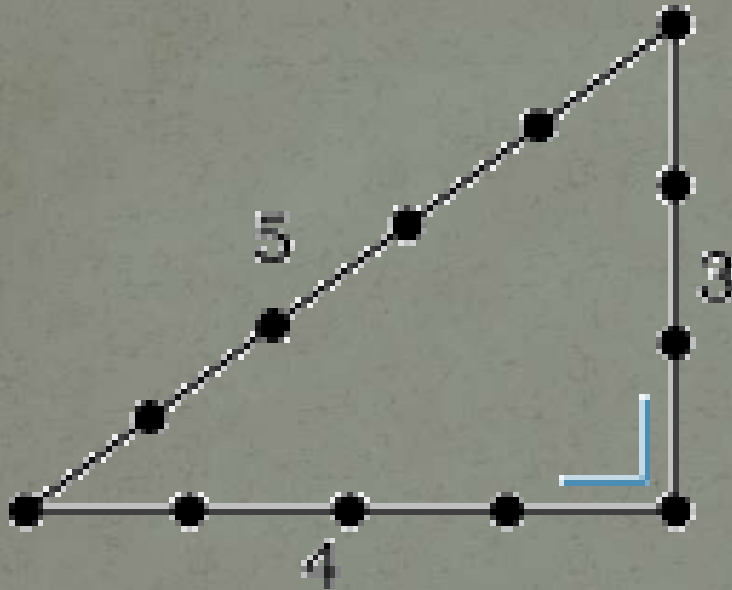


# Pythagoreïsche drietallen

---

Guy Van Leemput  
Sint-Jozefcollege Turnhout (België)

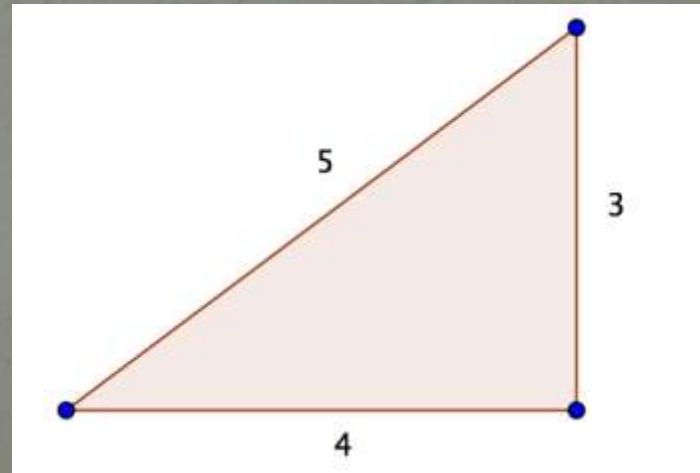
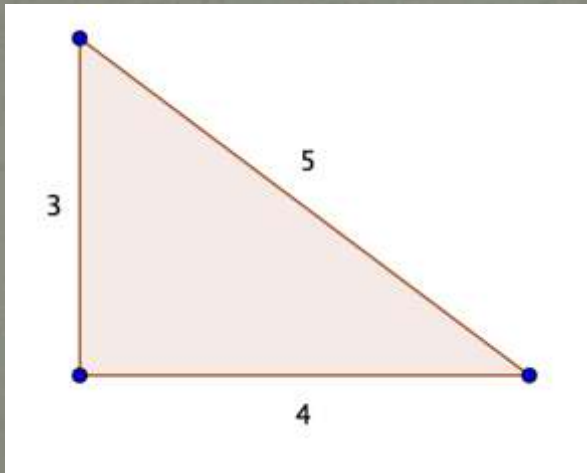
$$3^2 + 4^2 = 5^2$$



We noemen ( 3 , 4 , 5 ) een Pythagoreïsch drietal  
( een PD )

# Volgorde?

4 3 5

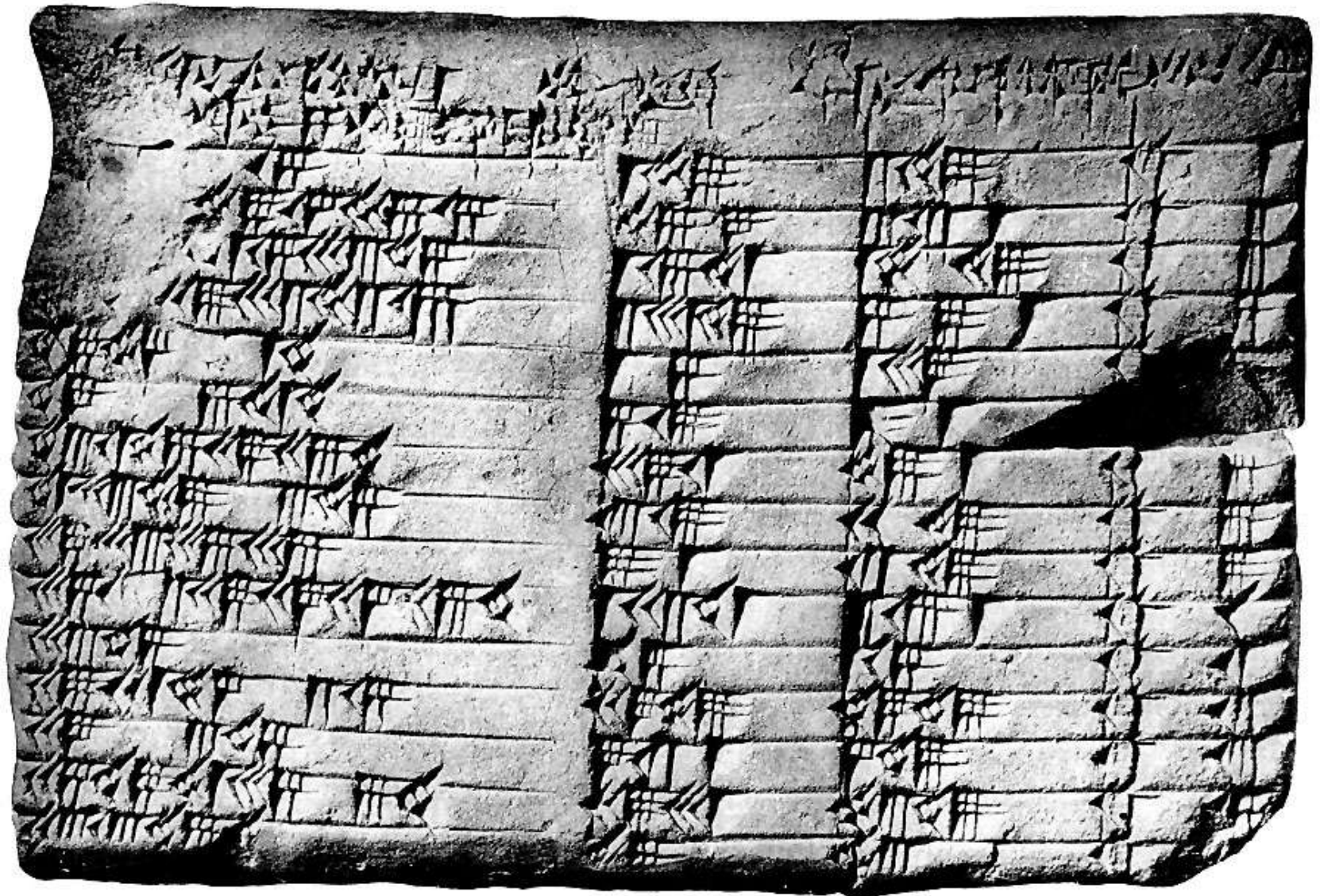


# volgorde

- het grootste getal achteraan
- het kleinste vooraan



Plimpton 322, ca 1900BC < 1600BC





# Babylonische getallen

𐍪 1	𐍪𐍪 11	𐍪𐍪𐍪 21	𐍪𐍪𐍪𐍪 31	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 41	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 51
𐍪𐍪 2	𐍪𐍪𐍪 12	𐍪𐍪𐍪𐍪 22	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 32	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 42	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 52
𐍪𐍪𐍪 3	𐍪𐍪𐍪𐍪 13	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 23	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 33	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 43	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 53
𐍪𐍪𐍪𐍪 4	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 14	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 24	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 34	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 44	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 54
𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 5	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 15	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 25	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 35	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 45	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 55
𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 6	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 16	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 26	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 36	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 46	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 56
𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 7	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 17	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 27	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 37	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 47	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 57
𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 8	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 18	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 28	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 38	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 48	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 58
𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 9	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 19	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 29	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 39	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 49	𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪𐍪 59
𐍪 10	𐍪 20	𐍪 30	𐍪 40	𐍪 50	

# Lijst met kwadraten

`seq( x2 , x , 1 , 30 )`

1 4 9 16 25 36 49 64 81 100  
121 144 169 196 225 256 289 324  
361 400 441 484 529 576 625 676  
729 784 841 900

# Lijst met kwadraten

seq( x<sup>2</sup> , x , 1 , 30 )

1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
121	144	169	196	225	256	289	324		
361	400	441	484	529	576	625	676		
729	784	841	900						



Het kwadraat van een even getal is een viervoud

$$(2v)^2 = 4v^2 = 4v'$$

Het kwadraat van een oneven getal is een viervoud + 1

$$(2v + 1)^2 = 4v^2 + 4v + 1 = 4v' + 1$$

# Zelf op zoek naar PD

Bijvoorbeeld met GRM TI-84(+)

Clear all Lists

STAT edit

$$L_1 = \text{seq} ( x , x , 1 , 99 )$$

$$L_2 = \text{seq} ( x^2 , x , 1 , 99 )$$

$$L_3 = \text{seq} ( x^2 , x , 2 , 100 )$$

$$L_4 = \sqrt{ ( L_2 + L_3 ) }$$

Lijst van de kwadraten van 1 tot 99

Lijst van de kwadraten van 2 tot 100  
dus  $b = a + 1$

Is de wortel van de som van deze twee  
openvolgende kwadraten een natuurlijk getal?

Voor welke a is

$a^2 + (a+1)^2$  terug een kwadraat?

L2	L3	L4	4
1	4	<del>2.2361</del>	
4	9	3.6056	
9	16	5	
16	25	6.4031	
25	36	7.8102	
36	49	9.2195	
49	64	10.63	

L4(1)=2.236067977...

(3, 4, 5)

(20, 21, 29)

L2	L3	L4	4
256	289	23.345	
289	324	24.759	
324	361	26.173	
361	400	27.586	
400	441	29	
441	484	30.414	
484	529	<del>31.828</del>	

L4(22)=31.8276609...



$$c = b + 2$$

$$L_1 = \text{seq}(x, x, 1, 99)$$

$$L_2 = \text{seq}(x^2, x, 1, 99)$$

$$L_3 = \text{seq}(x^2, x, 3, 101)$$

$$L_4 = \sqrt{L_2 + L_3}$$

Lijst van de kwadraten van 1 tot 99

Lijst van de kwadraten van 3 tot 101

Voor welke a is

$a^2 + (a + 2)^2$  terug een kwadraat?

L2	L3	L4	4
1	9	<del>3.1623</del>	
4	16	4.4721	
9	25	5.831	
16	36	7.2111	
25	49	8.6023	
36	64	10	
49	81	11.402	

L4(1)=3.162277660...

(3, 4, 5)



(6, 8, 10)

(20, 21, 29)

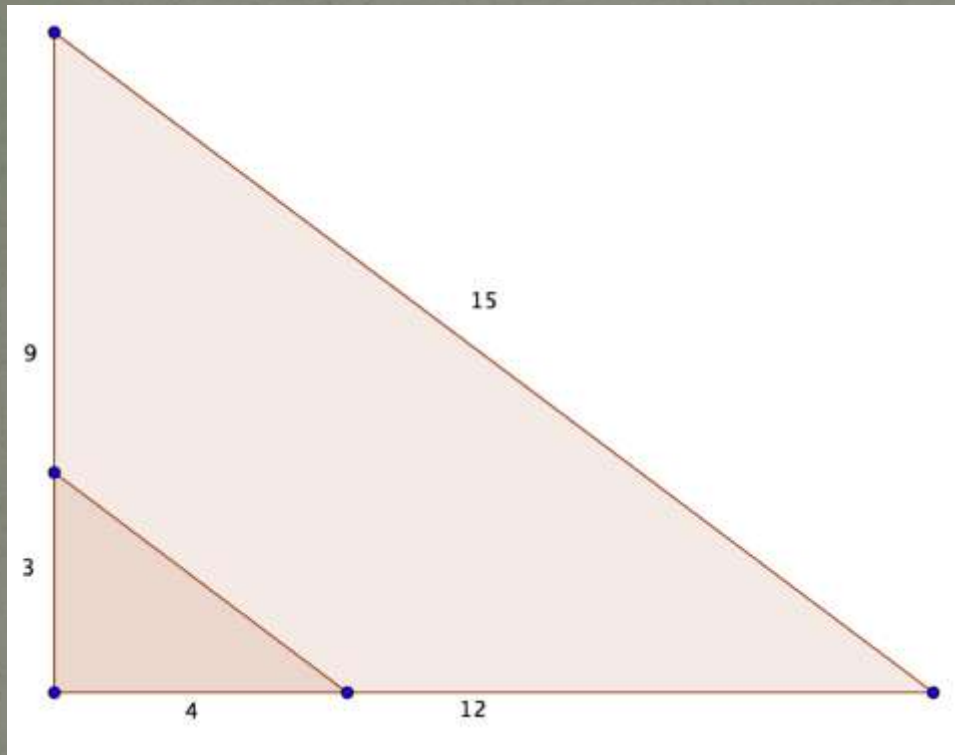


(40, 42, 58)

L2	L3	L4	4
1296	1444	52.345	
1369	1521	53.759	
1444	1600	55.172	
1521	1681	56.586	
1600	1764	58	
1681	1849	59.414	
1764	1936	<del>60.823</del>	

L4(42)=60.8276253...

# PD en PPD



$(9, 12, 15)$



$:3$

$(3, 4, 5)$



# PPD

We noemen  $(a, b, c)$  een PPD als  
 $(a, b, c)$  een PD is en  
 $a, b, c$  onderling ondeelbaar zijn

Bij een PPD zullen nooit de rechthoekszijden beide even zijn

Het kwadraat van een even getal is een viervoud

$$(2v)^2 = 4v^2 = 4v'^2$$

De som van twee viervouden is terug een viervoud

Als het kwadraat een viervoud is dan moet het een kwadraat zijn van een even getal

Dan zijn de drie getallen alle even en dus niet PPD

Bij een PPD zullen nooit de rechthoekszijden beide oneven zijn

Het kwadraat van een oneven getal is een viervoud + 1

$$(2v+1)^2 = 4v' + 1$$

De som van twee kwadraten (van oneven getallen)  
is dan een viervoud + 2

$$4v' + 1 + 4v'' + 1 = 4v + 2$$

Tegenspraak want  
een kwadraat is steeds een viervoud of een viervoud + 1



Dus als  $(a, b, c)$  een PPD is  
met  $c$  de schuine zijde,  
dan is  $a$  even en  $b$  oneven of omgekeerd

$$L_3 = \text{seq}(x^2, x, 4, 102)$$

$$b = a + 3$$

L2	L3	L4	4
16	49	8.0623	
25	64	9.434	
36	81	10.817	
49	100	12.207	
64	121	13.601	
81	144	15	
100	169	<del>16.4012194</del>	

L4(10) = 16.4012194...

(3, 4, 5)



(9, 12, 15)

(60, 63, 87)

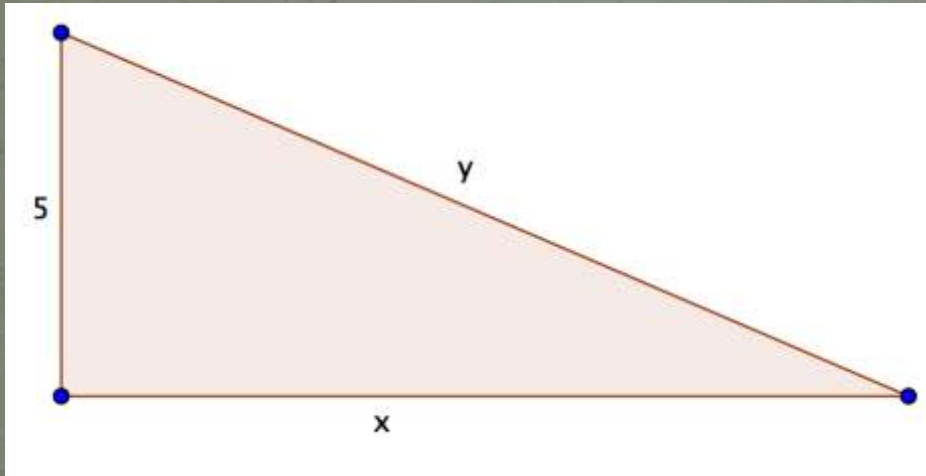


(20, 21, 29)

L2	L3	L4	4
3364	3721	84.172	
3481	3844	85.586	
3600	3969	87	
3721	4096	88.414	
3844	4225	89.828	
3969	4356	91.241	
4096	4489	<del>92.6552750</del>	

L4(64) = 92.6552750...

Zoek  $x$  en  $y$  zodat  $(5, x, y)$  PPD is



$$\begin{cases} y - x = 5 \\ y + x = 5 \end{cases}$$

$y = 5$  en  $x = 0$

$$5^2 = y^2 - x^2$$

$$5^2 = (y - x)(y + x)$$

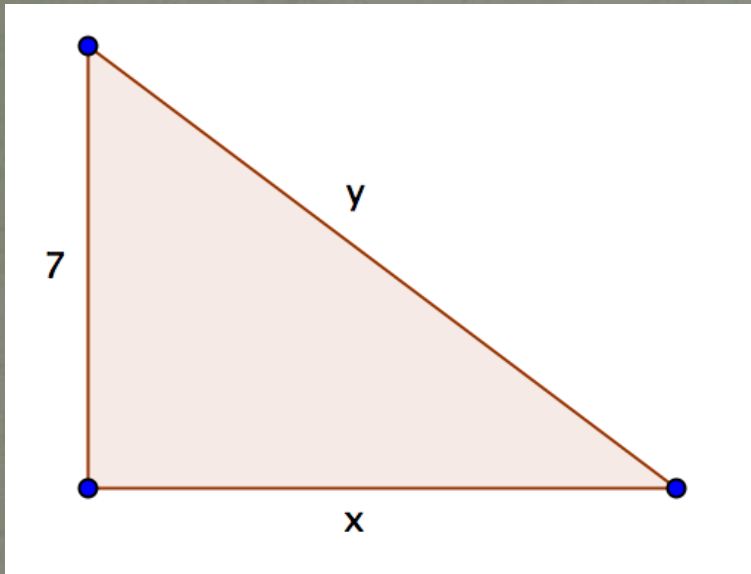
$$\begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = 25 \end{cases}$$

$y = 13$  en  $x = 12$

$(5, 12, 13)$  is PPD



Zoek  $x$  en  $y$  zodat  $(7, x, y)$  PPD is



$$\begin{cases} y - x = 7 \\ y + x = 7 \end{cases}$$

$y = 7$  en  $x = 0$

$$7^2 = y^2 - x^2$$

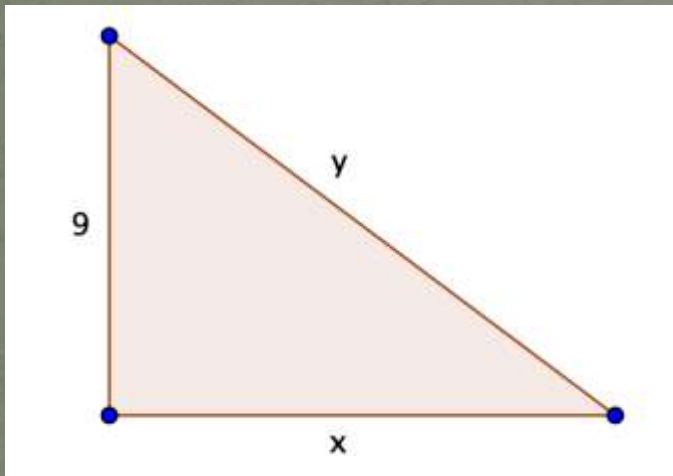
$$7^2 = (y - x)(y + x)$$

$$\begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = 49 \end{cases}$$

$y = 25$  en  $x = 24$

$(7, 24, 25)$  is PPD

Zoek  $x$  en  $y$  zodat  $(9, x, y)$  PPD is



$$9^2 = y^2 - x^2$$

$$9^2 = (y - x)(y + x)$$

$$\begin{cases} y - x = 9 \\ y + x = 9 \end{cases}$$

$$y = 9 \text{ en } x = 0$$

$$\begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = 81 \end{cases}$$

$$y = 41 \text{ en } x = 40$$

$$\begin{cases} y - x = 3 \\ y + x = 27 \end{cases}$$

$$y = 15 \text{ en } x = 12$$

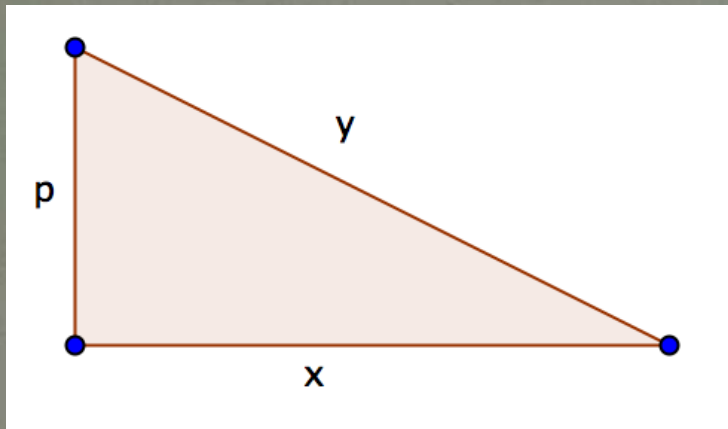
$(9, 40, 41)$  is PPD

$(9, 12, 15)$

$(3, 4, 5)$

Zoek  $x$  en  $y$  zodat  $(p, x, y)$  PPD is

stel  $p$  priem



$$p^2 = y^2 - x^2$$

$$p^2 = (y - x)(y + x)$$

$$\begin{cases} y - x = p \\ y + x = p \end{cases}$$

$$y = p \text{ en } x = 0$$

$$\begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = p^2 \end{cases}$$

$$y = \frac{p^2 + 1}{2} \text{ en } x = \frac{p^2 - 1}{2}$$

$$\left( p, \frac{p^2 - 1}{2}, \frac{p^2 + 1}{2} \right) \text{ is } \mathbf{P} \text{ PD want ...}$$

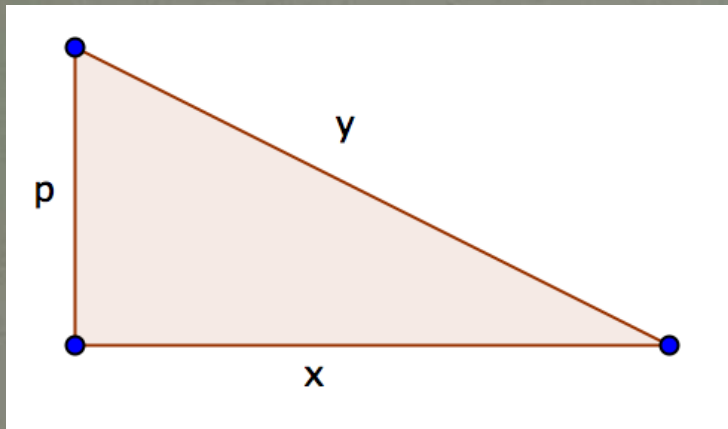
want  $p$  is priem

Het kwadraat van  
een oneven getal is  
een  $4v+1$



Zoek  $x$  en  $y$  zodat  $(p, x, y)$  PPD is

stel  $p$  **oneven**



$$p^2 = y^2 - x^2$$

$$p^2 = (y - x)(y + x)$$

$$\begin{cases} y - x = p \\ y + x = p \end{cases}$$

$$y = p \text{ en } x = 0$$

$$\begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = p^2 \end{cases}$$

$$y = \frac{p^2 + 1}{2} \text{ en } x = \frac{p^2 - 1}{2}$$

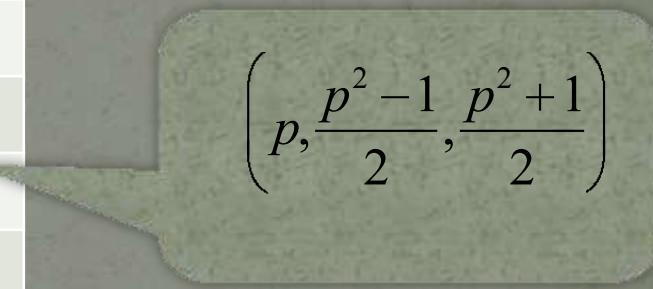
$$\left( p, \frac{p^2 - 1}{2}, \frac{p^2 + 1}{2} \right)$$

Is PD want ...

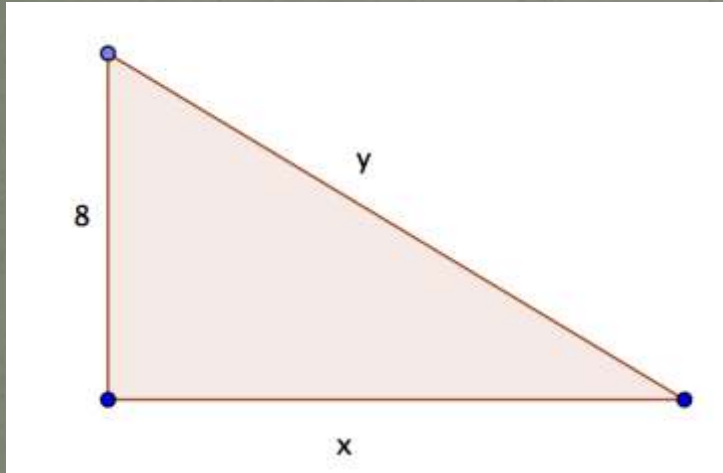
Het kwadraat van  
een oneven getal is  
een  $4v+1$

# Lijst van PPD

a	b	c
3	4	5
5	12	13
7	24	25
9	40	41
11	60	61
13	84	85
20	21	29


$$\left( p, \frac{p^2 - 1}{2}, \frac{p^2 + 1}{2} \right)$$

Zoek  $x$  en  $y$  zodat  $(8, x, y)$  PPD is



$$8^2 = y^2 - x^2$$

$$8^2 = (y - x)(y + x)$$

$$\begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = 64 \end{cases}$$

$$y = 32,5 \text{ en } x = 31,5$$

$$\begin{cases} y - x = 2 \\ y + x = 32 \end{cases}$$

$$y = 17 \text{ en } x = 15$$

$$(8, 15, 17)$$

$$\begin{cases} y - x = 4 \\ y + x = 16 \end{cases}$$

$$y = 10 \text{ en } x = 6$$

$$(6, 8, 10)$$

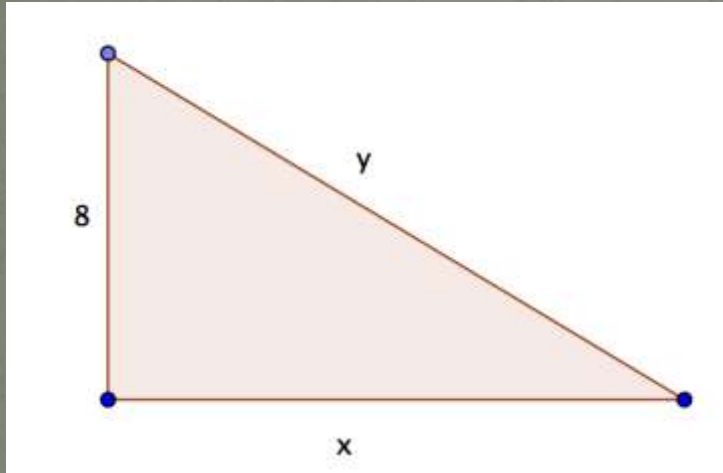
$$(3, 4, 5)$$

$$\begin{cases} y - x = 8 \\ y + x = 8 \end{cases}$$

$$y = 8 \text{ en } x = 0$$



Zoek  $x$  en  $y$  zodat  $(2v, x, y)$  PPD is



$$(2v)^2 = y^2 - x^2$$

$$2 \cdot 2v^2 = (y - x)(y + x)$$

$$\begin{cases} y - x = 2 \\ y + x = 2v^2 \end{cases}$$

$$y = v^2 + 1 \text{ en } x = v^2 - 1$$

$(2v, v^2 - 1, v^2 + 1)$  is PD

Ook PPD ?

Als  $v$  oneven is dan is  $v^2$  een viervoud  $+1$

Als  $v$  even is dan is  $v^2$  een viervoud

met  $v$  even

$2v$	$v^2 - 1$	$v^2 + 1$
4	3	5
8	15	17
12	35	37
16	63	65
20	99	101

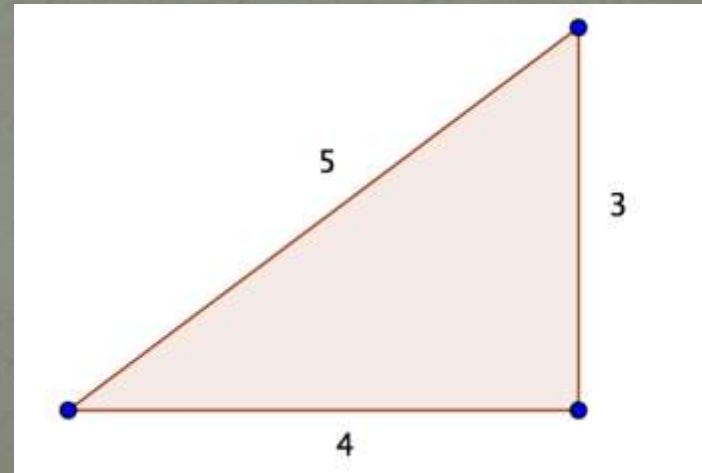
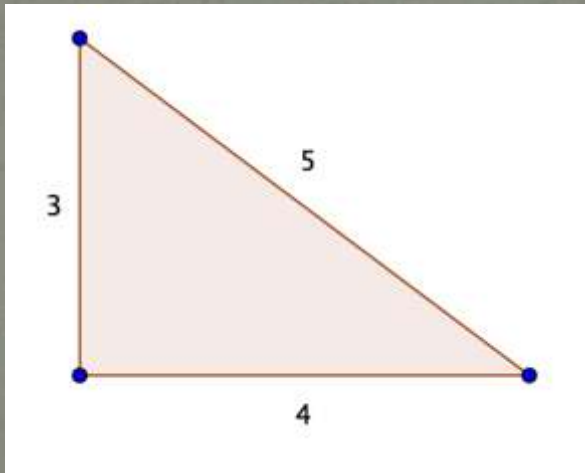
a	b	c
3	4	5
5	12	13
7	24	25
9	40	41
11	60	61
13	84	85
20	21	29

$2v$	$v^2 - 1$	$v^2 + 1$
4	3	5
8	15	17
12	35	37
16	63	65
20	99	101

# Volgorde?

- achteraan het grootste getal
- vooraan het kleinste / het even getal / het oneven getal

4 3 5





# Eerste getal oneven of eerste getal even

a	b	c
3	4	5
5	12	13
7	24	25
8	15	17
9	40	41
11	60	61
12	35	37
13	84	85
20	21	29

a	b	c
3	4	5
5	12	13
7	24	25
9	40	41
11	60	61
13	84	85
15	8	17
21	20	29
35	12	37

a	b	c
4	3	5
8	15	17
12	5	13
12	35	37
16	63	65
20	21	29
24	7	25
40	9	41
60	11	61

a , b , c met  $a^2 + b^2 = c^2$

a , b , b+k met  $a^2 + b^2 = (b + k)^2$

$$a^2 + b^2 = b^2 + 2bk + k^2$$

$$a^2 = 2bk + k^2$$

$$2bk = a^2 - k^2$$

$$b = \dots$$