De zonnecirkel

Jan P. Hogendijk

Slotlezing, Nationale Wiskundedagen, Noordwijkerhout

29 januari 2011

Universiteit Utrecht

Structuur van de lezing

- Deel 1: Waarom verdelen wij een rechte hoek in 90 graden? 1 graad in 60 minuten [“kleintjes”], 1 minuut in 60 seconden [“tweeden”]?
- Deel 2: Welke interessante wiskunde heeft dit opgeleverd?

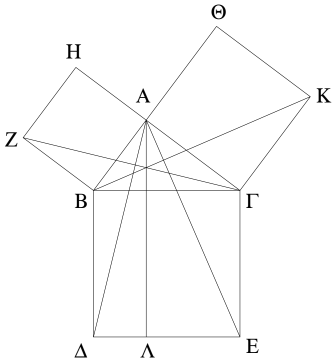
Deel 1. Verdelen van de rechte hoek

1. Het zou meer voor de hand liggen, een rechte hoek in 100 graden te verdelen.
2. Vergelijk: kwartcirkel op aarde door Parijs van Noordpool tot evenaar = 10.000.000 meter (1791 -1799).

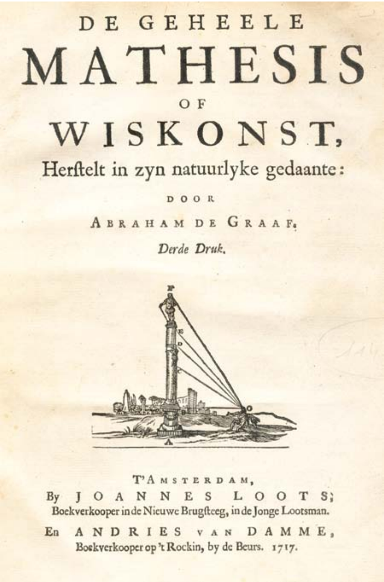
Elementen van Euclides (300 v. C.)

2000 jaar lang het standaard leerboek van meetkunde.
Definitie van de rechte hoek
axioma: alle rechte hoeken zijn gelijk.

Nergens graden, minuten en seconden!



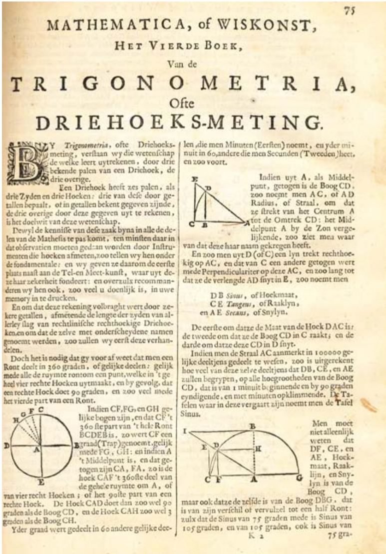
Op zoek naar graden en minuten in oude boeken.



DE GEHEELE
MATHESIS
OF
WISKONST,
Herstelt in zyn natuurlyke gedaante:
DOOR
ABRAHAM DE GRAAF.
Derde Druk.

T'AMSTERDAM,
By JOANNES LOOTS;
Boekverkooper in de Nieuwe Brugsteeg, in de Jonge Lootsman.
En ANDRIES VAN DAMME,
Boekverkooper op 't Rockin, by de Beurs. 1717.

Abraham de Graaf,
De Mathesis of Wiskonst
herstelt in zyn natuurlijke
gedaante (1716)



75

MATHEMATICA, of WISKONST,

HET VIERDE BOEK,

Van de

TRIGONOMETRIA,

Ofte

DRIEHOEKS-METING.

BY *Trigonometria*, ofte Driehoeks-meting, verſtaan wy die wetenſchap de welke leert uytrekenen, door drie bekende palen van een Driehoek, de drie overige.

Een Driehoek heeft zes palen, als drie Zyden en drie Hoeken: drie van deſe door getallen bepaalt, of in getallen bekent gegeven zijnde, de drie overige door deze gegeven uyt te rekenen, is het doelwit van deze wetenſchap.

Dewyl de kenniſſe van deſe zaak byna in alle de delen van de Matheſis te pas komt, ten minſten daar in dat obſervatien moeten gedaan worden door Inſtrumenten die hoeken afmeten, zoo tellen wy hen onder de fondamentale: en wy geven ze daarom de eerſte plaats naaſt aan de Tel-en Meet-kunſt, waar uyt deze haar zekerheit fondeert: en overzulx recommanderen wy hen ook, zoo veel u doenlijk is, in uwe memory in te drucken.

En om dat deze rekening volbraght wert door zekere getallen, afmetende de lengte der zyden van allerley ſlag van rechtliniſche rechthoekige Driehoeken, en om dat de zelve met onderſcheydene namen genoemt werden, zoo zullen wy eerſt deze verhandelen.

Doch het is nodig dat gy voor af weet dat men een Ront deelt in 360 graden, of gelijke deelen: gelijk mede alle de ruymte rontom een punt, welke in 't geheel vier rechte Hoeken uytmaakt, en by gevolg, dat een rechte Hoek doet 90 graden, en zoo veel mede het vierde part van een Ront.

Indien CF, FG, en GH gelijke bogen zijn, en dat CF 't 360ſte part van 't hele Ront BCDEB is, zo wert CF een graad (Trap) genoemt, gelijk mede FG, GH: en indien A 't Middelpunt is, en dat getogen zijn CA, FA, zo is de hoek CAF 't 360ſte deel van de gehele ruymte om A, of van vier recht Hoeken; of het 90ſte part van een rechte Hoek. De Hoek CAD doet dan zoo wel 90 graden als de Boog CD, en de Hoek CAH zoo wel 3 graden als de Boog CH.

Yder graad wert gedeelt in 60 andere gelijke delen, die men Minuten (Eerſten) noemt, en yder minuit in 60, andere die men Secunden (Tweeden) heet, en zoo voort.

Indien uyt A, als Middelpunt, getogen is de Boog CD, zoo noemt men AC, of AD Radius, of Straal, om dat ze ſtrekt van het Centrum A tot de Omtrek CD: het Middelpunt A by de Zon vergelijkende, zoo ziet men waar van dat deze haar naam gekregen heeft.

En zoo men uyt D (of C) een lyn trekt rechthoekig op AC, en dat van C een andere getogen wert mede Perpendiculariter op deze AC, en zoo lang tot dat ze de verlengde AD ſnyt in E, zoo noemt men

DB *Sinus*, of Hoekmaat,
CE *Tangens*, of Raaklyn,
en AE *Secans*, of Snylyn.

De eerſte om datze de Maat van de Hoek DAC is: de tweede om dat ze de Boog CD in C raakt; en de darde om datze deze CD in D ſnyt.

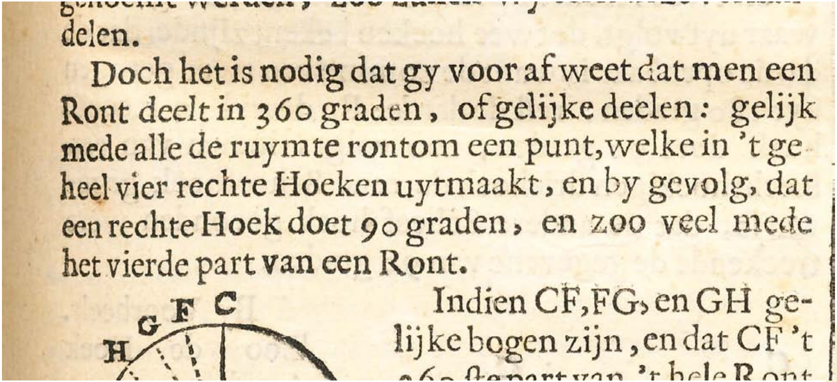
Indien men de Straal AC aanmerkt in 100000 gelijke deeltjens gedeelt te weſen, zoo is uitgerekent hoe veel van deze zelve deeltjens dat DB, CE, en AE zullen begrypen, op alle hoegrootheden van de Boog CD, dat is van 1 minuit beginnende en by 90 graden eyndigende, en met minuten opklimmende. De Tafelen waar in deze vergaart zijn noemt men de Tafel Sinus.

Men moet niet alleenlijk weten dat DF, CE, en AE, Hoekmaat, Raaklijn, en Snylyn is van de Boog CD, maar ook datze de zelfde is van de Boog DBG, dat is van zijn verſchil of vervulzel tot een half Ront: zulx dat de Sinus van 75 graden mede is Sinus van 105 graden, en van 105 graden, ook is Sinus van 75 gra-

K 2

Graden en minuten niet in het hoofdstuk over Geometria
Pas bij de Trigonometria

Abraham de Graaf, De Mathesis of Wiskonst herstelt in zyn natuurlijke gedaante (1716)



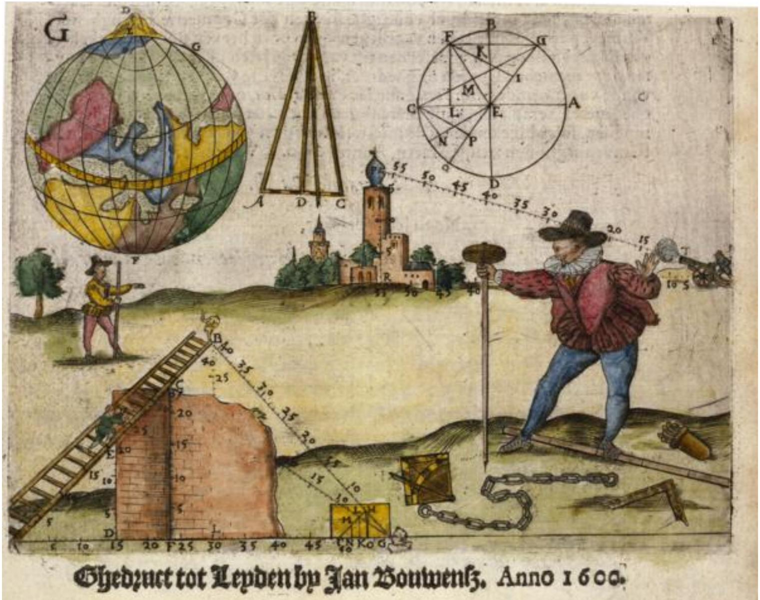
delen.

Doch het is nodig dat gy voor af weet dat men een Ront deelt in 360 graden, of gelijke deelen: gelijk mede alle de ruymte rontom een punt, welke in 't geheel vier rechte Hoeken uytmaakt, en by gevolg, dat een rechte Hoek doet 90 graden, en zoo veel mede het vierde part van een Ront.

Indien CF, FG, en GH gelijke bogen zijn, en dat CF 't

Graden en minuten in de landmeetkunde

Sems en Dou, Practijck van Landmeten (Leiden 1600).



Sinustabel van Dou (1600).

Graden.	Minuten.	Den Arcus ofte Boghe.	Den Sinus of Koorde.	Sagitta ofte Pijl.	Den Inhoudt der Circkel-bogen.
	3	357792	357716	6401	304997
	6	366519	366437	6716	328943
	9	375246	375158	7040	352289
	12	383972	383878	7371	382435
	15	392699	392598	7710	403582
	18	401426	401318	8056	430728
	21	410152	410038	8410	459874
	24	418879	418757	8772	490020
	27	427606	417476	9141	521167
	30	436332	436194	4518	553813
	33	445059	444912	9902	587458
	36	453786	453630	10294	623106
	39	462572	462347	10693	659252
	42	471239	471065	11101	697398
	45	479766	479781	11516	736544
	48	488698	488498	11939	777691
	51	497419	497214	12369	819837
	54	506145	505929	12807	863983
	57	514872	514645	13252	909129
3	0	523299	523360	13705	956276
	3	532325	532075	14165	1004422

Dit was nieuw!

Landmeetkunde anno 1591: zonder graden en minuten!


Von Feldmessen / nach der
Geometrei /
Wie man Künstlich
das Feld vnd Erdreich / mit gewisser Meß-
ruten vnd Schnuren / nach eines jeden Landes vnd Stadt
Maß / Eln vnd gebrauch / nach der leng vnd breit / an Eckern / Gärten /
Weinbergen / Wiesen / Werthern / Höltzern vnd andern / in der vie-
rung / Eckig vnd runde / auff mancherley weise recht messen / Vnd das
nach der Eln / Ruten / Morgen / Ackern vnd Hufen / nach rechter ge-
wisser Arithmetischer art rechnen / außtheilen vnd bringen sol.
Alles mit vnterschiedlichen vnd deutlichen Geo-
metrischen Figurn angezeiget vnd
fundiret.
Item / Vom vnterscheid des Feldmessens / nach
Geometrischer vnd Idiotischer weise zugebrauchen / darinnen die Ir-
runge vnd Mengel / mit guten gründen vnd einfeltigen klaren
bericht / werden demonstrirt vnd angemelt / mit fleis
zusammen gebracht / vnd erstmals in
Druck außgangen
Durch
Andream Helmreich / Rechenmeister vnd
Visierer zu Halle in Sachsen / an der Saal.
Leipzig /
M. D. XCI.

Graden, minuten en seconden voor 1550

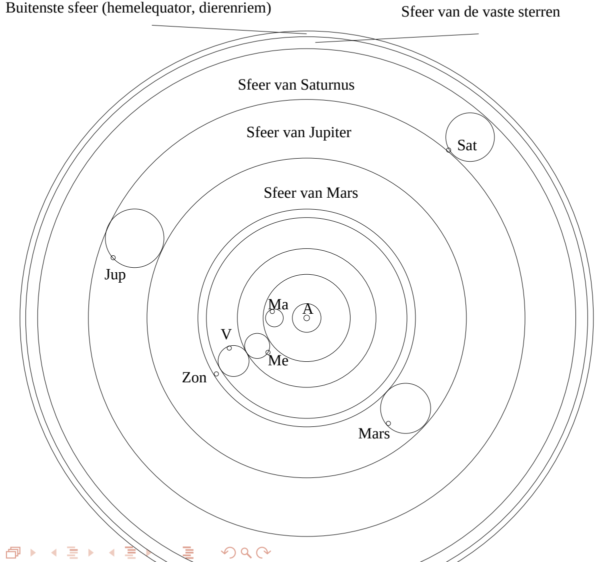
Bijna alleen in sterrenkunde, op de manier van Ptolemaeus
Weinig hoeken, vooral bogen; vaak op de bol.

Europa: 1150 - 1600
Islam: 800 - 1700
Griekse oudheid: 150 v. Chr. - ca. 500
[India: 0 - 1700]

Het universum van Ptolemaeus

Het universum van Ptolemaeus

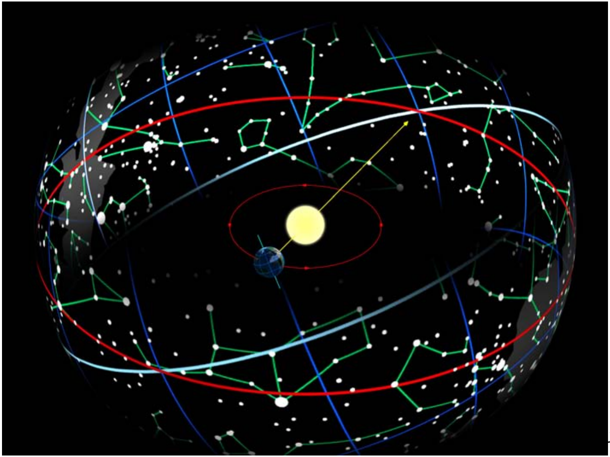
Aardstraal ca. 6000 km; afstand tot zon ca. 7,5 miljoen km; afstand tot buitenste bol (hemelbol) ca. 120 miljoen km.



Universiteit Utrecht

Hemelbol

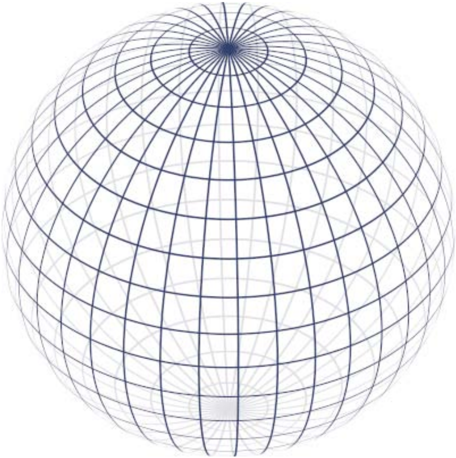
Ecliptica (rood) is projectie van de zonnebaan op de hemelbol. Verdeeld in 12 tekens van 30 graden elk (Ram, Stier, Tweelingen enz.) NB Bij Ptolemaeus is de aarde het middelpunt van de hemelbol!



Universiteit Utrecht

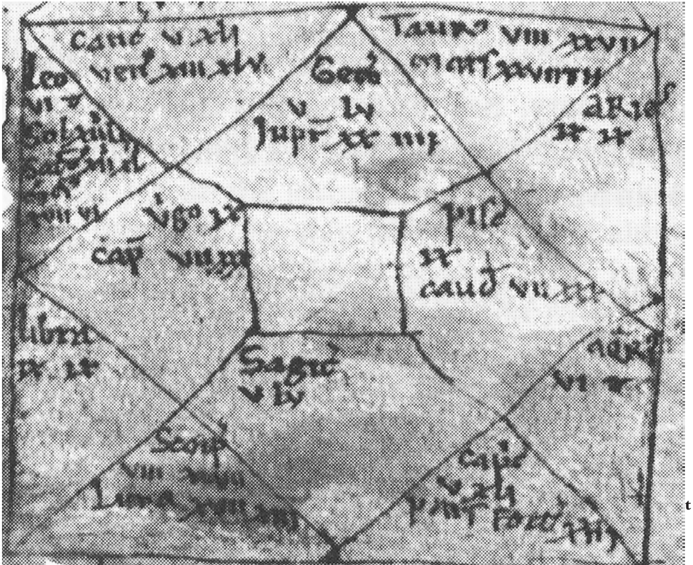
Doel van sterrenkunde

Kunnen berekenen, voor elk moment, de positie van hemellichamen in diverse coördinatensystemen op de hemelbol.



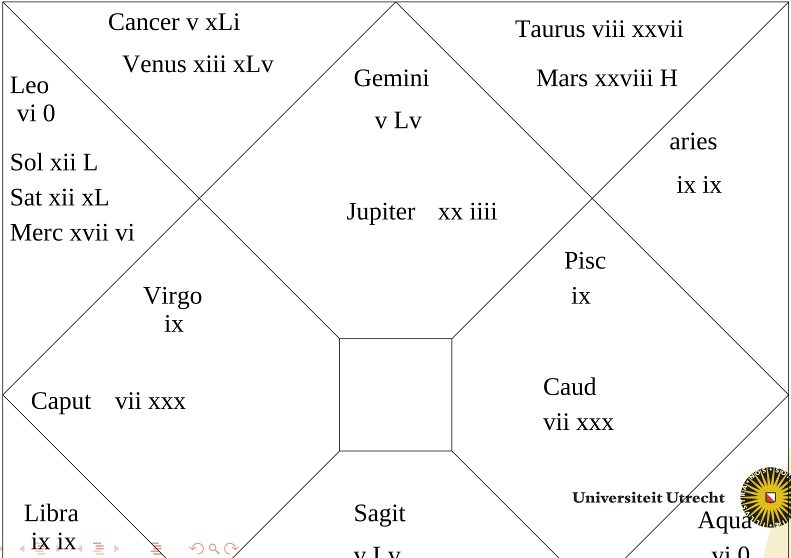
Product van sterrenkunde

Horoscoop, berekend voor 1 aug. 1123, 9 uur 's ochtends in zuid Engeland.



Product van sterrenkunde

middelbare zon iiii vii L vii[i], voor het vijfhonderdzeven[tien]de Arabische jaar, de zesde maand, dag vii, uur xxi.



Universiteit Utrecht

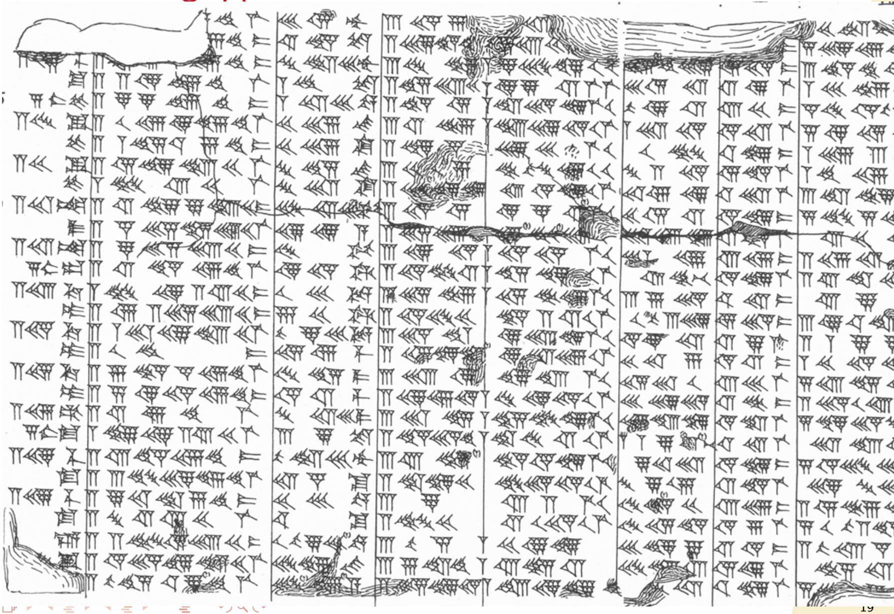
Waar komen de 360 graden vandaan?

Ptolemaeus (150 na Chr): elke cirkel is 360 graden, ecliptica is 12 tekens van 30 graden (Ram, Stier, Tweelingen, enz.)

Hipparchus (ca. 150 voor Chr): ook allerlei andere cirkels aan de hemel verdeeld in 12 tekens van 30 graden; tekens genoemd naar de sterrenbeelden in de ecliptica.

Ecliptica met 12 tekens van 30 graden, en 60-tallig stelsel, ontleend aan Babylonische sterrenkunde (ca. 300 v. Chr). Einde van onze zoektocht.

Babylonische sterrenkunde: kleitabletten, veel getallen, mysterieuze begrippen



Babylonische sterrenkunde: voorbeeld van deze getallen

2 27	apr	2 13 44 26 40	↑	0 52 30	schorp	3 13 55	54 14 48
	okt	2 3 49 37 46 40	↓	22 4	ram	2 51 57 20	49 34 24
2 28	apr	2 8 21 51 6 40	↑	20 30	weegsch	3 7	13 2
	okt	2 9 12 13 20	↓	11	ram	2 59 20	12 10 14
	mrt_2	2 2 59 15 33 20	↑	10 7 30	weegsch	3 0 5	1 20 18 48

Waarom was de 360 zo hardnekkig?

Sterrenkunde is gebaseerd op traditie: ideeën kunnen veranderen, maar waarnemingen blijven waardevol.

Oudste waarnemingen: 747 v. Chr. Babylon, maandverduisteringen.

Deel 2. Sinussen (of koorden) van bogen.

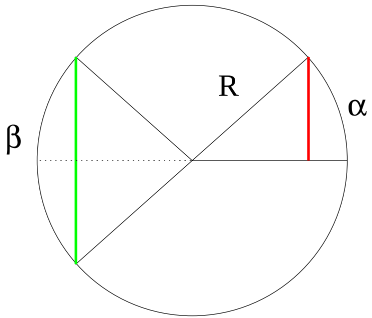
Sinus; India, Arabische wereld, Europa; Koorde: Griekenland.

R vast (b.v. 1, of 60, of $\frac{360}{2\pi}$).

Oude Sinus (rood) is lijnsegment

Oude sinus van α is $R \sin \alpha$

Koorde van β (groen) is $2R \sin \frac{1}{2}\beta$



Universiteit Utrecht

Welke kun je uitrekenen, als de cirkel verdeeld is in 360 graden

$\sin(0^o) = 0, \ \sin(30^o) = \frac{1}{2}, \ \sin(90^o) = 1.$

Als je kunt worteltrekken:
$\sin(45^o) = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \ \sin(60^o) = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$

De oude Grieken konden al worteltrekken met willekeurige nauwkeurigheid.

Universiteit Utrecht

Van welke bogen kun je de sinus uitrekenen?

Alle veelvouden van 3 graden:

$\sin 18^o = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$ (gulden snede)

$\sin 15^o = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ (uit 45^o en 30^o)

$\sin 3^o = \frac{1}{16}(\sqrt{6} + \sqrt{2})(-1 + \sqrt{5}) - \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3})\sqrt{5 + \sqrt{5}}.$

$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2 \alpha}}{2}}$ enz. dus $\frac{3}{2}^o, \frac{3}{4}^o$.

Universiteit Utrecht

$\sin 1^o$

Deze kan niet precies gevonden worden met worteltrekken (vierkantswortels).

Heeft te maken met: regelmatige 180-hoek niet construeerbaar met passer en lineaal.

Wat nu? N.B. Deze ellende komt door de 360 graden!

Praktische oplossingen

$\sin(1^o) \approx \frac{1}{3}\sin(3^o)$. nauwkeurigheid: modern 4 decimalen.

Methode van Ptolemaeus voor koorden komt neer op

$\frac{4}{3}\sin\frac{3}{4}^o > \sin(1^o) > \frac{2}{3}\sin\frac{3}{2}^o$

nauwkeurigheid: modern 5 decimalen, was voor de praktijk voldoende.

Maar als je sin 1^o nauwkeuriger wilt weten ...

Twee methoden ontdekt in de 15e eeuw.

Samarkand: numerieke oplossing van derdegraads vergelijking (ca. 1425).
India: "Taylorreeks" (ca. 1400)

In Europa werd het probleem pas in 1570 opgelost.

Eerste methode: gevonden in Samarkand (Uzbekistan), ca. 1425, in de school van koning Ulug Beg (zelf ook een wiskundige)

Samarkand (Uzbekistan), ca. 1425, koepel van de school van koning Ulug Beg

Eerste methode: gevonden door Kāshī (ca. 1425)

Als $x = 2\sin(1^o)$ dan $3x = x^3 + c$
"Drie maal het ding is gelijk aan de kubus en een getal."

waarbij $c = 2\sin(3^o) = \dfrac{6}{60} + \dfrac{16}{60^2} + \dfrac{49}{60^3} \ldots$ gevonden door worteltrekken.

Dit noteren we als $c = 0; 6, 16, 49, 7, 59, 8, 56, 47, 2$ (let op de puntkomma)

De getallen 6, 16, enz. heten de sexagesimalen van c.

Kashi's methode: delen met de kubus erbij

Deze variant opgeschreven door zijn collega en concurrent Qāḍī Zādeh Rūmī

We hebben $x = \frac{1}{3}(c + x^3)$ met $c = 0; 6, 16, 49, 7, 59, 8, 56, 47, 2$.

Stel $x = \frac{n_1}{60} + \frac{n_2}{60^2} + \frac{n_3}{60^3} + \ldots$, de benaderingen noemen we

$x_1 = \frac{n_1}{60}$, $x_2 = \frac{n_1}{60} + \frac{n_2}{60^2}$, enz.

Omdat $x \approx 0; 2$ dus $x^3 \approx 0; 0, 0, 8$ geldt:

$x_2 = \frac{c}{3}$ afgerond op 2 sexagesimalen. $= 0; 2, 5$, en

$x_n = \frac{1}{3}(c + x_{n-1}^3)$ afgerond op n sexagesimalen.

Resultaten:

Dus omdat $x = \frac{1}{3}(c + x^3)$ geldt

$$x_2 = \frac{c}{3} \text{ afgerond } = 0; 2, 5$$
$$x_3 = \frac{c + (x_2)^3}{3} \text{ afgerond } = 0; 2, 5, 39$$
$$x_4 = \frac{c + (x_3)^3}{3} \text{ afgerond } = 0; 2, 5, 39, 26$$
$$\dots$$
$$x_{10} = 0; 2, 5, 39, 26, 22, 29, 28, 32, 52, 33$$

$$= 0.034904812874567019\dots \text{ in 16 decimalen nauwkeurig}$$
$$2 \sin 1^o = 0.034904812874567025\dots$$

Berekening in een handige tabel (heel weinig werk).

2	5	39	26	22	29	28	32	52	33				x
6	16	49	7	59	8	56	29	40					c
	1	9	2	32	5								x_2^3
		58	11	2	32	27	43	39					
		1	18	8	14	33	12	23	21	4	56		
			1	7	19	22	41	6	52	15	1	56	
				1	27	29	2	42	1	39	50	52	
					1	25	8	50	27	19	59	43	
						1	37	57	28	23	37	1	
							1	37	39	47	50	49	
							2	1					
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3				

Je ziet ook $x_3^3 = 0; 0, 0, 9, 11, 2, 32, 37, 43, 39$ enz.

Islamitische wiskunde?

Kāshī (ca. 1425) ontdekte deze methode

"door de kracht van inspiratie, in de Eeuwige Aanwezigheid (God)".

Tweede methode: Kerala, zuid-India, ca. 1400

Kerala, zuid-India

Methode van Madhava (Kerala, ca. 1400) voor de berekening van de sinus van een boog van een gegeven aantal boogminuten (tot na 1600 onderwezen)

Leerling moet gedicht uit het hoofd leren:

vidvāṃs tunnabalaḥ kavīśanicayaḥ sarvārthaśīlasthiro
nirviddhāṇganarendraruṅ nigaditeṣv eṣu kramāt pañcasu

De wijze koning wiens leger verslagen is verzamelt de beste raadgevers om zich heen en blijft in alles standvastig; dan verslaat hij de koning wiens leger nog niet vernietigd is.

Methode van Madhava (Kerala, ca. 1400) voor de berekening van de sinus van een boog van een gegeven aantal boogminuten (tot na 1600 onderwezen)

Leerling moet gedicht uit het hoofd leren:

vidvāṃs tunnabalaḥ kavīśanicayaḥ sarvārthaśīlasthiro
nirviddhāṇganarendraruṅ nigaditeṣv eṣu kramāt pañcasu

De wijze koning wiens leger verslagen is verzamelt de beste raadgevers om zich heen en blijft in alles standvastig; dan verslaat hij de koning wiens leger nog niet vernietigd is.

Wanneer deze vijf getallen gereciteerd zijn:
vv=44 tnbl=6033 kvśncy=145061 sv(th)śl(th)r= 7475372
nv(dh)gnrrr=04930222

Wat werd hiermee bedoeld?

vijf getallen vv=44 tnbl=6033 kvśncy=145061 sv(th)śl(th)r= 7475372 nv(dh)gnrrr=04930222

Wat werd hiermee bedoeld?

vijf getallen vv=44 tnbl=6033 kvśncy=145061 sv(th)śl(th)r= 7475372 nv(dh)gnrrr=04930222

betekenen $p = \dfrac{44}{60^3}$, $q = \dfrac{33}{60^2} + \dfrac{06}{60^3}$, $r = \dfrac{16}{60} + \dfrac{05}{60^2} + \dfrac{41}{60^3}$,

$$s = \frac{273}{60} + \frac{57}{60^2} + \frac{47}{60^3}, \quad t = \frac{2220}{60} + \frac{39}{60^2} + \frac{40}{60^3}.$$

Wat werd hiermee bedoeld?

vijf getallen vv=44 tnbl=6033 kvśncy=145061 sv(th)śl(th)r= 7475372 nv(dh)gnrrr=04930222

betekenen $p = \frac{44}{60^3}$, $q = \frac{33}{60^2} + \frac{06}{60^3}$, $r = \frac{16}{60} + \frac{05}{60^2} + \frac{41}{60^3}$,

$s = \frac{273}{60} + \frac{57}{60^2} + \frac{47}{60^3}$, $t = \frac{2220}{60} + \frac{39}{60^2} + \frac{40}{60^3}$.

Dit zijn afgeronde waarden: $p = \frac{90}{11!}(\frac{\pi}{2})^{10}$, $q = \frac{90}{9!}(\frac{\pi}{2})^8$, $r = \frac{90}{7!}(\frac{\pi}{2})^6$, $s = \frac{90}{5!}(\frac{\pi}{2})^4$, $t = \frac{90}{3!}(\frac{\pi}{2})^2$.

Wat moet de leerling nu doen, nadat de vijf getallen gereciteerd zijn?

ādhastyād guṇitād abhīṣṭadhanuṣaḥ kṛtyā vihṛtyantimasy-āptam śoddhyam upary upary atha ghanenaivam dhanuṣy antataḥ

degene onderaan vermenigvuldigd met het kwadraat van de gegeven boog gedeeld door [5400], moet het quotiënt steeds worden afgetrokken van wat daarboven staat, maar het laatste moet met de kubus, (en dan afgetrokken) van de boog.

dit betekent (voor een boog van α) boogminuten)

$$\alpha - \left(\frac{\alpha}{5400}\right)^3 \{t - \left(\frac{\alpha}{5400}\right)^2 \{s - \left(\frac{\alpha}{5400}\right)^2 \{r - \left(\frac{\alpha}{5400}\right)^2 \{q - \left(\frac{\alpha}{5400}\right)^2 p\}\}\}\}.$$

Klopt dit met moderne wiskunde?

Taylorformule voor de moderne sinus (boog van x radialen):

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots$$

De methode klopt met moderne wiskunde!

Mādhava's sinus (van α boogminuten) is $R = 5400/\frac{\pi}{2}$ maal de moderne sinus van $x = \frac{\pi}{2}\alpha/5400$ radialen. Met de Taylorformule vinden we:

$$R\sin x = \frac{5400}{\frac{\pi}{2}}\sin(\frac{\frac{\pi}{2}\alpha}{5400}) = \alpha - (\frac{\alpha}{5400})^3\{t - (\frac{\alpha}{5400})^2\{s - (\frac{\alpha}{5400})^2\{$$

$\{r - (\frac{\alpha}{5400})^2\{q - (\frac{\alpha}{5400})^2\{p - \ldots\}\}\}\}\}\}$ waarbij

$$p = \frac{90}{11!}(\frac{\pi}{2})^{10},\ q = \frac{90}{9!}(\frac{\pi}{2})^{8},\ r = \frac{90}{7!}(\frac{\pi}{2})^{6},\ s = \frac{90}{5!}(\frac{\pi}{2})^{4},\ t = \frac{90}{3!}(\frac{\pi}{2})^{2}$$

(Madhava's getallen)

Conclusie

Niet alle wiskunde is afkomstig uit het westen, en niet alles is de afgelopen 20 jaar ontdekt.

Conclusie

Niet alle wiskunde is afkomstig uit het westen, en niet alles is de afgelopen 20 jaar ontdekt.

De buitenwereld is te zien in de wiskunde (b.v. in de 360).

Conclusie

Niet alle wiskunde is afkomstig uit het westen, en niet alles is de afgelopen 20 jaar ontdekt.

De buitenwereld is te zien in de wiskunde (b.v. in de 360).

Wiskunde is in zekere zin een tijdloos en cultuuroverstijgend aspect van menselijke activiteit.

Conclusie

Niet alle wiskunde is afkomstig uit het westen, en niet alles is de afgelopen 20 jaar ontdekt.

De buitenwereld is te zien in de wiskunde (b.v. in de 360).

Wiskunde is in zekere zin een tijdloos en cultuuroverstijgend aspect van menselijke activiteit.

"Wiskunde en de natuurwetenschappen hebben de potentie, de mensheid tot een eenheid te verbinden." (citaat van Mattias Schramm, 1928-2005)

Deze presentatie en links

staan op

www.jphogendijk.nl/zonnecirkel.html