Aufgabe 3 Betrachten Sie nochmals Abbildung 2. Sie können davon ausgehen, dass bei einem kleinen Wert von Δt die Änderungen der Seiten (und der Flächeninhalte) ebenfalls klein sind.

a) Stellen Sie sich vor, Δt sei so klein gewählt, dass $\Delta \ell$ und Δb beide 100-mal kleiner sind als in Abbildung 2. Dann sind die Flächeninhalte der beiden schmalen Rechtecke ebenfalls 100-mal kleiner. Wie verhält es sich mit dem kleinen Rechteck rechts oben?

b) Wir können sagen: $\Delta \ell \cdot b + \ell \cdot \Delta b$ ist eine gute Näherung für ΔA. Erklären Sie, warum.

Achten Sie nun auf die Geschwindigkeiten, mit welchen sich die Seiten und die Flächeninhalte verändern.
Im Zeitintervall, beginnend mit dem Zeitpunkt t und der Länge Δt, sind die mittleren **Wachstumsgeschwindigkeiten**

$$\frac{\Delta \ell}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta b}{\Delta t} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

Wie hängen sie zusammen?
Die Formel aus Aufgabe 2a) liefert

$$\Delta A = \Delta \ell \cdot b + \ell \cdot \Delta b + \Delta \ell \cdot \Delta b$$

Teilen Sie durch Δt und lassen Sie Δt gegen 0 gehen. Sie erhalten zunächst

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\Delta \ell}{\Delta t} \cdot b + \ell \cdot \frac{\Delta b}{\Delta t} + \frac{\Delta \ell}{\Delta t} \cdot \Delta b \tag{1}$$

Wenn Δt gegen 0 geht, gehen die Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta \ell}{\Delta t}, \frac{\Delta b}{\Delta t} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

gegen die Ableitungen $\frac{d\ell}{dt}, \frac{db}{dt}$ und $\frac{dA}{dt}$. Da Δb gegen 0 geht, gilt:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d\ell}{dt} \cdot b + \ell \cdot \frac{db}{dt} + \frac{d\ell}{dt} \cdot 0$$

Sie sehen: Das sehr kleine Rechteck oben rechts in Abbildung 2 spielt «keine Rolle». Das Ergebnis lautet:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d\ell}{dt} \cdot b + \ell \cdot \frac{db}{dt}$$

Es zeigt Ihnen, wie Sie beim Ableiten eines Produkts von zwei Funktionen vorgehen müssen.

Aufgabe 3 In den bisherigen Aufgaben haben Sie entdeckt, dass Sie beim Zusammensetzen von zwei linearen Funktionen wieder eine lineare Funktion erhalten. Ausserdem zeigte sich: Die Steigung der zusammengesetzten Funktion ist gleich dem Produkt der Steigungen der beiden gegebenen Funktionen. Diese Beobachtung gilt allgemein. Gehen Sie von zwei linearen Funktionen

$$u = Ax + B \quad \text{und} \quad y = Cu + D$$

aus und führen Sie den Beweis durch.

Produkt der Steigungen

Der Beweis für Aufgabe 3 ist algebraisch. Es wird einfach gerechnet. Es gibt aber einen anderen Beweis, der Algebra und Geometrie kombiniert.
Aus Abbildung 3 lässt sich ablesen:

$$u_1 - u_0 = A \cdot (x_1 - x_0) \qquad y_1 - y_0 = C \cdot (u_1 - u_0)$$

Daraus folgt durch Einsetzen

$$y_1 - y_0 = C \cdot A \cdot (x_1 - x_0).$$

In Worten: Abbildung 3 links illustriert, wie das Intervall $[x_0, x_1]$ mit dem Intervall $[u_0, u_1]$ zusammenhängt. Da die Steigung des Grafen A ist, ist das u-Intervall A-mal so lang wie das entsprechende x-Intervall. Aus der Figur rechts folgt: Das y-Intervall ist C-mal so lang wie das entsprechende u-Intervall. Die Kombination ergibt: Das y-Intervall ist $(C \cdot A)$-mal so lang wie das x-Intervall. Mit der «Δ-Schreibweise» wird das Ganze kürzer:

$$\begin{array}{ccc} \Delta u = A \cdot \Delta x & & \Delta y = C \cdot \Delta u \\ & \searrow \swarrow & \\ & \downarrow & \\ & \Delta y = CA \cdot \Delta x & \end{array}$$

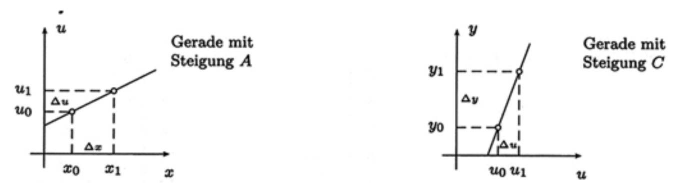


Abbildung 3
Zusammenhang zwischen Δx, Δu und Δy

Wenn h eine kleine, positive Zahl ist, stellt $A(x+h)-A(x)$ den Flächenzuwachs bei einer kleinen Verschiebung der vertikalen Geraden von $(x,0)$ nach $(x+h,0)$ dar. Der Zuwachs ist die Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse in einem schmalen Streifen der Breite h (siehe Abb. 3.5).

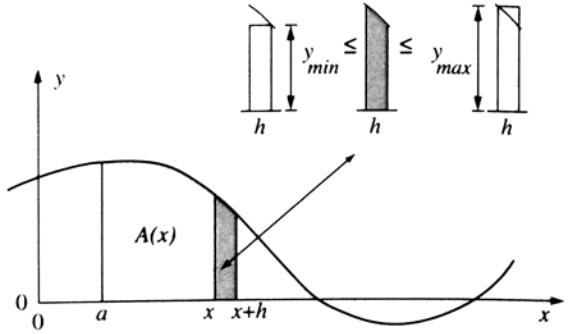


Abbildung 3.5
Flächenzuwachs eingegrenzt

Die Fläche des Streifens liegt zwischen den Flächen zweier Rechtecke, beide mit der Breite h. Die Höhe entspricht im einen Fall dem minimalen Wert $y_{\min}$ der Funktion f und im anderen dem maximalen Wert $y_{\max}$ auf dem Intervall $[x, x+h]$.
Wir schreiben dafür:

$$h \cdot y_{\min} \leq A(x+h) - A(x) \leq h \cdot y_{\max} \qquad h > 0$$

Division durch h ergibt:

$$y_{\min} \leq \frac{A(x+h)-A(x)}{h} \leq y_{\max}$$

Wenn nun h gegen 0 strebt, nähern sich $y_{\min}$ und $y_{\max}$ dem Wert $f(x)$.
Daraus folgt, dass der durch $y_{\min}$ und $y_{\max}$ eingeschlossene Differenzenquotient ebenfalls gegen $f(x)$ streben muss.

b) Zeigen Sie, dass sich die Länge der Sehne auch durch die folgende Formel ausdrücken lässt: $\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} \cdot \Delta x_k$,
wobei $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ und $\Delta y_k = f(x_{k+1}) - f(x_k)$ ist.

c) Den Quotienten $\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}$ kennen Sie aus der Differenzialrechnung. Welche Bedeutung hatte er dort?

Mit der Riemann'schen Summe lässt sich nun die Länge des Kurvenstücks auf dem Graphen der Funktion f im Intervall $[a,b]$ approximieren:

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} \cdot \Delta x_k$$

Aufgabe 18

a) Begründen Sie die oben stehende Formel.

b) Die Riemann'sche Summe liefert im Grenzfall für die Länge des Kurvenstücks das folgende Integral:

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Begründen Sie, warum in der Formel die Ableitung der Funktion f vorkommt.

Aufgabe 19

a) Skizzieren Sie die Graphen von $f(x)=x$, $g(x)=x^2$ und $h(x)=x^3$ im Intervall $[0,1]$.
Um die Längen der Graphenstücke zu untersuchen, zoomen Sie den zu betrachtenden Ausschnitt am besten quadratisch.
Von den drei Linien zwischen $(0,0)$ und $(1,1)$ ist die Strecke auf dem Graphen von f natürlich die kürzeste und das Kurvenstück von h scheint das längste zu sein.
Nun werden Sie diese Unterschiede berechnen.

b) Um die Länge der Strecke auf dem Graphen von f zu berechnen, brauchen Sie natürlich kein Integral. Es kann aber trotzdem interessant sein zu untersuchen, ob die Formel für die Kurvenlänge auch in diesem Fall stimmt. Kontrollieren Sie dies.

DMK: Integrieren – do it yourself

Exercices récapitulatifs

2.49 Calculer, si elles existent, les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{x}{2}\right)}{x}$

2) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^4 - \frac{3}{x}}{x^5 - x + \frac{1}{x}}$

3) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - \tan(x)}{\cos(2x)}$

4) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{1 + \cos(x)}{\sin^2(x)}$

5) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x}}$

6) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1}{x - 1} \quad n \in \mathbb{N}^*$

7) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{|x| - 1}$

8) $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 1) \sin\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$

9) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{\sin(\pi x)}$

10) $\lim\limits_{x \to 0} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

11) $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

12) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{(x-1)^2}$

2.50 Déterminer les asymptotes verticales, horizontales et obliques des fonctions suivantes

1) $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$

2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{x-1}$

3) $f(x) = x + \sqrt{x}$

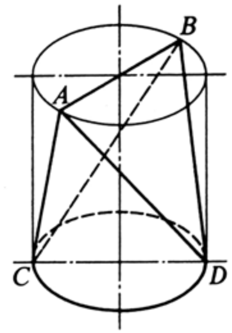
4) $f(x) = x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

5) $f(x) = 3x + \sqrt{x^2+1}$

6) $f(x) = \dfrac{x(x + |x|) + 1}{x - 3}$

7) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2-x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{x^3+2}{x^2+1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

118 Einem Rotationszylinder mit der Höhe h und dem Radius r werden durch die Ebenen ABC und ABD zwei Teile abgeschnitten (AB und CD sind windschief normal). Berechne das Volumen des Restkörpers.



6 Berechnung von Bogenlängen und Mantelflächen

119 Berechne die Länge des Bogens der Kurve k zwischen $x = a$ und $x = b$.

a) $k: y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{x}\right); \quad a = 1, \quad b = 3$

b) $k: y = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}); \quad a = -3, \quad b = 3$

c) $k: y = \dfrac{1}{4}(x^2 - 2\ln x); \quad a = 2, \quad b = 6$

d) $k: y = \sqrt{x^3}; \quad a = 0, \quad b = 5$

e) $k: y = \dfrac{2}{3}\sqrt{(x^2-1)^3}; \quad a = 1, \quad b = 3$

f) $k: y = \ln(\sin x); \quad a = \dfrac{\pi}{3}, \quad b = \dfrac{\pi}{2}$

g) $k: y = \ln(x^2 - 1); \quad a = \sqrt{2}, \quad b = 1 + \sqrt{2}$

120 Verifiziere durch Integration die Formel für den Umfang des Kreises.

121 Wie lang ist die Schleife der Kurve mit der Gleichung $9y^2 = x(x-3)^2$?

122 Welchen Umfang hat die Astroide mit der Gleichung $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$?