Bemerkung:
Einheitsprüfung für die ganze Schule

Schriftliche Maturaprüfung 2009

Mathematik G4h

Prüfungsdauer: 4 Stunden

Hilfsmittel: Formelsammlung, CAS-Rechner

Antworten und Ergebnisse ohne Beleg, Zitat oder Herleitung sind wertlos. Der Einsatz des Rechners ist zu dokumentieren.

Für jede der fünf Aufgaben gilt: Die vollständige und korrekte Lösung wird mit 12 Punkten bewertet.

Für 48 oder mehr Punkte wird die Note 6 erteilt. Der Notenmassstab ist linear.

KANTI
BADEN

1. Vier unabhängige Einzelaufgaben:

   1.1. Gegeben seien die Kugel κ mit der Gleichung $\kappa\colon (x-2)^2+(y-5)^2+z^2=25$ sowie die Punkte $P(5 \mid 3 \mid 6)$ und $Q(6 \mid 5 \mid 3)$. Entscheiden Sie, welcher der beiden Punkte auf der Kugel liegt, und bestimmen Sie dann die Tangentialebene an κ in diesem Punkt.

   1.2. a) Drei Würfel werden gleichzeitig geworfen. Lohnt es sich, darauf zu wetten, dass eine Augenzahl mehrfach auftritt? Begründen Sie die Antwort.

   b) Für welche Anzahlen n lohnt es sich, darauf zu wetten, dass beim Wurf von n Würfeln mindestens eine Augenzahl mehrfach auftritt?

   1.3. Die Parabel mit der Gleichung $y = x^2$ enthält die Punkte $A(-2 \mid 4)$ und $B(4 \mid 16)$. Für welchen Punkt C auf dem Parabelbogen zwischen A und B wird der Inhalt des Dreiecks ABC am grössten?

   1.4. Wir betrachten eine nach oben unbegrenzte Luftsäule von konstanter Temperatur. Dann lässt sich mit etwas Mathematik und Physik zeigen, dass der Luftdruck p allein durch die Höhe z bestimmt wird. Der Luftdruck ist unter den genannten Bedingungen eine Exponentialfunktion

$$p(z) = p_0 \cdot 2^{c \cdot z}$$

   mit zwei Konstanten p_0 und c.

   Aus zwei Messungen lässt sich die Funktion ganz rekonstruieren, das heisst p_0 und c berechnen. Wir nehmen an, auf der Höhe $z_1 = 400$ Meter über Meer wurde der Druck 96 000 Pa gemessen, auf $z_2 = 5\,600$ Meter über Meer gerade noch 48 000 Pa.

   a) Wie gross sind in diesem Fall p_0 und c?

   b) Welchen Luftdruck sagt das Modell für die Meereshöhe $z_0 = 0$ voraus und welchen für die Höhe $z_3 = 10\,800$ Meter über Meer?

2. Wir betrachten die beiden Funktionen

$$p : x \mapsto 3x^2 - 3x - 4 \quad \text{und} \quad q : x \mapsto 2x^3 - 6x - 2$$

   a) Skizzieren Sie die Graphen von p und q im gleichen Koordinatensystem im Bereich $-2 \leqslant x \leqslant 3$.

   b) Wir betrachten an der Stelle $x = 2$ die Tangente an den Graphen von p und jene an den Graphen von q. Unter welchem Winkel schneiden sich diese beiden Tangenten?

   c) Berechnen Sie den exakten Wert von

$$\int_{-1}^{2} (p(x) - q(x))\,\mathrm{d}x$$

   Wie lässt sich das Ergebnis geometrisch interpretieren?

   d) Welchen Inhalt hat die Fläche, welche von den beiden Graphen im Bereich $-1 \leqslant x \leqslant 2$ begrenzt wird?

   e) Für welche Werte von x mit $-1 \leqslant x \leqslant 2$ ist die Differenz $p(x) - q(x)$ extremal? Wie gross sind diese Extrema?

   f) Es seien a und b die beiden Nullstellen der Funktion p. Im Bereich $a \leqslant x \leqslant b$ rotiert der Graph von p um die x-Achse, dabei wird ein Rotationskörper definiert. Wie gross ist sein Volumen?

3. Wir betrachten die beiden Funktionen

$$f : x \mapsto \frac{1+2x}{(2+x)^2} \qquad \text{und} \qquad g : t \mapsto \frac{1+2\sin(t)}{(2+\sin(t))^2}$$

a) Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen von f qualitativ richtig.

b) Welches sind die Extremalstellen der Funktion $f : x \mapsto f(x)$, wenn der Definitionsbereich auf $-1 \leqslant x \leqslant 1$ beschränkt wird?

c) Wie lassen sich die Extrema von $g : t \mapsto f(\sin(t))$ aus jenen von f finden?

d) Welches sind die Extremalstellen von g und welches die zugehörigen Extremalwerte?

e) Wo ist die Steigung des Graphen von g maximal, wo minimal?

f) Wo liegen die Wendestellen des Graphen von g?

4. Eine Ebene $\alpha\colon 2x - 2y - z - 2 = 0$ ist gegeben. Eine weitere Ebene β ist durch die Punkte $A\,(1 \mid 2 \mid 4)$, $B\,(2 \mid 2 \mid 6)$ und $C\,(3 \mid 5 \mid 2)$ bestimmt.

a) Zeigen Sie, dass die Ebenen α und β parallel sind.

b) Bestimmen Sie den Abstand der beiden Ebenen α und β.

c) Welchen Winkel schliesst die Ebene α mit der xy -Ebene ein?

d) Ein von der Lichtquelle $Q\,(4 \mid -4 \mid -4)$ ausgehender Lichtstrahl l wird an der Ebene α so reflektiert, dass der reflektierte Strahl durch den Punkt $P\,(14 \mid 7 \mid 3)$ geht. In welchem Punkt R der Ebene α wird der Lichtstrahl reflektiert?

e) Seien $\alpha_1\colon ax + y - 2z + a = 0$ und $\alpha_2\colon x - y - a^2 z - 1 = 0$ zwei weitere Ebenen. Für welche Werte von a haben die Ebenen α, α_1 und α_2

(i) genau einen Schnittpunkt,

(ii) keinen gemeinsamen Punkt?

5. Die Urgrossmutter ist manchmal beim Kochen etwas sehr zerstreut und würzt die Suppe mit drei zufällig herausgegriffenen Gewürzen. Nichts gegen Majoran und Salz, aber Lebkuchengewürz in der Suppe ist doch eher gewöhnungsbedürftig. Das Gewürzgestell enthält neben dem Salzstreuer fünf suppentaugliche und drei untaugliche Gewürze. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Suppe geniessbar wird (d. h. nur taugliche Gewürze verwendet werden),

a) wenn die gute alte Dame immer drei verschiedene Gewürze nimmt,

b) wenn sie jedes Gewürz nach Gebrauch wieder zurückstellt, sodass auch dasselbe mehrmals gewählt werden kann? Hier ist zu beachten, dass dreimal Salz definitiv zuviel (also ungeniessbar) ist.

c) Es ist nicht bekannt, welche der beiden Methoden sie wählt. Wie oft muss man mitessen, damit man mit 99-prozentiger Wahrscheinlichkeit mindestens einmal in den fraglichen Genuss einer grässlichen Suppe kommt?

d) Der Enkel überlegt, ob er zusätzliche Salzstreuer ins Gestell stellen soll. Damit verringert sich die Lebkuchengewürzwahrscheinlichkeit. Allzuviele sind aber ungesund, weil drei Salzzugaben die Suppe ja ungeniessbar versalzen. Welche Anzahl von zusätzlichen Salzstreuern im Gestell führt zur grössten Suppengeniessbarkeitswahrscheinlichkeit, wenn die Köchin jedes Gewürz nach Gebrauch sofort wieder zurückstellt (wie in Aufgabe b)?