

Meetkundige revolutie(s)

Henk Broer

Johann Bernoulli Instituut voor Wiskunde en Informatica
Rijksuniversiteit Groningen

Benoît B. Mandelbrot

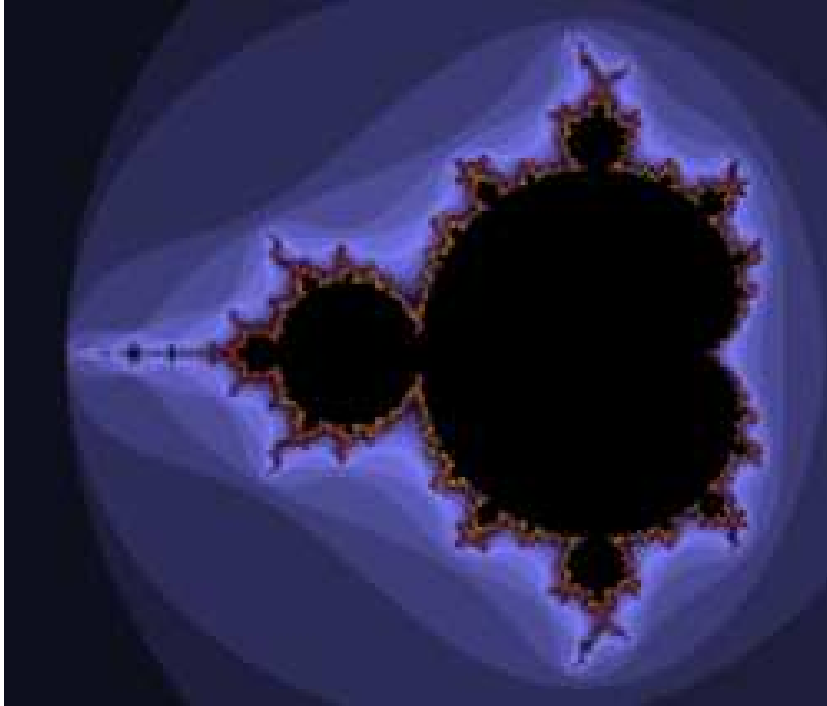


Benoît B. Mandelbrot (1924 - 2010)

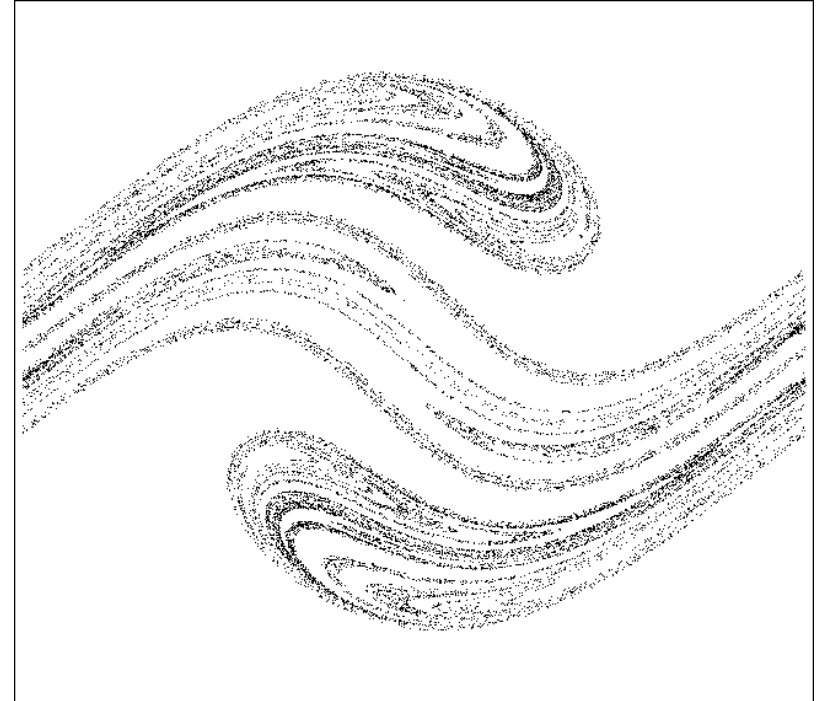
The Fractal Geometry of Nature. Freeman 1977

“Clouds are not spheres, mountains are not cones, coastlines are not circles,
and bark is not smooth, nor does lightning travel in a straight line.”

'The father of fractals'



Mandelbrot-verzameling



Hénon-achtige attractor

Email: `h.w.broer@rug.nl`

URL: `http://www.math.rug.nl/~broer`

Korte biografie I

- * 20.11.1924, Warschau
- Parijs 1936 (wiskunde via zijn ooms waaronder Szolem Mandelbrojt)
École Polytechnique (Gaston Julia en Paul Lévy)
Twee jaar studie Caltech
Promotie Parijs 1952 (bij Lévy)
- CNRS stafmedewerker 1949 – 1957
(één jaar IAS Princeton – John von Neumann)
- 1955 huwelijk met Aliette Kagan, Genève
- 1958 Thomas J. Watson Research Center IBM
(Yorktown Heights nabij New York)
- later IBM Fellow en IBM Fellow Emeritus
- † 14.10.2010, Cambridge (Mass)

Korte biografie II

aanstellingen / eerbewijzen:

Sterling Professor of Mathematical Sciences (Yale)

Officier van het Légion d'Honneur (Frankrijk)

Wolf Foundation Prize for Physics, &c

breedte:

informatie-theorie, economie, vloeistofmechanica,
cosmologie (Olbers' paradox)

fractale natuur:

taal van de wiskunde (Galileï), maar

wolken, berglandschappen, de bliksem,
bloedsomloop in lever of longen, &c.

lijken niet erg op lijnen, driehoeken, cirkels ...

Fractale meetkunde

Zekere 'ruwheid': niet-heeltallige dimensie

Zekere zelfgelijkvormigheid: op hoeveel schaalgroottes?

Staan op de schouders van reuzen

Cantor en Hausdorff



Georg F.L.P. Cantor

(1845-1918)



Felix Hausdorff

(1868-1942)

oneindigheden, verzamelingen, topologie

Lebesgue en Brouwer



Henri Lebesgue

(1875-1941)



L.E. (Bertus) J. Brouwer

(1881-1966)

... maat, dimensie ...

Fatou en Julia



Pierre J.L. Fatou

(1878-1929)



Gaston M.J. Julia

(1893-1978)

iteraties van analytische functies op \mathbb{C}

Complex kwadratische familie I

Niet-lineaire dynamica $z \in \mathbb{C} \mapsto z^2 + c \in \mathbb{C}$

$c \in \mathbb{C}$ parameter

Geval $c = 0$: $z \mapsto z^2$, eenheidscirkel invariant

- $z = 0$ en $z = \infty$ punt-attractoren
- eenheidscirkel chaotische repellor

Geval c willekeurig:

Itereert $z = 0$ via de rij

$$0, c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, \dots$$

naar $z = \infty$ of blijft deze begrensd ?

Complex kwadratische familie II

Fatou domeinen: basins van attractie in z -vlak $\cup \{\infty\}$

Julia verzameling:

chaotische repellor in z -vlak

gemeenschappelijke rand van alle Fatou domeinen

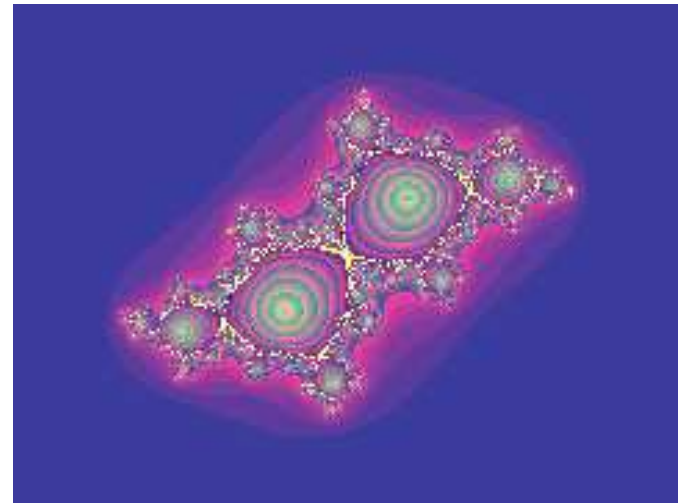
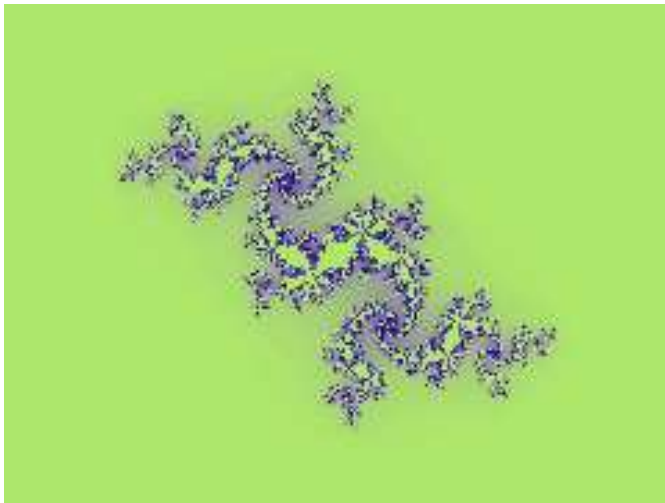
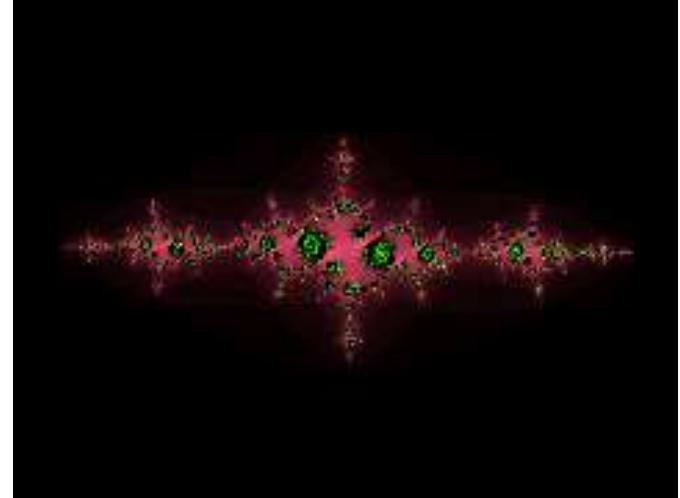
voor $c = 0$ is Julia = de eenheidscirkel

Mandelbrot verzameling: $\subset c$ -vlak (parameter)

$c \in \text{Mandelbrot} \Leftrightarrow \text{Julia samenhangend}$

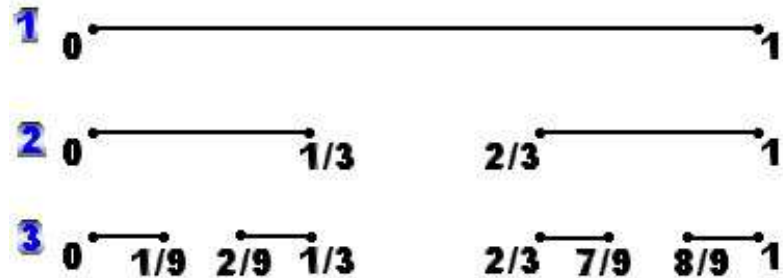
\Leftrightarrow rij $0, c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, \dots$ begrensd

Julia verzamelingen



kromme of fractal: gecodeerd via Mandelbrotverzameling

Cantor verzameling



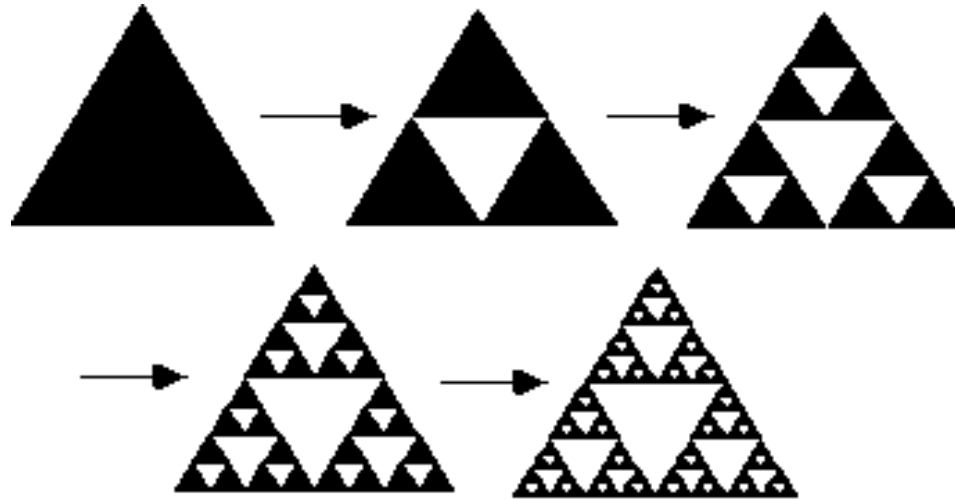
middelste derden Cantorverzameling $\mathbb{C}_{\frac{1}{3}}$

compact, perfect en totaal onsamenhangend

(karakterisering Brouwer)

fractal, later meer ...

Sierpinski driehoek



Sierpinski driehoek

ook een klassieke fractal

Dimensie I

Wat is de dimensie van een kromme?
Zal wel **1** moeten zijn ...

Een manier om dit te begrijpen gaat als volgt.
Neem eenheidsinterval $[0, 1]$

Hoeveel intervalletjes ter lengte $\frac{1}{10}$ *minimaal* nodig om $[0, 1]$
te overdekken? Antwoord: $D_{\frac{1}{10}}([0, 1]) = 10$

En voor lengte ε ? Antwoord:

$$D_{\varepsilon}([0, 1]) = \frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon^{-1} = e^{-1 \times \ln \varepsilon} \rightarrow \infty \text{ als } \varepsilon \downarrow 0$$

Groeigedrag? Dit wordt uitgedrukt door de exponent
1 = $\dim[0, 1]$

Dimensie II

Voor een vierkant $[0, 1]^2$: Overdekking met vierkantjes met zijde ε geeft

$$D_\varepsilon([0, 1]^2) = \varepsilon^{-2} = e^{-2 \times \ln \varepsilon}$$

Middelste derden Cantor verzameling:

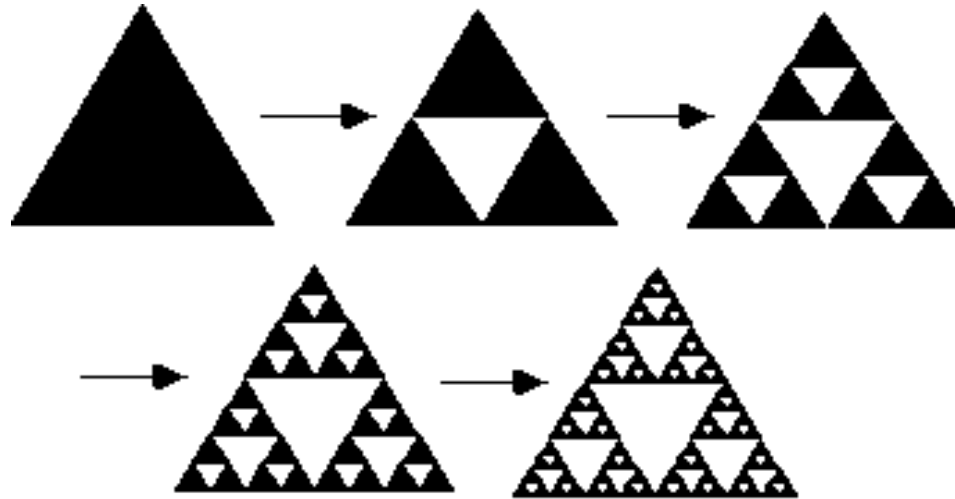
$$D_{\frac{1}{3}} \mathbb{C}_{\frac{1}{3}} = 2, \quad D_{\frac{1}{9}} \mathbb{C}_{\frac{1}{3}} = 4, \dots$$

algemeen

$$D_{3^{-n}} \mathbb{C}_{\frac{1}{3}} = 2^n \implies D_\varepsilon \mathbb{C}_{\frac{1}{3}} = e^{-\frac{\ln 2}{\ln 3} \times \ln \varepsilon}$$

$$\rightsquigarrow \text{dimensie } \mathbb{C}_{\frac{1}{3}} = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

Dimensie III

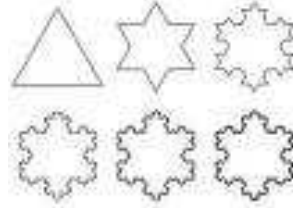


Analoog voor Sierpinski driehoek S_p (lengte zijde = 1)
Overdekking met driehoekjes $D_{\frac{1}{2}}(S_p) = 3$, $D_{\frac{1}{4}}(S_p) = 9, \dots$
algemeen

$$D_{2^{-n}}(S_p) = 3^n \implies D_\varepsilon(S_p) = e^{-\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \times \ln(\varepsilon)}$$

\rightsquigarrow dimensie $S_p = \frac{\ln 3}{\ln 2}$

Dimensie IV



... voor het Koch eiland (lengte zijde = 1)
noem kustlijn \mathbb{K}

- oppervlakte begrensd
- lengte $\mathbb{K} = \infty$

$$D_{3-n}(\mathbb{K}) = 3 \times 2^{n+1} \implies$$

- dimensie $\mathbb{K} = \frac{\ln 4}{\ln 3}$

Benoît Mandelbrot, How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. *Science, New Series* Vol. **156**, No. 3775 (1967) 636-638

Discussie I

De naam van het begrip

$$\dim(A) = - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\ln(D_\varepsilon(A))}{\ln(\varepsilon)} \quad (1)$$

is *box counting dimensie* of *limiet capaciteit*.

De algoritmische aard \rightsquigarrow numerieke benaderingen

Andere definities van (fractale) dimensie:

Hausdorff dimensie, *Lyapunov dimensie*,
topologische dimensie (heeltallig), ...

Rand Mandelbrotverzameling: Hausdorff dimensie = 2

Discussie II

Topologische dimensie (schets):

Laat A een metrische ruimte zijn

1. $\dim_{\text{top}}(\emptyset) = -1$
2. $\dim_{\text{top}}(A) = n + 1$:

elke $a \in A$ heeft willekeurig kleine omgevingen U met

$$\dim_{\text{top}}(\partial U) = n$$

Cantor verzamelingen hebben topologische dimensie $= 0$

(want totaal onsamenhangend)

geldt voor alle Julia verzamelingen met c buiten

Mandelbrotverzameling

Brownse bewegingen hebben topologische dimensie $= 1$,

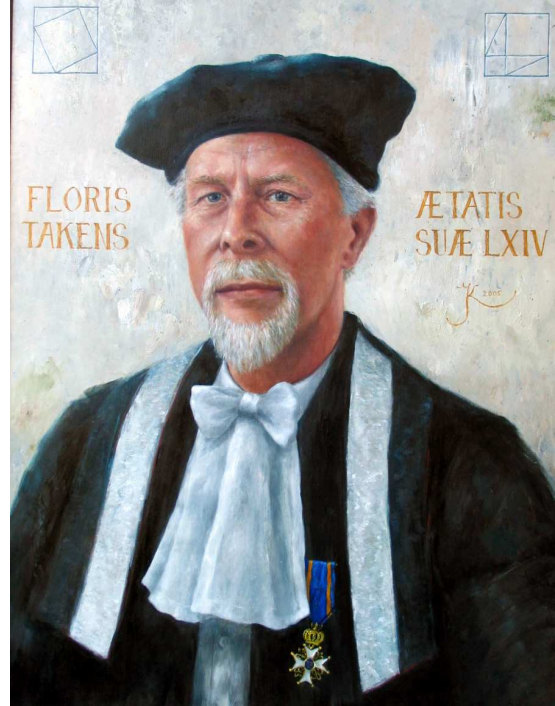
maar fractale dimensies zijn in het algemeen $= 2$

Ruelle, Takens en Yorke



David Ruelle

(1935 -)



Floris Takens

(1940 - 2010)

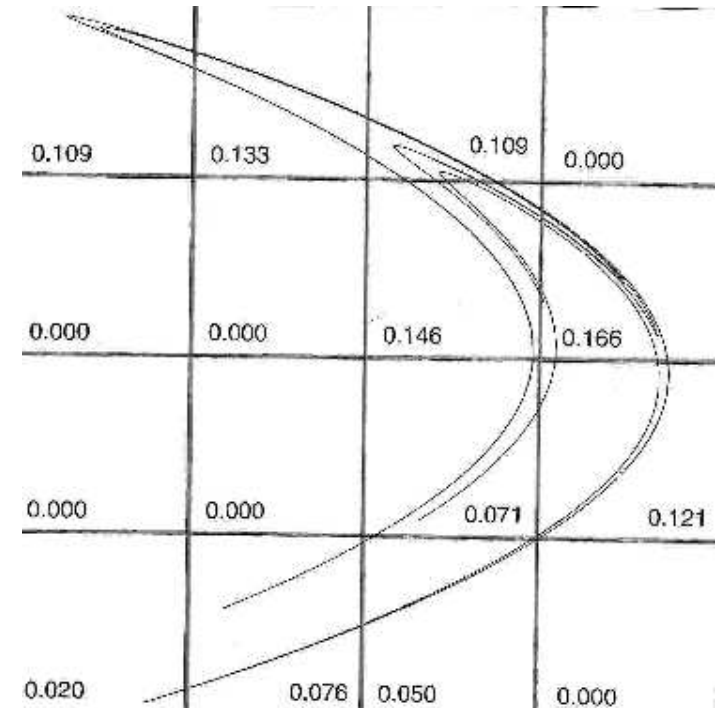
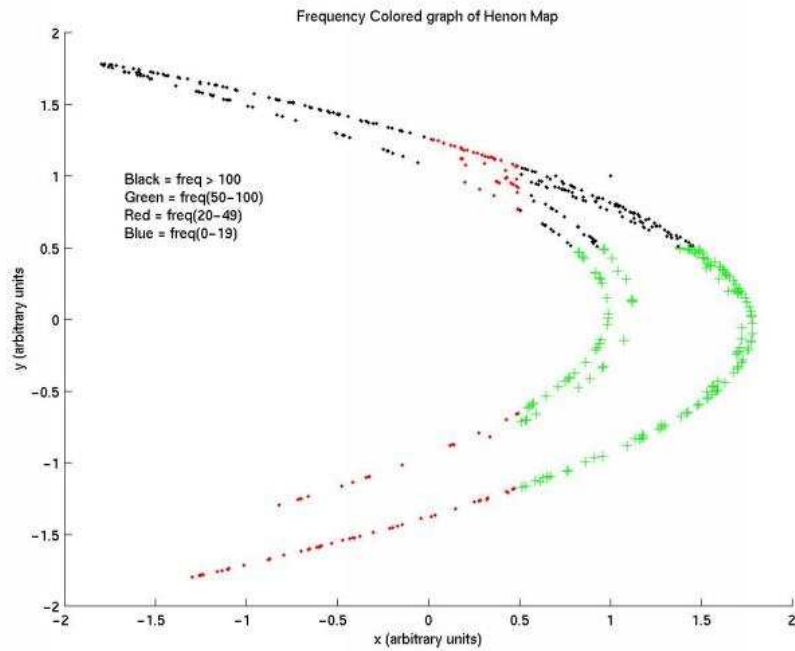


James A. Yorke

(1941 -)

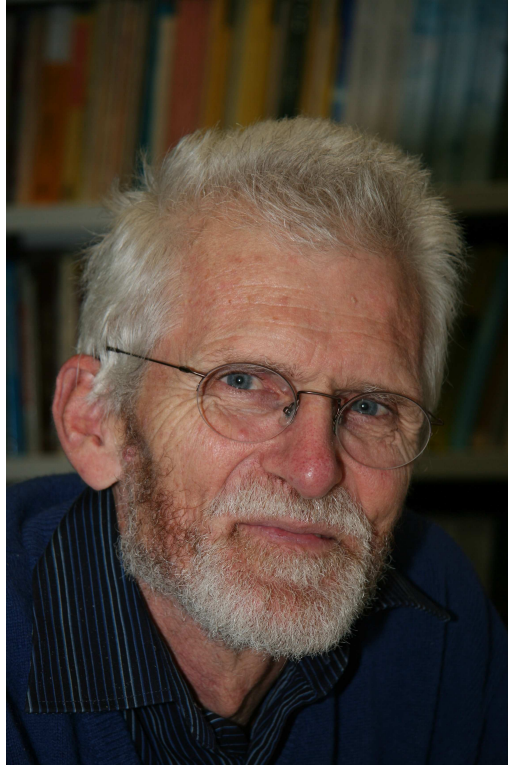
strange attractors en chaos

Dimensie Hénon-attractor



Boxcounting dimensie van de Hénon-attractor ≈ 1.2

Verder . . .



Hans Duistermaat (1942 - 2010)
meetkundige analyse

Wat hen bindt . . .

Mandelbrot, Takens, Duistermaat

overeenkomst?

Meetkundige

vernieuwing & verdieping

Literatuur

- H.W. Broer en F. Takens,
Dynamical Systems and Chaos, Epsilon-Uitgaven **64**
2009; Appl. Math. Sc. **172** Springer-Verlag 2011
- I.Hoveijn en Jan Scholtmeijer,
Fractals, Zebra **10**, 3e druk 2009
- H.-O. Peitgen, H. Juergens en D. Saupe,
Chaos and Fractals, New Frontiers of Science,
Springer-Verlag 1992
- Ya. Pesin en V. Climenhaga,
*Lectures on Fractal Geometry and Dynamical
Systems*, Student Mathematical Library **52** AMS
Mathematics Advanced Study Semesters 2009
- F. Verhulst,
Chaos en Orde, Zebra **16**, 2e druk 2007