Division par $x - a$ selon le schéma de Horner

Pour diviser un polynôme par le binôme $x - a$, il est pratique d'utiliser le schéma de Horner[2] illustré par l'exemple ci-dessous.

Exemple

Divisons $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2$ *par* $x - 3$.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -\,3x^3 & +\,2x^2 & -\;x & +\;2 & \;x - 3 \\ \cline{6-6}
x^4 & -\,3x^3 & & & & \;x^3 + 2x + 5 \\ \cline{1-5}
 & & 2x^2 & -\;x & +\;2 & \\
 & & 2x^2 & -\,6x & & \\ \cline{3-5}
 & & & 5x & +\;2 & \\
 & & & 5x & -\,15 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 17 &
\end{array}
$$

Cette même division peut être effectuée de la manière ci-dessous.
Partons du tableau suivant

1	−3	2	−1	2	
					3

Les nombres de la première ligne sont les coefficients du polynôme.
Le 3 *de la deuxième ligne du tableau est le zéro de* $x - 3$.
Construisons, en commençant par le coin inférieur gauche, le tableau suivant :

Übung 4. F

1. Verwandle in einen gewöhnlichen Bruch:

a) $\dfrac{\frac{7}{8}}{\frac{3}{4}}$ b) $\dfrac{\frac{2}{3}}{4}$ c) $\dfrac{\frac{37}{2}}{\frac{2}{9}}$ d) $\dfrac{2}{\frac{3}{4}}$

2. Verwandle in einen gewöhnlichen Bruch:

a) $\dfrac{\frac{a}{x}}{\frac{b}{y}}$ b) $\dfrac{\frac{x}{y}}{z}$ c) $\dfrac{\frac{x}{y}}{\frac{2x}{z}}$ d) $\dfrac{x}{\frac{y}{z}}$

3. Verwandle in einen gewöhnlichen Bruch:

a) $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}$ b) $\dfrac{\frac{\frac{3}{4}}{5}}{6}$ c) $\dfrac{\frac{3}{\frac{4}{5}}}{6}$ d) $\dfrac{3}{\frac{\frac{4}{5}}{6}}$

4. Schreibe als Doppelbruch und berechne:

a) $(3:8):(9:4)$ b) $(3:8:9):4$ c) $\big(3:(8:9)\big):4$
d) $3:(8:9:4)$ e) $3:\big(8:(9:4)\big)$ f) $3:8:9:4$

5. Berechne:

a) $\dfrac{10}{\frac{5}{2}} - \dfrac{\frac{10}{5}}{2}$ b) $\dfrac{3}{\frac{11}{4}} + \dfrac{\frac{3}{11}}{4}$ c) $\dfrac{2\frac{1}{5}}{5\frac{1}{2}} + \dfrac{5\frac{1}{5}}{2\frac{1}{2}}$

c) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - t^2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ d) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

e) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 10^t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ f) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \sin 2t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

6.17 Es sei $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ eine Parameterdarstellung der Geraden g. Verläuft g durch den Ursprung?

6.18 Es sei $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ eine Parameterdarstellung der Geraden g. Gib eine Parameterdarstellung einer Geraden h an, die

a) parallel zu g ist
b) senkrecht zu g ist und g schneidet
c) senkrecht zu g ist und g nicht schneidet
d) durch $(0,0,0)$ geht und g schneidet

6.19 Sei $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ eine Parameterdarstellung der Geraden g. Gib einen Punkt P an, der

a) nicht auf g liegt
b) auf g und in der xy-Ebene liegt
c) auf g und unterhalb der xy-Ebene liegt

6.20 Es sei $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Parameterdarstellung der Geraden g.

5. BISSECTRICES DE DEUX DROITES

Les droites sécantes d'équations $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ et $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ ont pour bissectrices les deux droites d'équations

$$\boxed{\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}}$$

6. CERCLE

6.1 Le cercle Γ de centre C et de rayon r (où $r \in \mathbb{R}_+$) est l'ensemble des points M du plan tels que $\delta(C, M) = r$. On a donc :

$$\boxed{M \in \Gamma \quad \Leftrightarrow \quad \|\overrightarrow{CM}\| = r}$$

6.2 Equation d'un cercle

Le cercle Γ de centre $C(\alpha ; \beta)$ et de rayon r est l'ensemble des points $M(x ; y)$ du plan tels que :

$$\boxed{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2}$$

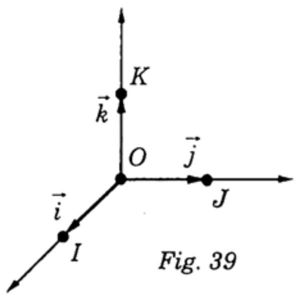


Fig. 39

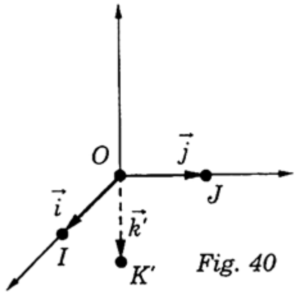


Fig. 40

Par convention, la **base** $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\,)$ de la figure *39* est dite **directe** : le vecteur $\vec{k}$ s'obtient à partir des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$, pris dans cet ordre, à l'aide de la "règle du tire-bouchon". On dit aussi que cette **base** est **orientée positivement**.

Cette notion s'étend, par analogie, à des bases quelconques de $\boldsymbol{V}_3$.

Dans la figure *40*, la base $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k'}\,)$ est dite **rétrograde** ou **orientée négativement**.

Un **repère orthonormé** est **direct** (respectivement **rétrograde**) si la base qui lui est associée est directe (respectivement rétrograde).

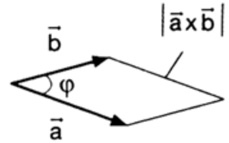
4.2 Définition

Soit $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\,)$ une base orthonormée directe et deux vecteurs
$\vec{a} = \alpha_1\vec{i} + \alpha_2\vec{j} + \alpha_3\vec{k}$ et $\vec{b} = \beta_1\vec{i} + \beta_2\vec{j} + \beta_3\vec{k}$.

> On appelle **produit vectoriel** des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, et l'on note $\vec{a}\times\vec{b}$, le vecteur défini par
> $$\vec{a}\times\vec{b} = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\vec{i} + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\vec{j} + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\vec{k}\ .$$

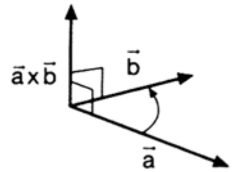
4.7 Das Vektorprodukt

Das **Vektorprodukt** (Kreuzprodukt) $\vec{a}\times\vec{b}$ zweier linear unabhängiger Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ des Raumes ist wieder ein *Vektor* mit folgenden drei Eigenschaften:

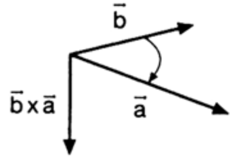


(1) Der Betrag von $\vec{a}\times\vec{b}$ ist gleich dem *Flächeninhalt* (Masszahl) des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gebildeten Parallelogramms:

$$\boxed{|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi}$$



(2) Die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein *Rechtssystem*;
d. h. wird $\vec{a}$ auf dem kürzeren Weg nach $\vec{b}$ gedreht, so weist $\vec{a}\times\vec{b}$ in die Richtung, in welche sich eine Rechtsschraube bei dieser Drehung bewegt.



(3) Der Vektor $\vec{a}\times\vec{b}$ steht senkrecht auf der Ebene, in der $\vec{a}$ und $\vec{b}$ liegen;
d. h. $\vec{a}\times\vec{b}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$.

Sonderfall: Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig, so ist $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$.

Rechengesetze:
$\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$
$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$
$(m\vec{a})\times(n\vec{b}) = mn\,(\vec{a}\times\vec{b})$, $m,n\in\mathbb{R}$

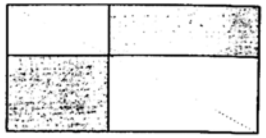
Im kartesischen Koordinatensystem gilt:

4.5 Flächenverwandlung und Flächenteilung

1. a) Suche konstruktive Methoden, um ein allgemeines Dreieck ABC in ein flächengleiches, aber nicht kongruentes Dreieck $A'B'C'$ zu verwandeln.
   b) Wie kann man ein Viereck in ein flächengleiches Dreieck verwandeln?
   c) Wie kann man ein Siebeneck in ein flächengleiches Viereck verwandeln?

2. Gegeben ist das Dreieck ABC mit den Seitenlängen $a = 4\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$, $c = 7\,\text{cm}$. Verwandle es in ein flächengleiches Dreieck $A'B'C'$, bei welchem folgende Grössen vorgeschrieben sind:
   a) $c' = c$ und $\alpha' = 60°$
   b) $c' = c$ und $a' = 5\,\text{cm}$
   c) $a' = 8\,\text{cm}$ und $b' = 5\,\text{cm}$
   d) $c' = 9\,\text{cm}$ und $s_c' = 5\,\text{cm}$

3. Um Rechtecke in flächengleiche Rechtecke zu verwandeln, kann der "Satz vom Gnomon" verwendet werden:
   Die beiden markierten Rechtecke sind flächengleich.
   Begründe diese Behauptung.



4. Verwandle ein Quadrat von 5 cm Seitenlänge in ein flächengleiches Rechteck mit
   a) einer Länge von 7 cm.
   b) einer Diagonale von 8 cm.

5. Verwandle ein Quadrat von 5 cm Seitenlänge in ein flächengleiches Dreieck,
   a) welches gleichschenklig ist und dessen Basis 4 cm misst.
   b) so dass die eine Seite 9 cm und eine andere 6 cm misst.

6. Zerlege ein Dreieck von einer Ecke aus
   a) in vier flächengleiche Teildreiecke.
   b) in fünf flächengleiche Teildreiecke.

7. Zerlege ein Viereck mit einer Geraden
   a) durch eine Ecke in zwei flächengleiche Teile.
   b) durch einen gegebenen Punkt auf einer Seite in zwei flächengleiche Teile.

8. Konstruiere in einem Dreieck jenen Punkt, dessen Verbindungen mit den Ecken das Dreieck in drei flächengleiche Dreiecke zerlegt.