Hilberts panoramisch uitzicht op de wiskunde: verscheidenheid en unificatie

Karim Zahidi

Overzicht

Biografische schets

- 1862: geboorte te Köningsberg
- 1880-1885: studeert aan de universiteit van Köningsberg
- 1885: doctoraat met een verhandeling over invariantentheorie
- 1886: benoeming aan de universiteit van Köningsberg
- 1892: huwelijk Käthe Jerosch (18641945)
- 1893: geboorte Franz Hilbert (18931969)
- 1895: benoeming aan de universiteit van Göttingen
- 1943: overlijden

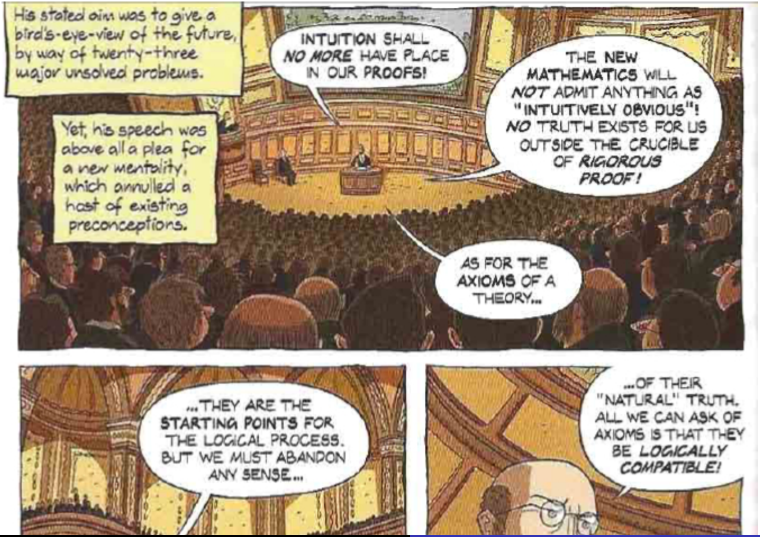
Biografische schets

Wiskundige veelzijdigheid

Hilbert was op de meest diverse gebieden van de wiskunde actief:

- invariantentheorie
- meetkunde ("Grundlagen der geometrie")
- getaltheorie ("Zahlenbericht")
- abstracte algebra
- wiskundige natuurkunde (o.a. algemene relativiteitstheorie)
- grondslagen van de wiskunde en de logica ("Grundlagen der Mathematik")
- ernorme invloed via zijn eigen werk en het werk van zijn studenten en medewerkers (Von Neumann, Weyl, Bernays, Courant, Lasker....)

23 problemen



23 problemen

- Internationaal Wiskunde Congres Parijs 1900
- voordracht "Mathematische Probleme" met daarin:
  - methodologische en filosofische opmerkingen over wiskunde
  - een lijst met 23 problemen voor de 20ste eeuw

"Wollen wir eine Vorstellung gewinnen von der muthmaßlichen Entwickelung mathematischen Wissens in der nächsten Zukunft, so müssen wir die offenen Fragen vor unserem Geiste passiren lassen und die Probleme überschauen, welche die gegenwärtige Wissenschaft stellt, und deren Lösung wir von der Zukunft erwarten. Zu einer solchen Musterung der Probleme scheint mir der heutige Tag, der an der Jahrhundertwende liegt, wohl geeignet; denn die großen Zeitabschnitte fordern uns nicht blos auf zu Rückblicken in die Vergangenheit, sondern sie lenken unsere Gedanken auch auf das unbekannte Bevorstehende."

- enorme inhoudelijke diversiteit
- wiskundige logica, differentiaalmeetkunde, variatierekening, getaltheorie, abstracte algebra, meetkunde, natuurkunde, functietheorie
- opgelost?
  - 10 problemen zijn volledig opgelost (het 3de probleem werd in 1900 opgelost)
  - 6 problemen zijn "opgelost" (bv. Kepler-conjecture in 1998)
  - 4 problemen zijn te vaag; verwijzen veeleer naar onderzoeksprogramma's
  - 2 problemen onopgelost (o.a. Riemann-hypothese)
- vruchtbare problemen

10. Entscheidung der Lösbarkeit einer Diophantischen Gleichung.

Eine Diophantische Gleichung mit irgendwelchen Unbekannten und mit ganzen rationalen Zahlenkoefficienten sei vorgelegt: man soll ein Verfahren angeben, nach welchem sich mittelst einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden läßt, ob die Gleichung in ganzen rationalen Zahlen lsbar ist.

10de probleem in "moderne" terminologie

Geef een algoritme dat, gegeven een willekeurige Diophantische vergelijking met gehele coëfficiënten, beslist of de vergelijking een oplossing heeft in de gehele getallen.

Algoritme

Algoritme is een procedure die:

- altijd werkt
- in een eindige tijd het antwoord geeft
- geen "goddelijke" ingevingen van de uitvoerder vereist
- algoritme = computerprogramma = Turing-machine

Algoritmisch oplosbare problemen

- priemgetallen
- oplossen van kwadratische vergelijkingen in 1 veranderlijke
- ...

Algoritme voor Diophantische vergelijkingen?

Filosofische overweging: "Es gibt kein Ignorabimus."

Wir müssen wissen.

Wir werden wissen. 

Concrete aanwijzingen? Vergelijkingen in 1 onbekende

- Hoe beslissen of een willekeurige Diophantische vergelijking zoals $7x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 3x + 6 = 0$ een gehele oplossing heeft?
- alle gehele oplossingen zijn delers van de constante term
- algoritme:
  1. vind alle delers van de constante term
  2. voor elke deler, bereken de waarde van de veelterm
  3. indien $= 0$ STOP (de vergelijking heeft oplossing); indien $\neq 0$, probeer volgende deler

Algoritme voor Diophantisch vergelijkingen?

Veralgemening naar 2 veranderlijken?

- naïeve veralgemening:
  - alle gehele oplossingen zijn delers van de constante term
  - FOUT
  - vb.: $x^2 - 2y^2 = 1$ heeft $(x, y) = (3, 2)$ als oplossing
- minder naïeve veralgemening:
  - kies waarde voor y en vul in in de vergelijking $\longrightarrow$ vergelijking 1 veranderlijke
  - pas methode toe voor vergelijkingen in 1 veranderlijke
  - PROBLEEM: methode stopt niet noodzakelijk

Stelling van Davis-Putnam-Robinson-Matijasevich

DPRM-stelling

1. Een verzameling is recursief opsombaar d.e.s.d. ze diophantisch is
2. Gevolg: er bestaat geen algoritme voor H10

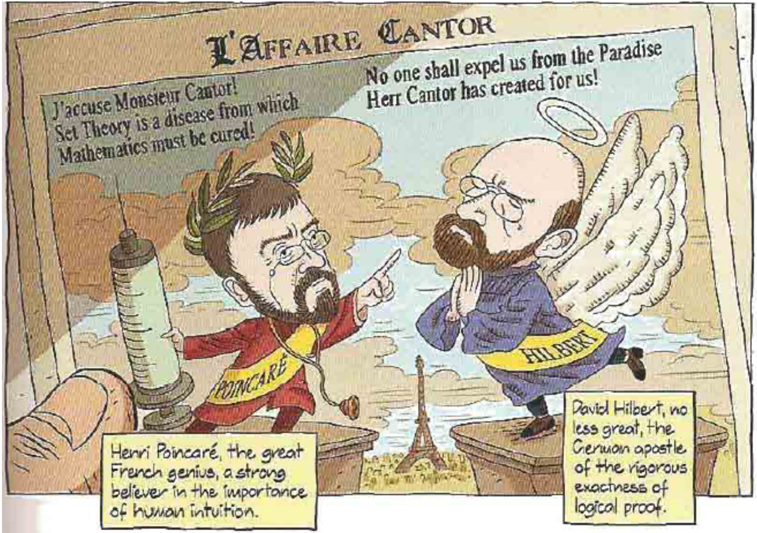
Vruchtbaarheid van het probleem

- interactie verschillende deelgebieden van de wiskunde
- gaf aanleiding tot de ontwikkeling van nieuwe wiskundige concepten
- suggereert uitbreidingen: wat als we oplosbaarheid vragen over rationale getallen, over reële getallen, complexe getallen,...

Meer over H10

- M. Davis, "Hilbert's Tenth Problem is unsolvable"
- G. Cornelissen, Wiskunde D-module "Diophantische vergelijkingen: mogelijkheden en onmogelijkheden"

Discussie tussen Poincaré en Hilbert



Discussie tussen Poincaré en Hilbert

Poincaré's visie

- logica speelt een belangrijke rol
- "rationele" intuïtie speelt een veel belangrijker rol
- paradoxen treden op wanneer de wiskunde te ver afdwaalt van de intuïtie
- verwerping van de verzamelingenleer van Cantor
- (cf. Brouwer)

Hilbert

- nadruk ligt op het formele aspect
- intuïtie speelt geen rol
- wiskunde als een formeel spel ("Mathematics is a game played according to certain simple rules with meaningless marks on

Formalisme als unificatie

Axiomatische methode

Voor een wiskundige theorie (bv. meetkunde, rekenkunde,...):

- een reeks axioma's
- axioma's definiëren op impliciete manier de grondbegrippen
- afleidingsregels die bepalen hoe uit de axioma's stellingen kunnen worden bewezen $\longrightarrow$ mechanisering van de wiskunde

Wiskunde moet:

- zich geen zorgen maken over de betekenis van de axioma's
- moet zich enkel zorgen maken over de consistentie van de axioma's

Kritiek op het formalisme

Problemen met het formalisme

- consistentiebewijzen?
- Gödel: elementaire rekenkunde kan haar eigen consistentie niet bewijzen
- elk consistentiebewijs is relatief

Hilberts erfenis

- 23 problemen hebben een belangrijke invloed gehad op de ontwikkeling van de wiskunde in de 20ste eeuw:
  - als leidraad
  - aanleiding gegeven tot de ontwikkeling van belangrijke deelgebieden van de wiskunde
- axiomatische methode is algemeen aanvaard
- problemen met het formalisme hebben aanleiding gegeven tot belangrijk onderzoek in de wiskundige logica en filosofie van de wiskunde (ontwikkeling van meta-wiskunde, bewijstheorie, theorie van recursieve functies, theorie van algoritmen)

Bedankt voor het luisteren

Laatste woord is aan Hilbert

"Manche Menschen haben einen Gesichtskreis vom Radius 0 und nennen dies ihren Standpunkt."