepaard met een afname van de druk:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = \text{constant}$$

Daniel Bernoulli (1700–1782), geboren in de Oudeboteringestraat te Groningen

De wet van Bernoulli



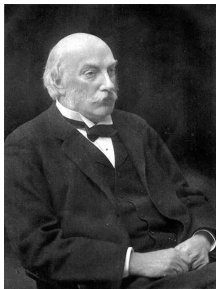
$$p + \frac{\rho v^2}{2} = \text{constant}$$

Inhoud

Deel 1: kracht en evenwicht

Deel 2: convectie en chaos

Rayleigh en Bénard: convectie van warmte

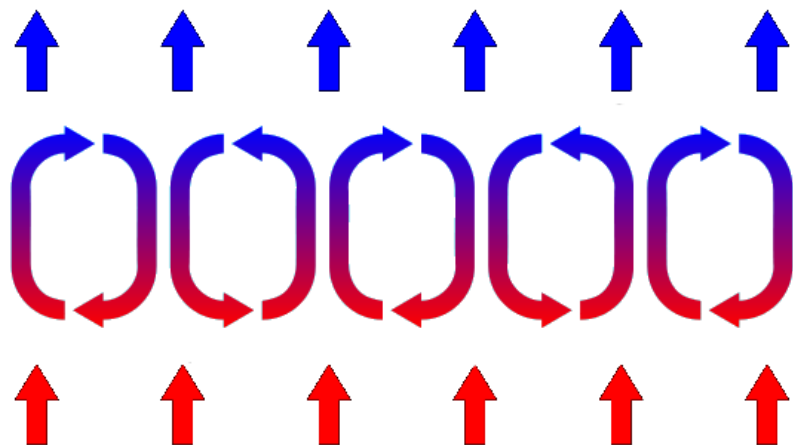


John William Strutt
(1842–1919)

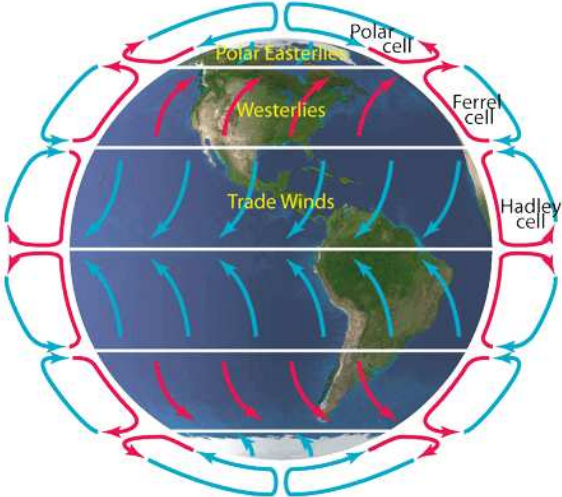


Henri Bénard
(1874–1939)

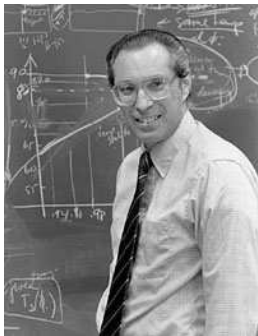
Convectiecellen



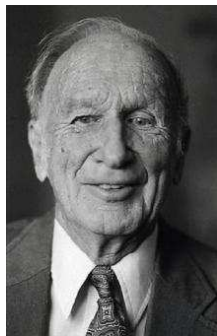
Convectiecellen



Saltzman en Lorenz: een speelgoed model voor convectie



Barry Saltzman
(1939–2001)



Edward Norton Lorenz
(1917–2008)

Het model van Lorenz (1963)

Een systeem van drie **differentiaalvergelijkingen**

$$x'(t) = \sigma[y(t) - x(t)]$$

$$y'(t) = x(t)[\rho - z(t)] - y(t)$$

$$z'(t) = x(t)y(t) - \beta z(t)$$

waarbij $\sigma = 10$, $\rho = 28$, and $\beta = 8/3$.

Oplossingen: geen getallen, maar functies van tijd!

Determinisme: $x(0), y(0), z(0)$ bepalen eenduidig $x(t), y(t), z(t)$ voor alle $t > 0$!

Discretiseren met Euler

Vervang afgeleides door **differentiequotienten**. Voor h klein:

$$x'(t) \approx \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \implies x(t+h) \approx x(t) + hx'(t)$$

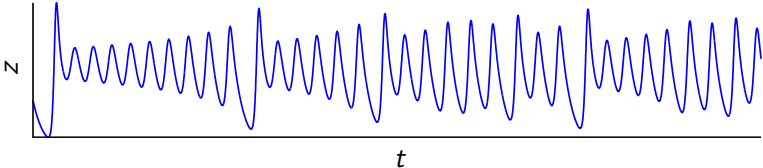
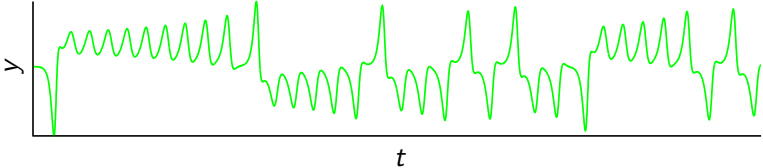
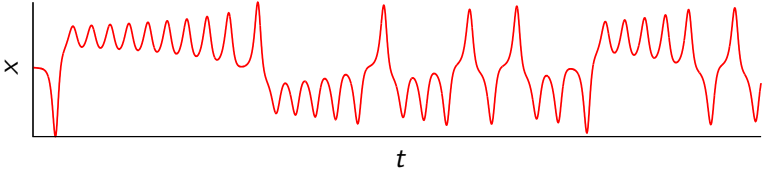
Doe hetzelfde voor y en z . Invullen geeft:

$$\begin{aligned}x(t+h) &\approx x(t) + h\{\sigma[y(t) - x(t)]\} \\y(t+h) &\approx y(t) + h\{x(t)[\rho - z(t)] - y(t)\} \\z(t+h) &\approx z(t) + h\{x(t)y(t) - \beta z(t)\}\end{aligned}$$

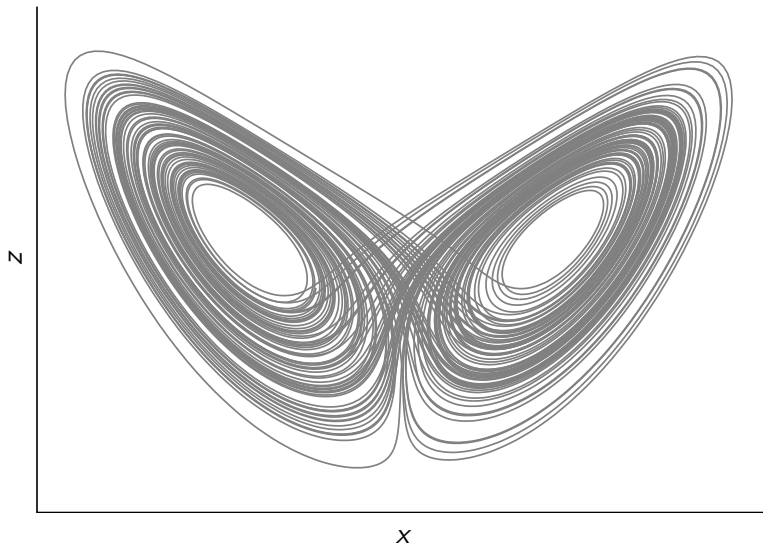
Hieruit volgt een **deterministische** tijdreeks:

$$\begin{array}{cccccc}x(0) & x(h) & x(2h) & x(3h) & x(4h) & \dots \\y(0) & y(h) & y(2h) & y(3h) & y(4h) & \dots \\z(0) & z(h) & z(2h) & z(3h) & z(4h) & \dots\end{array}$$

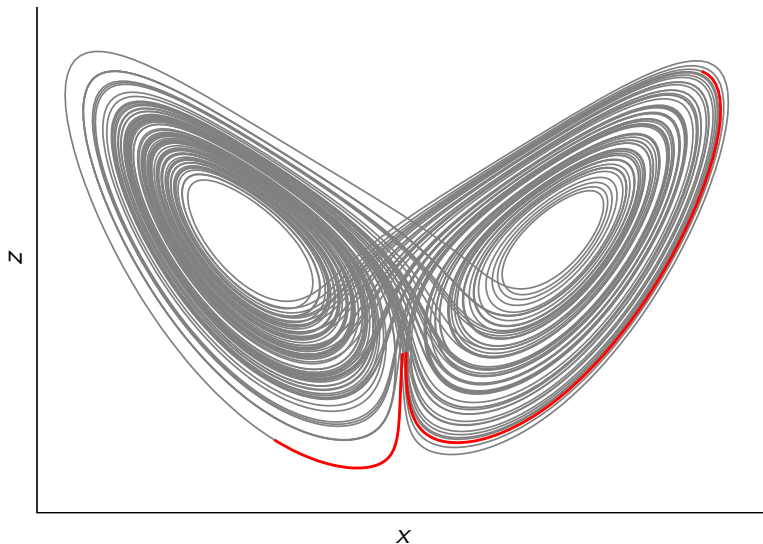
Grafieken van x, y, z als functie van t



Oplossingskrommen in de 3-dimensionale ruimte

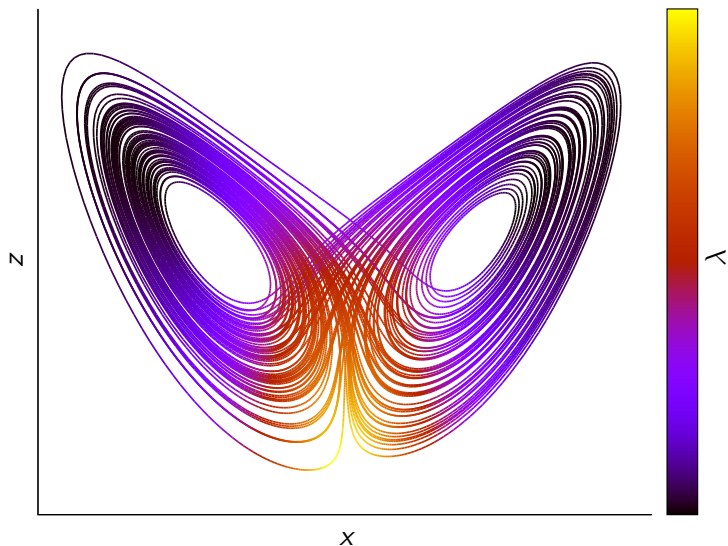


Chaos: gevoelige afhankelijkheid van begintoestand



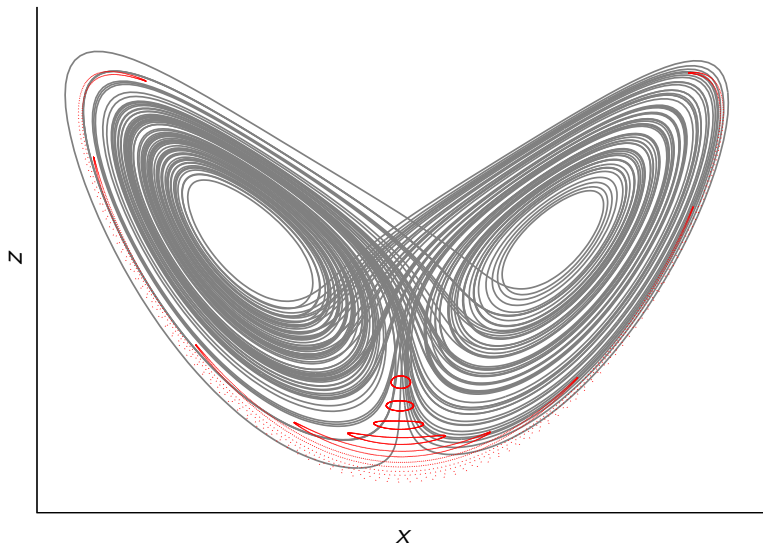
Voor kleine t geldt $|x_1(t) - x_2(t)| \sim e^{\lambda t} |x_1(0) - x_2(0)|$

Chaos: gevoelige afhankelijkheid van begintoestand



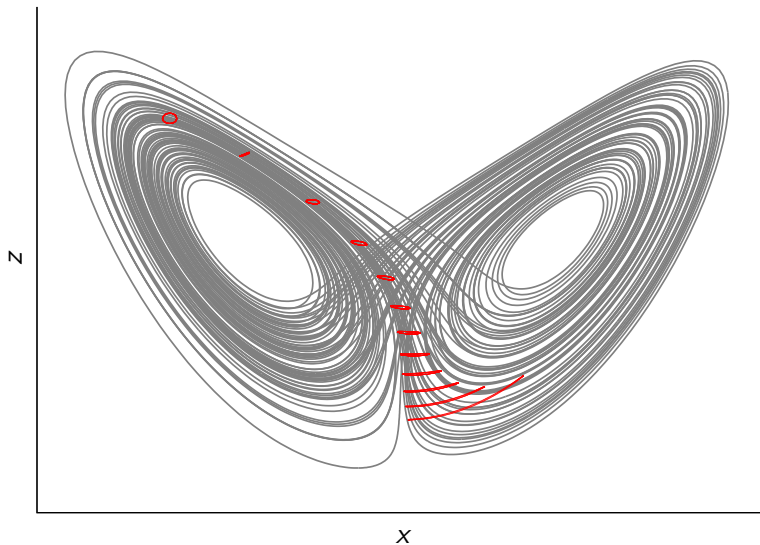
Voor kleine t geldt $|x_1(t) - x_2(t)| \sim e^{\lambda t} |x_1(0) - x_2(0)|$

Chaos: het einde van voorspelbaarheid?



Schatten van onzekerheid: ensemble voorspellingen

Chaos: het einde van voorspelbaarheid?



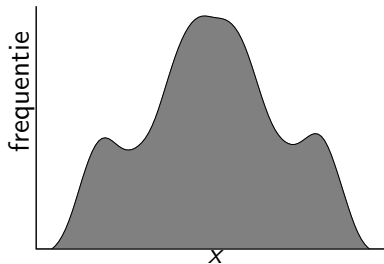
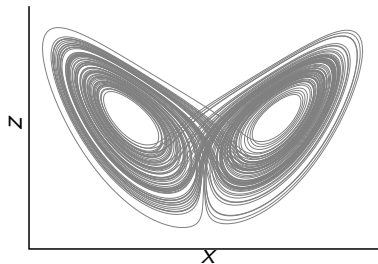
Schatten van onzekerheid: ensemble voorspellingen

Chaos: het einde van voorspelbaarheid?



Hoe voorspelbaar zijn weersextremen?

Chaos: het einde van voorspelbaarheid?



Weer versus klimaat: seamless predictions?

Meer weten?

Boeken

- ▶ M. Allaby. *Hurricanes*. Facts on File, 2003.
- ▶ H. Broer, J. van de Craats en F. Verhulst. *Chaostheorie: het einde van de voorspelbaarheid?* Epsilon, 2003.
- ▶ K. Floor. *Weerkunde: meteorologie voor iedereen*. Uitgeverij Elmar, 2004.
- ▶ E. Lorenz. *The Essence of Chaos*. CRC Press, 1995.
- ▶ I. Stewart. *Does God Play Dice?* Penguin, 1989.
- ▶ H. Tennekes. *De vlinder van Lorenz; de verrassende dynamica van chaos*. Aramith, 1990.

Internet (Wikipedia en Google)

- ▶ Zoektermen: *chaos, butterfly effect, dynamical systems*