Wiskundig vouwen

Philippe Cara

Vrije Universiteit Brussel

pcara@vub.ac.be

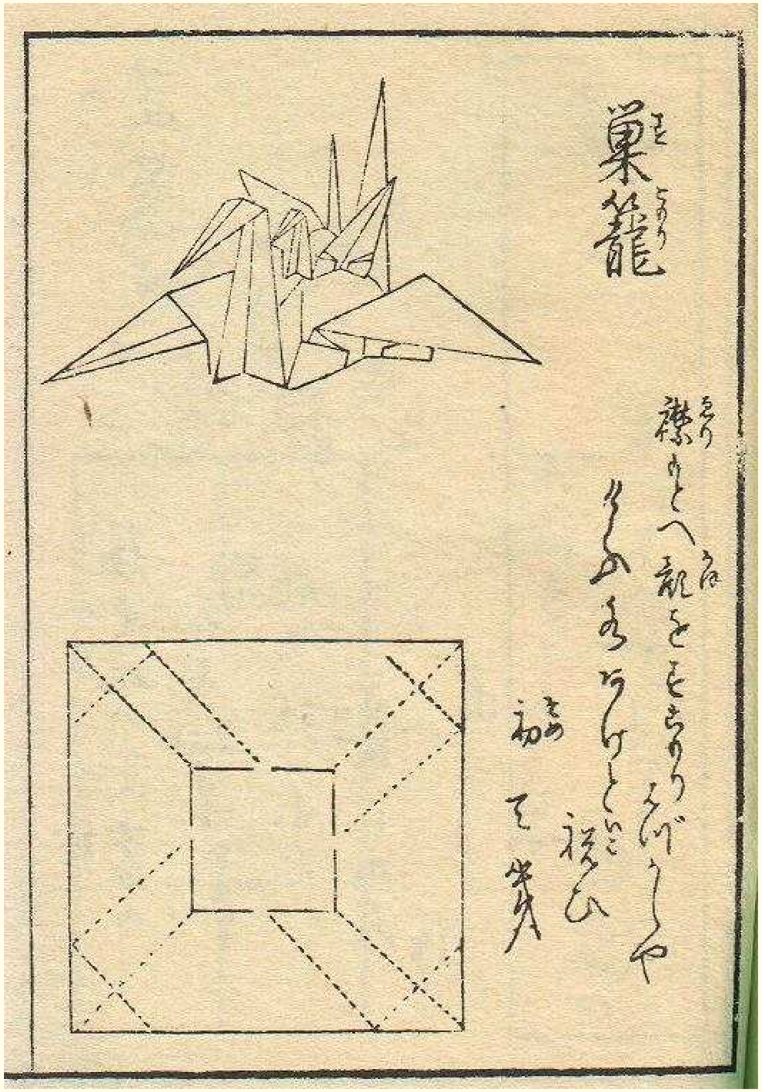
Nationale Wiskunde Dagen

Noordwijkerhout, 28 januari 2011

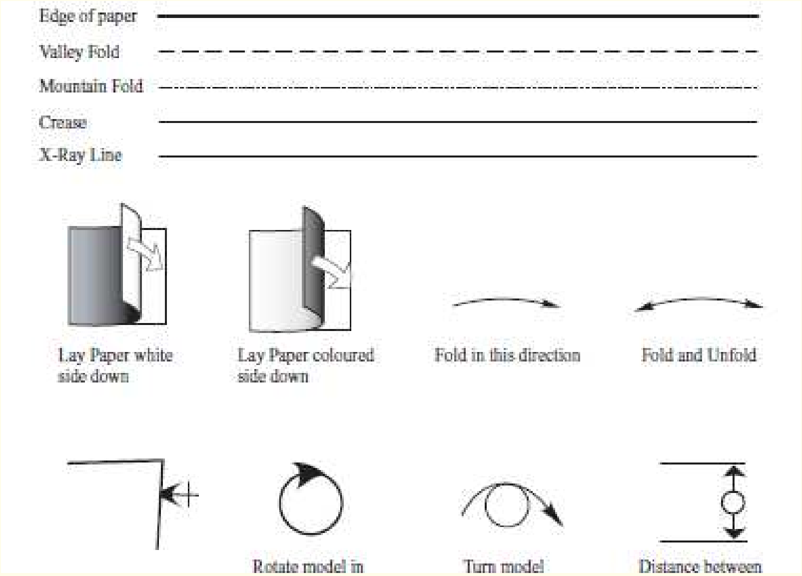
- ORIGAMI = kunst van het papiervouwen
- China, 1ste of 2de eeuw
- Japan 6de eeuw, Europa in 12de eeuw

ORIGAMI!

- ORIGAMI = kunst van het papiervouwen
- China, 1ste of 2de eeuw
- Japan 6de eeuw, Europa in 12de eeuw
- 1797: Hiden Senbazuru Orikata
- 1880: “Oru” (plooien) “Kami” (papier)
- 1935: Yoshizawa voert symbolen en diagrammen in

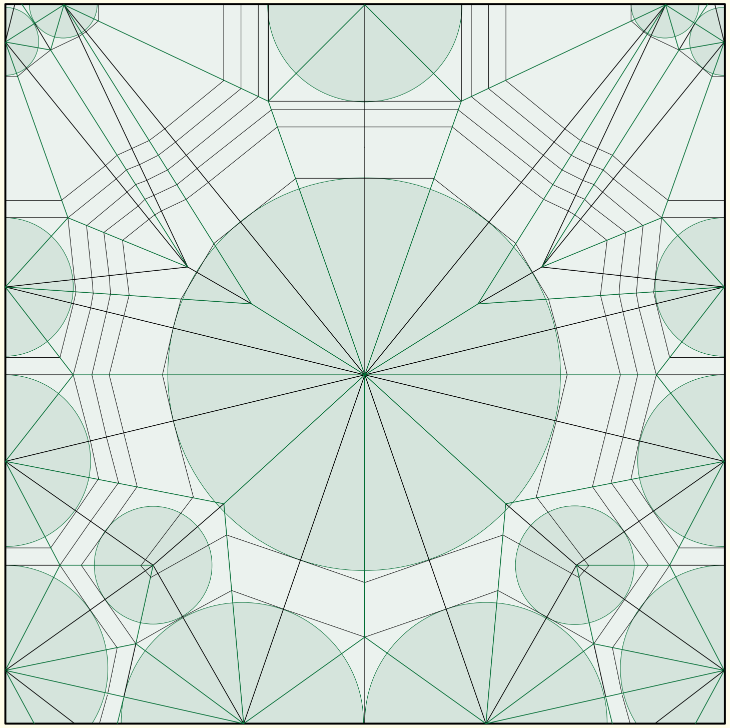


Vouwsymbolen



Hoe maken we. . . ?

Vouwpatronen



Papiervouwen : een hobby ?

- Ontspannend, weinig risico
- Interesseert meetkundigen
- Interesseert wiskundigen

Papiervouwen : een hobby ?

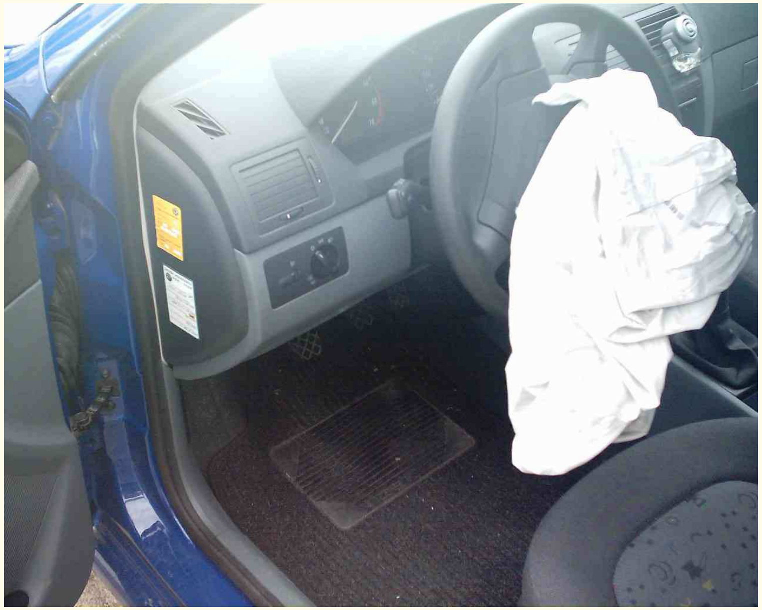
- Ontspannend, weinig risico
- Interesseert meetkundigen
- Interesseert wiskundigen
- Interessant voor het onderwijs

Papiervouwen : een hobby ?

- Ontspannend, weinig risico
- Interesseert meetkundigen
- Interesseert wiskundigen
- Interessant voor het onderwijs
- Interessant voor veiligheid en ruimte

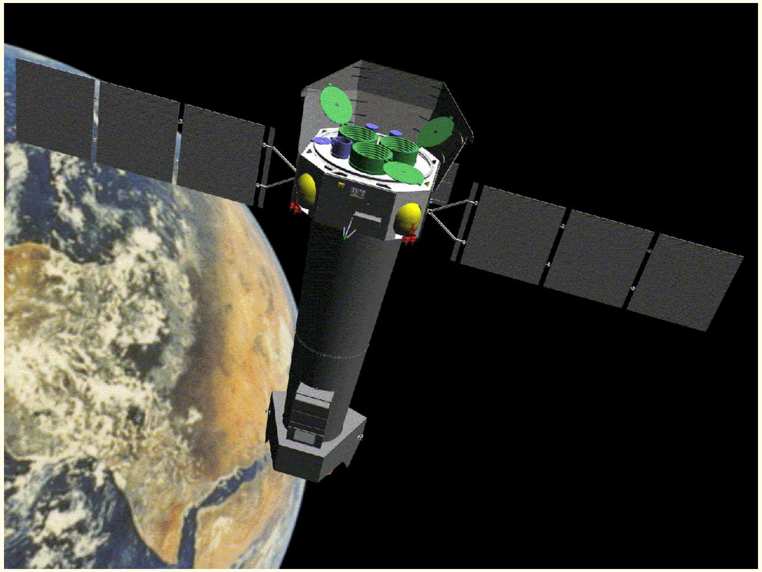
Papiervouwen : een hobby ?

- Ontspannend, weinig risico
- Interesseert meetkundigen
- Interesseert wiskundigen
- Interessant voor het onderwijs
- Interessant voor veiligheid en ruimte



Papiervouwen : een hobby ?

- Ontspannend, weinig risico
- Interesseert meetkundigen
- Interesseert wiskundigen
- Interessant voor het onderwijs
- Interessant voor veiligheid en ruimte

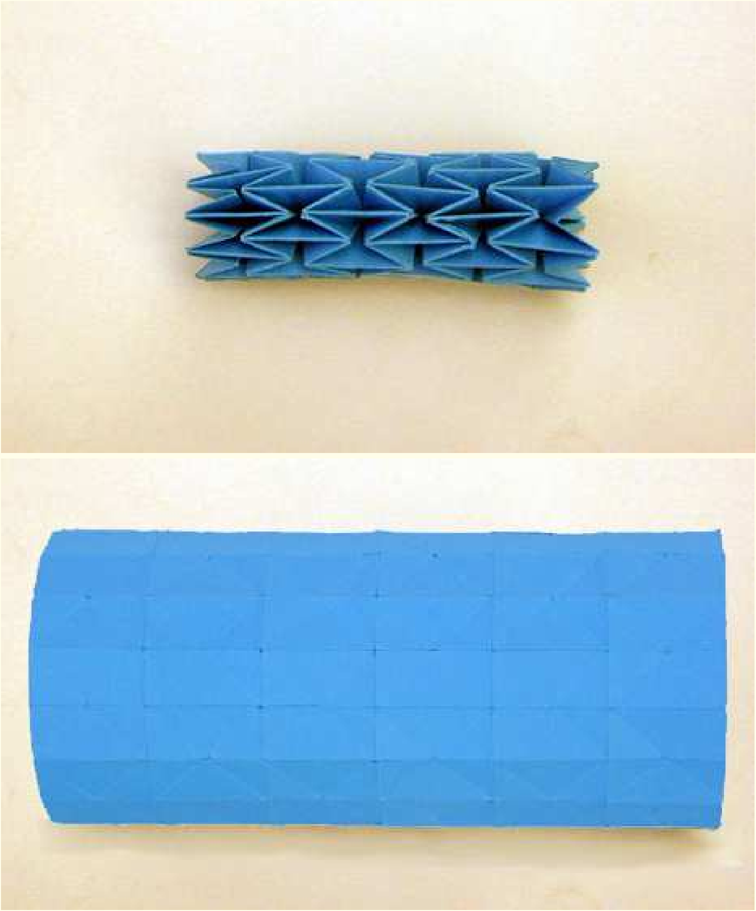


Papiervouwen : een hobby ?

- Ontspannend, weinig risico
- Interesseert meetkundigen
- Interesseert wiskundigen
- Interessant voor het onderwijs
- Interessant voor veiligheid en ruimte
- Interessant in de geneeskunde

Papiervouwen : een hobby ?

- Ontspannend, weinig risico
- Interesseert meetkundigen
- Interesseert wiskundigen
- Interessant voor het onderwijs
- Interessant voor veiligheid en ruimte
- Interessant in de geneeskunde



WAT KAN GECONSTRUEERD WORDEN ?

Meetkundige constructies

Alle constructies die in de *Elementen* van Euklides voorkomen zijn gebaseerd op het gebruik van passer en liniaal.

Meetkundige constructies

Alle constructies die in de *Elementen* van Euklides voorkomen zijn gebaseerd op het gebruik van passer en liniaal.

1. Tussen twee verschillende punten kan men steeds een rechte lijn trekken.
2. Elke eindige rechte lijn kan steeds oneindig verlengd worden op een continue wijze.
3. Men kan steeds een cirkel tekenen indien zijn middelpunt en een straal gegeven zijn.

We kunnen tweedegraadsvergelijkingen oplossen

- $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$
- $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2$

Onmogelijke constructies

Drie problemen waarvoor men eeuwenlang tevergeefs naar een oplossing zocht:

1. *De duplicatie van de kubus* = de constructie van de zijde van een kubus die een volume heeft gelijk aan het dubbele van dat van een gegeven kubus.
2. *De trisectie van de hoek* = de verdeling van een gegeven willekeurige hoek in drie evengrote hoeken.
3. *De kwadratuur van de cirkel* = de constructie van een vierkant met dezelfde oppervlakte als een gegeven cirkel.

Onmogelijke constructies

1. *De duplicatie van de kubus* : $z_D^3 = 2z^3 \Longleftrightarrow z_D = \sqrt[3]{2}z$.

Onmogelijke constructies

1. *De duplicatie van de kubus* : $z_D^3 = 2z^3 \Longleftrightarrow z_D = \sqrt[3]{2}z$.
2. *De trisectie van de hoek* : derdegraadsvergelijking : $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

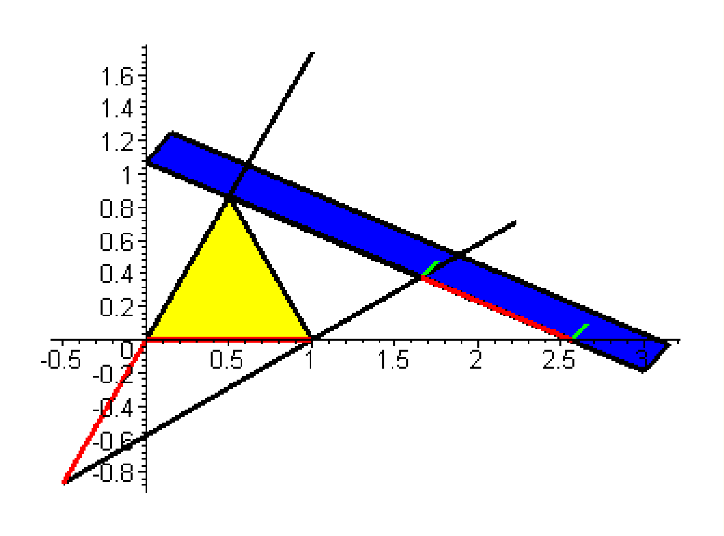
Onmogelijke constructies

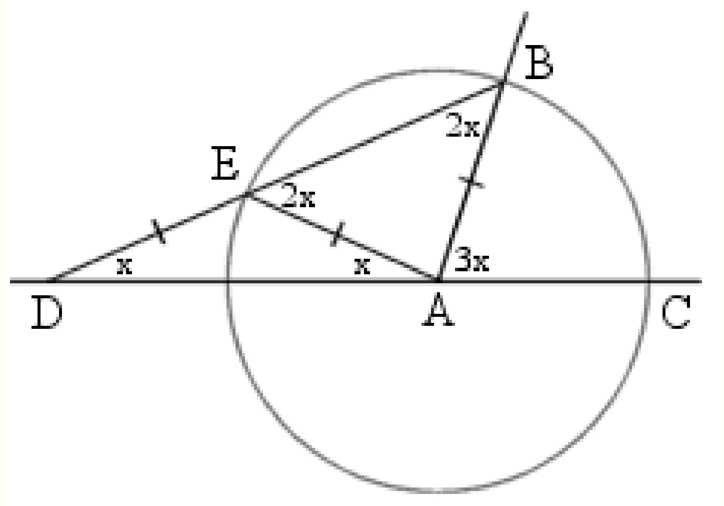
1. *De duplicatie van de kubus* : $z_D^3 = 2z^3 \iff z_D = \sqrt[3]{2}z$.
2. *De trisectie van de hoek* : derdegraadsvergelijking : $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.
3. *De kwadratuur van de cirkel* : construeer $\sqrt{\pi}$.

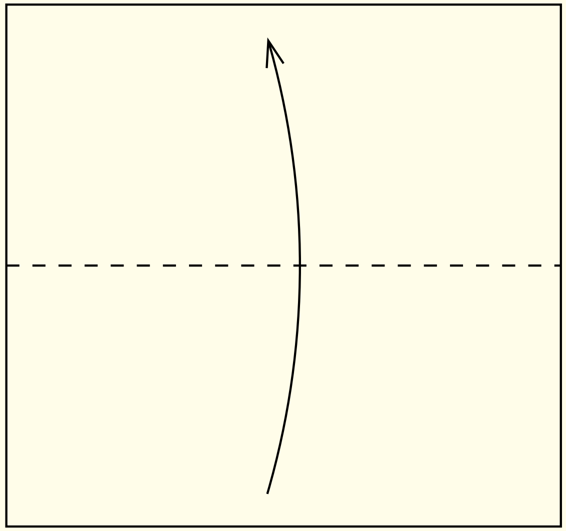
Onmogelijke constructies

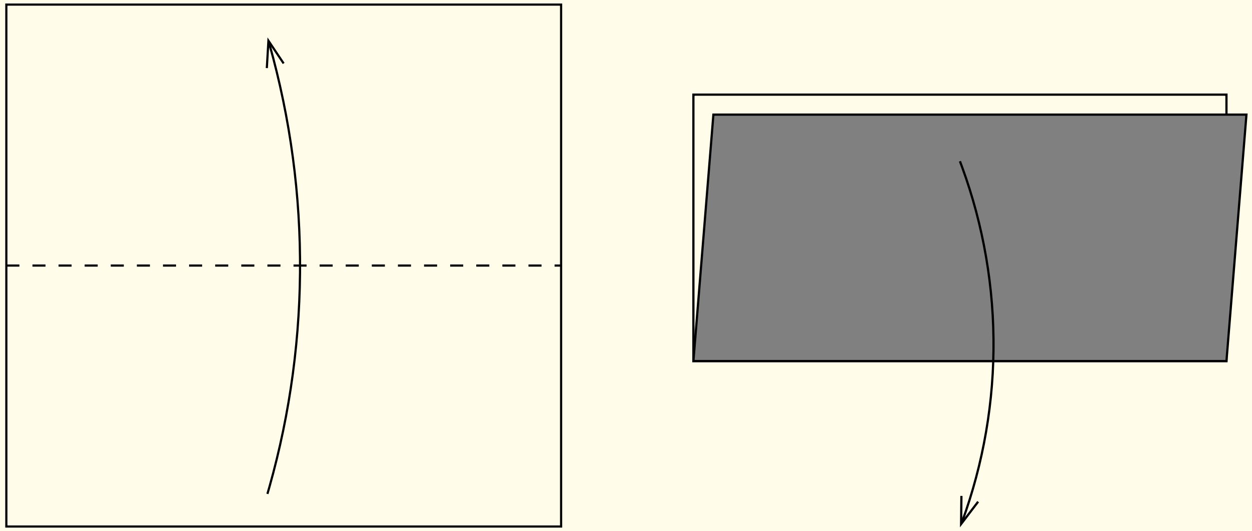
1. *De duplicatie van de kubus* : $z_D^3 = 2z^3 \Longleftrightarrow z_D = \sqrt[3]{2}z$.
2. *De trisectie van de hoek* : derdegraadsvergelijking : $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.
3. *De kwadratuur van de cirkel* : construeer $\sqrt{\pi}$.

Galoistheorie $\Longrightarrow$ geen van deze drie problemen heeft een oplossing met passer en liniaal.

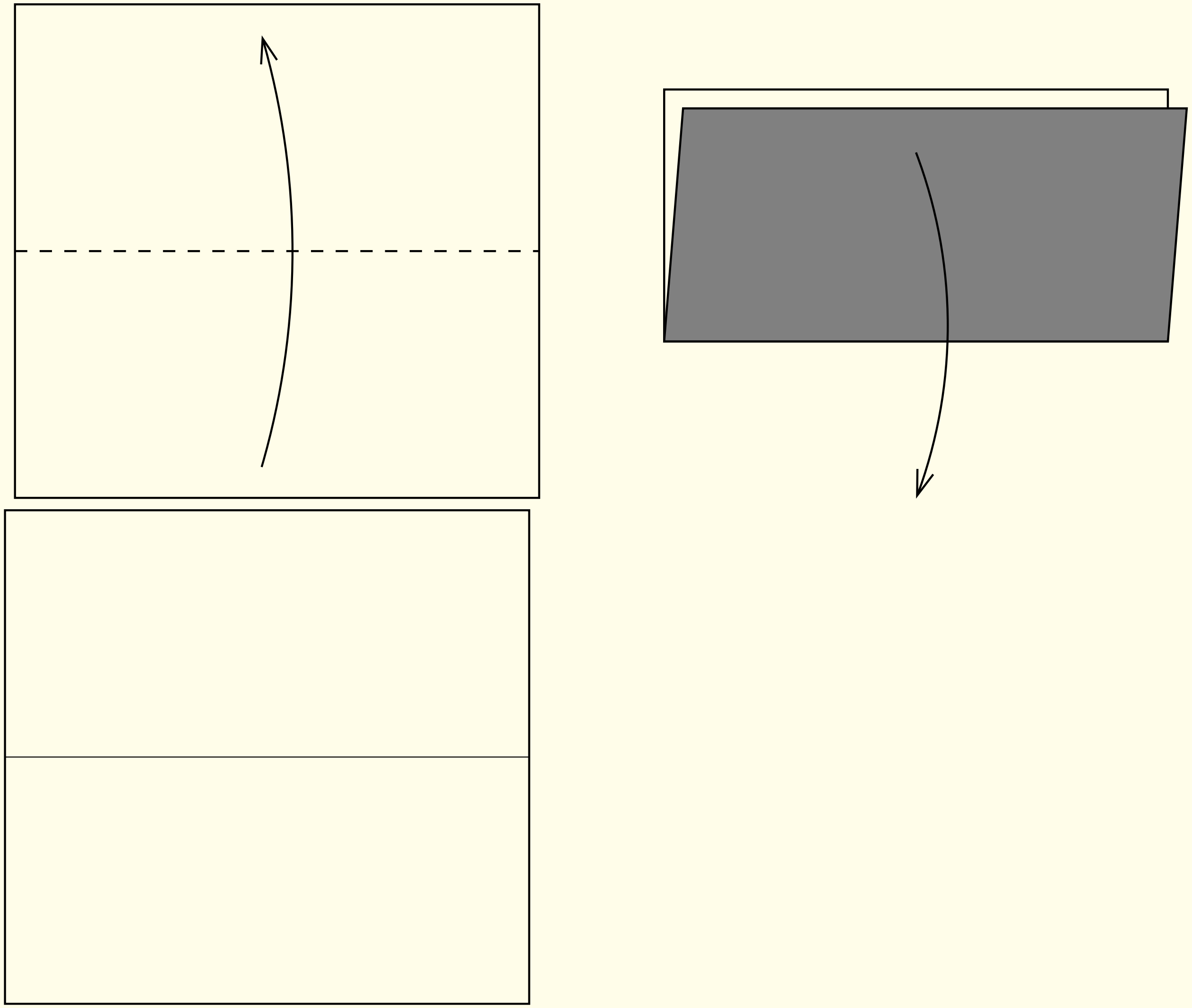

1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8


B
2x
E
2x
x
x
3x
D
A
C

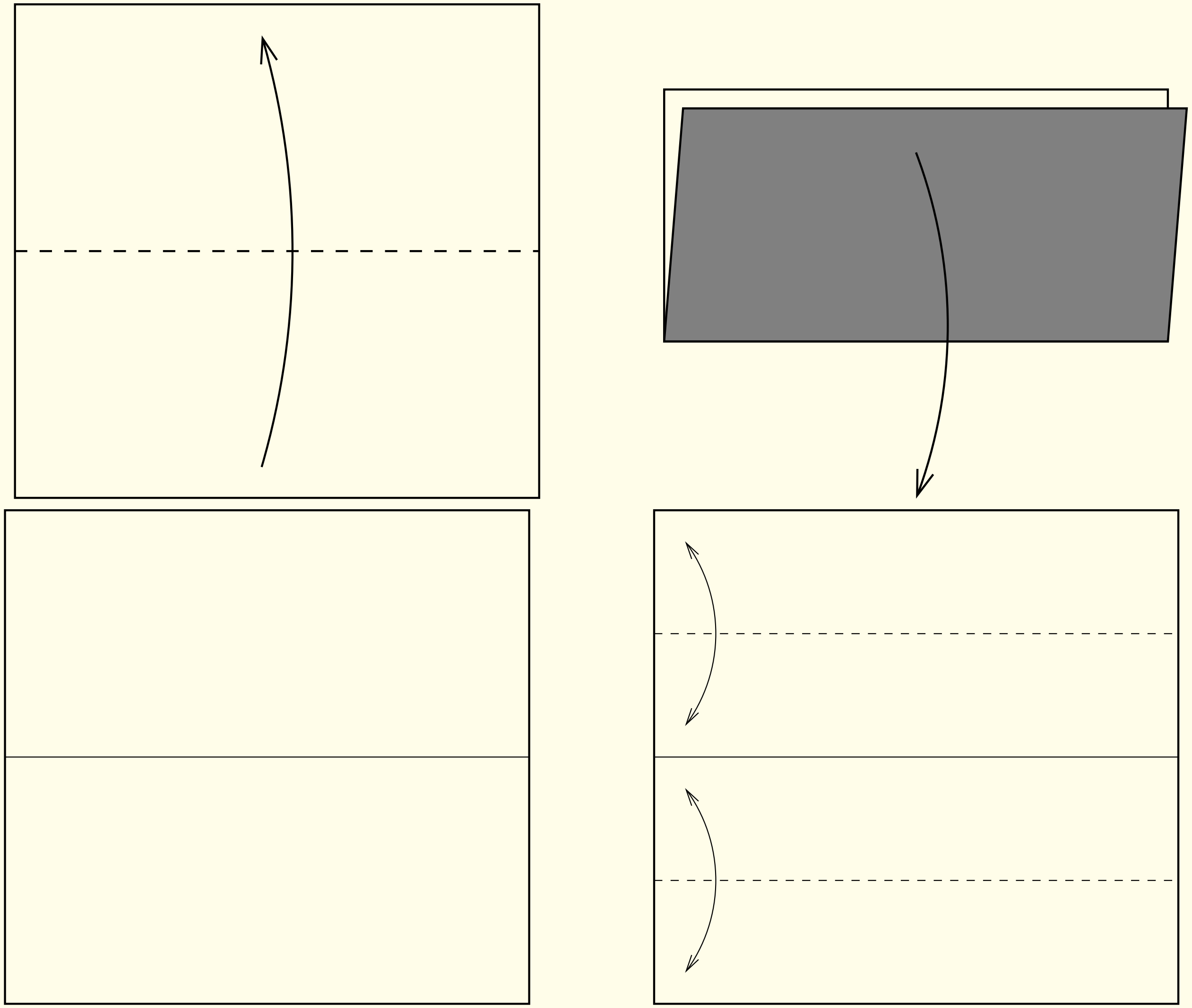


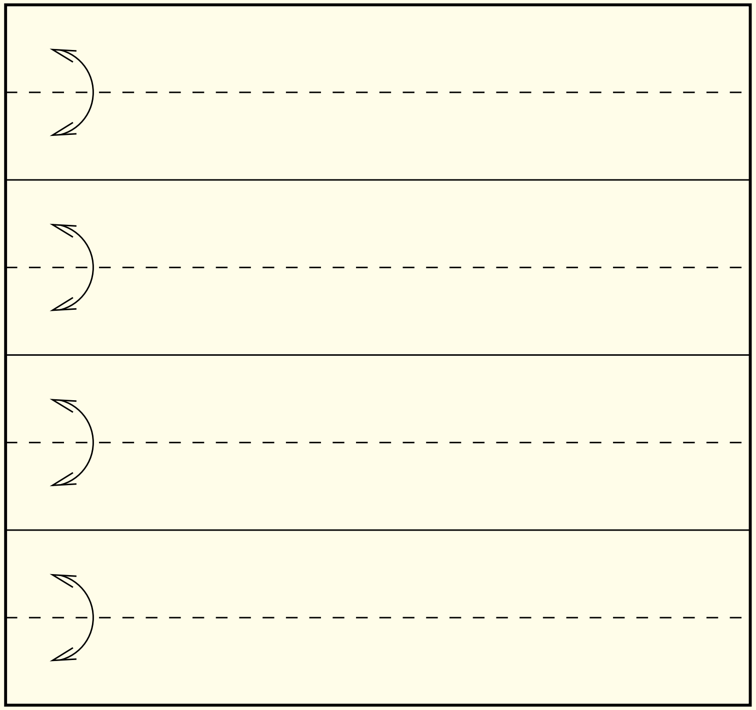


Eerste stappen



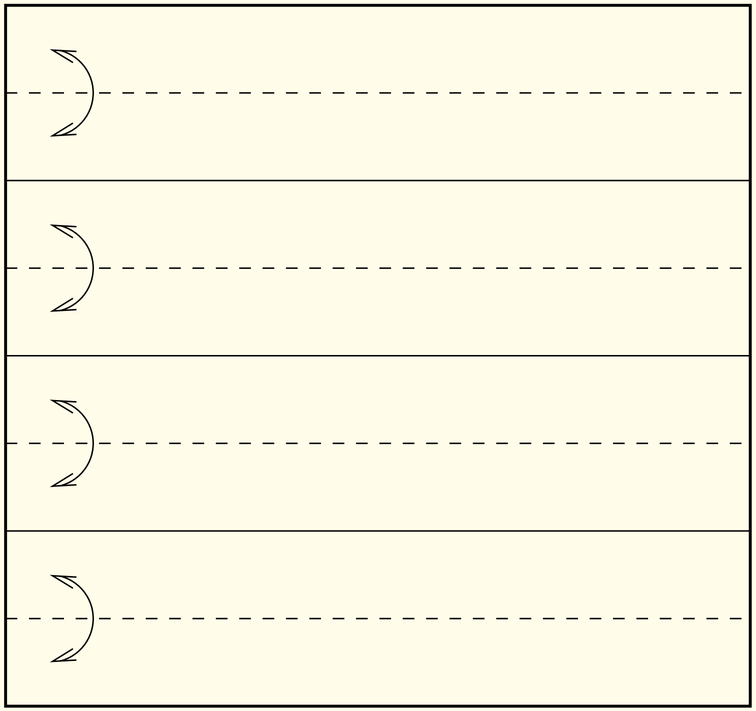
Eerste stappen





- We kunnen alle breuken $\frac{1}{2^n}$ construeren!

Binaire breuken



- We kunnen alle breuken $\frac{1}{2^n}$ construeren!
- We kunnen dus ook de $\frac{m}{2^n}$ maken, in $2^n - 1$ vouwen.

Binaire schrijfwijze van getallen

$$384 = 3 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 4 \times 10^0$$

Binaire schrijfwijze van getallen

$$384 = 3\times 10^2+8\times 10^1+4\times 10^0$$

$$101 = 1\times 2^2+0\times 2^1+1\times 2^0$$

$\textsf{384.678} = $

$$3\times10^2+8\times10^1+4\times10^0+6\times10^{-1}+7\times10^{-2}+8\times10^{-3}$$

$\textsf{101} =$

$$1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0$$

384.678 $=$

$$3 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 4 \times 10^0 + 6 \times 10^{-1} + 7 \times 10^{-2} + 8 \times 10^{-3}$$

101.001 $=$

$$1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}$$

Binaire schrijfwijze van getallen

384.678 $=$

$$3\times 10^2+8\times 10^1+4\times 10^0 +6\times 10^{-1}+7\times 10^{-2}+8\times 10^{-3}$$

101.001 $=$

$$1\times 2^2+0\times 2^1+1\times 2^0 +0\times 2^{-1}+0\times 2^{-2}+1\times 2^{-3}$$

We kunnen dus binaire breuken $\frac{m}{2^n}$ met $m < 2^n$ schrijven als "binaire kommagetallen".

384.678=

$$3\times 10^2+8\times 10^1+4\times 10^0+6\times 10^{-1}+7\times 10^{-2}+8\times 10^{-3}$$

101.001=

$$1\times 2^2+0\times 2^1+1\times 2^0+0\times 2^{-1}+0\times 2^{-2}+1\times 2^{-3}$$

We kunnen dus binaire breuken $\frac{m}{2^n}$ met $m < 2^n$ schrijven als "binaire kommagetallen".

.111= $1\times 2^{-1}+1\times 2^{-2}+1\times 2^{-3} = \frac{7}{8}$

$$.11001 = 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 0 \times 2^{-4} + 1 \times 2^{-5} = \frac{25}{32}$$

$$.11001 = \frac{1}{2}(1 + 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4})$$

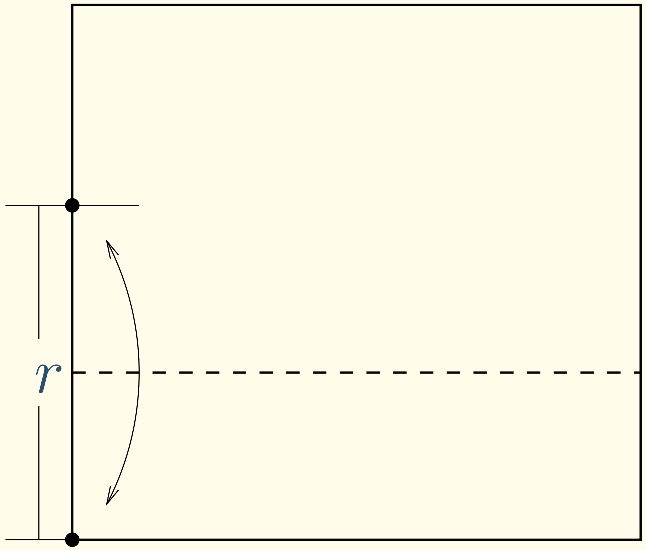
$$\vdots$$

$$.11001 = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}(0 + \frac{1}{2}(0 + \frac{1}{2}(1)))))$$

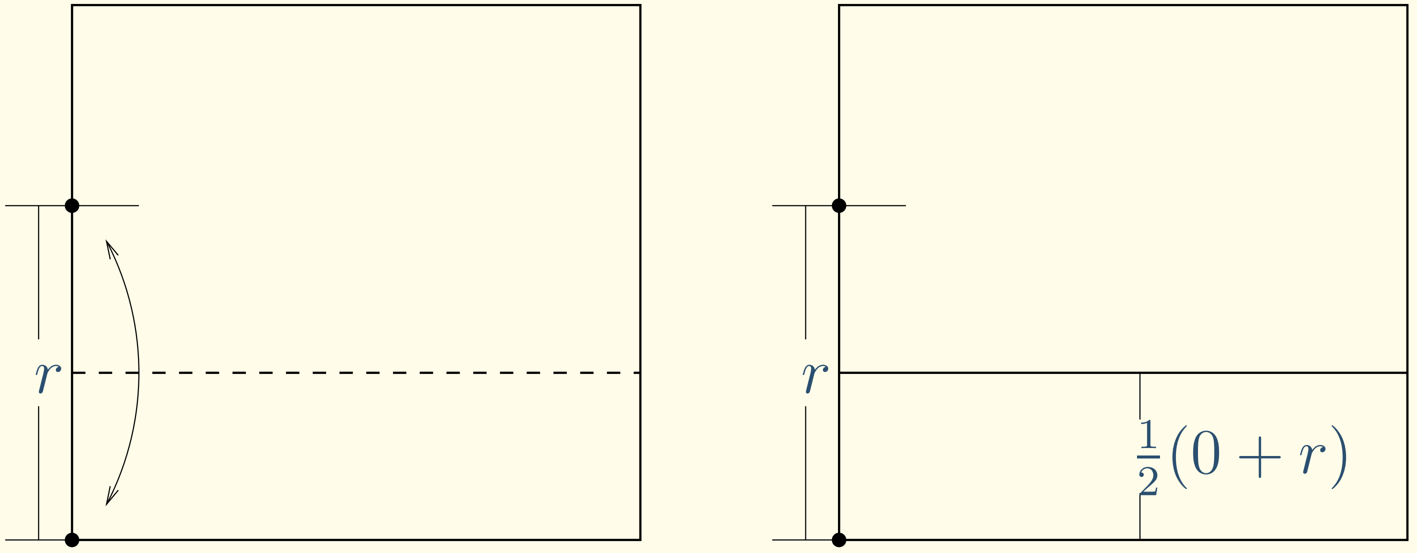
We kunnen $\frac{25}{32}$ berekenen door van rechts naar links te lezen en, afhankelijk van wat er staat,

1. plus 0, maal $\frac{1}{2}$
2. plus 1, maal $\frac{1}{2}$

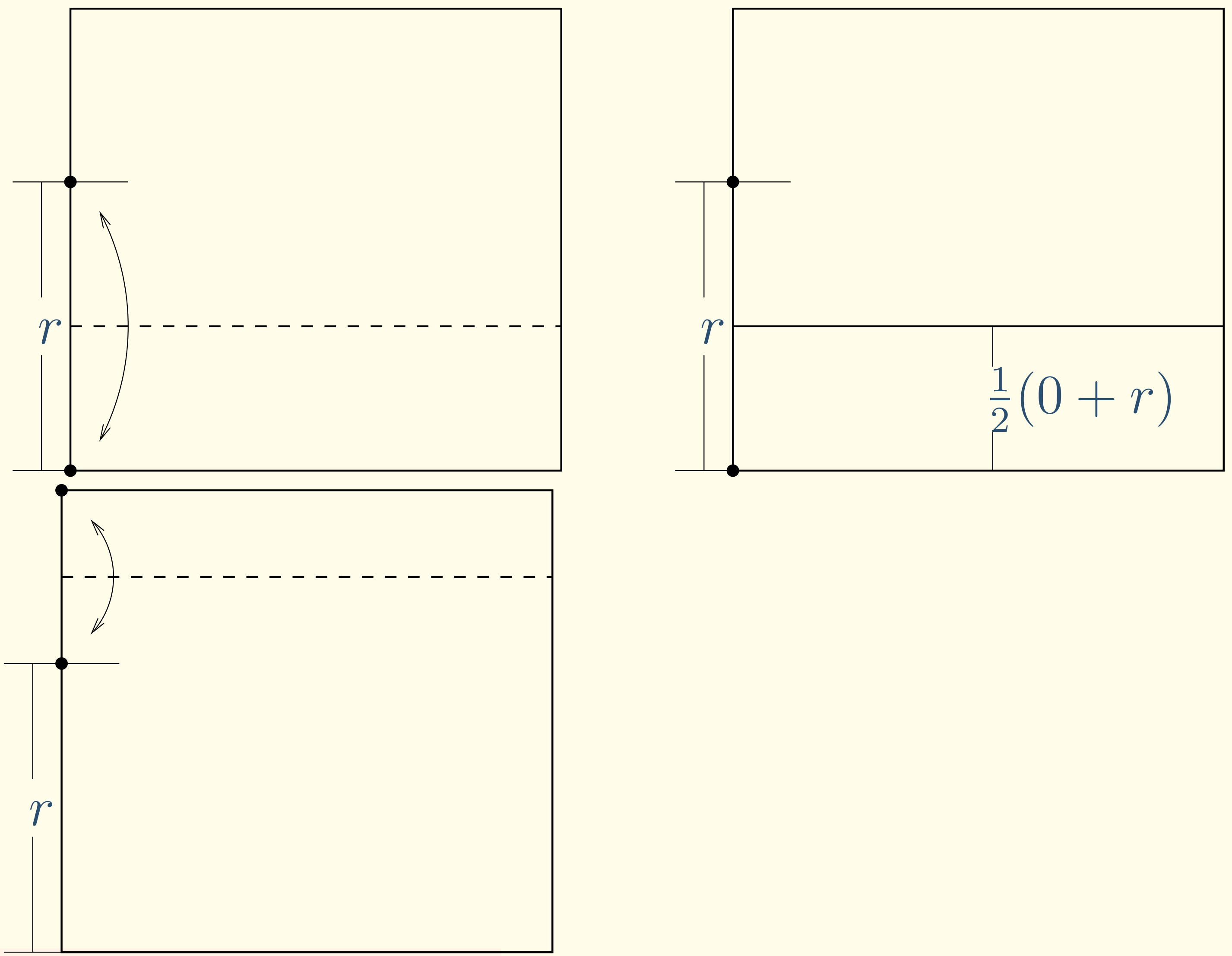
Deze twee bewerkingen met papier



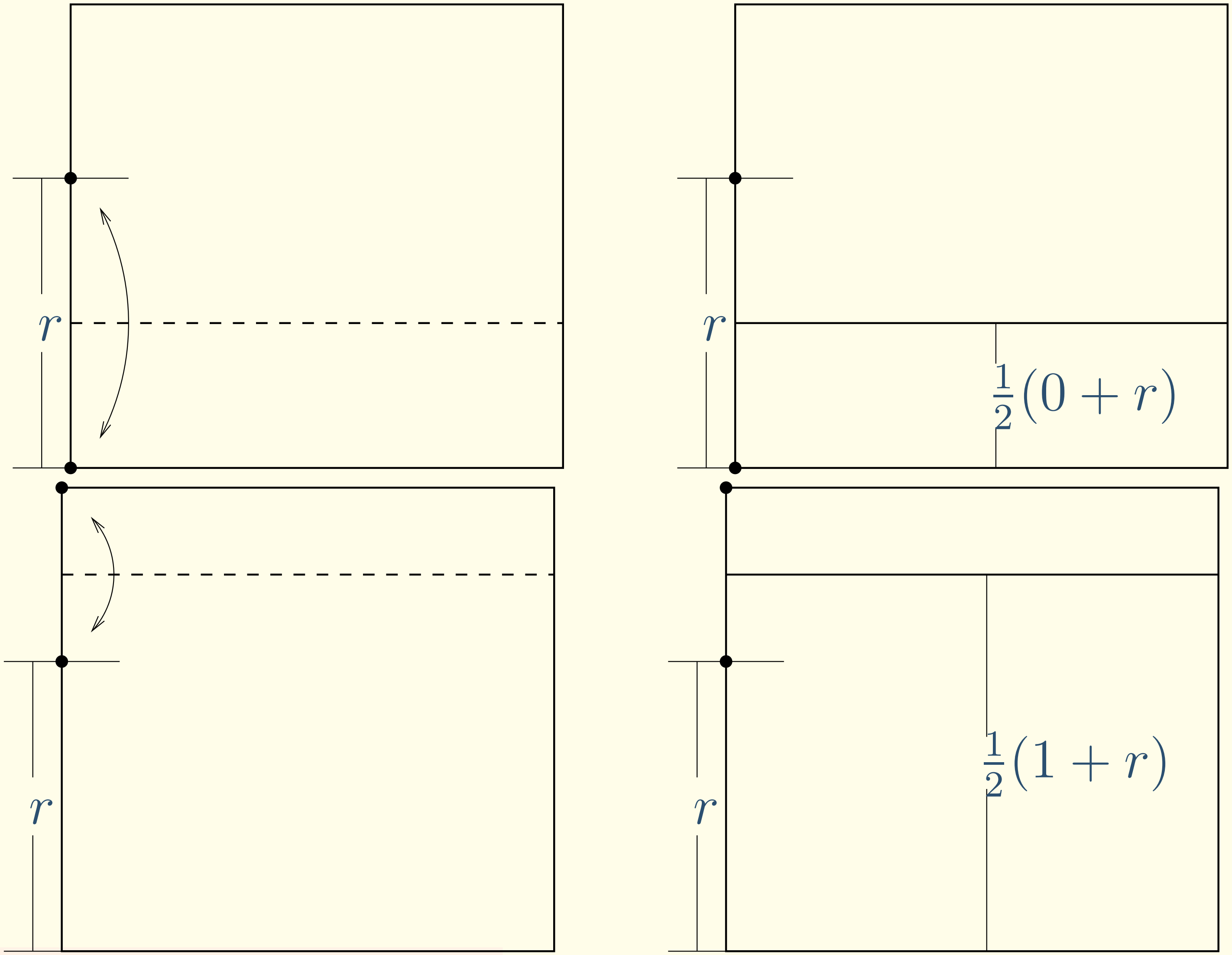
Deze twee bewerkingen met papier



Deze twee bewerkingen met papier



Deze twee bewerkingen met papier



Efficientie!

Hier slechts n vouwen nodig!!!

$$\frac{25}{32} = .11001 = 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 0 \times 2^{-4} + 1 \times 2^{-5}$$

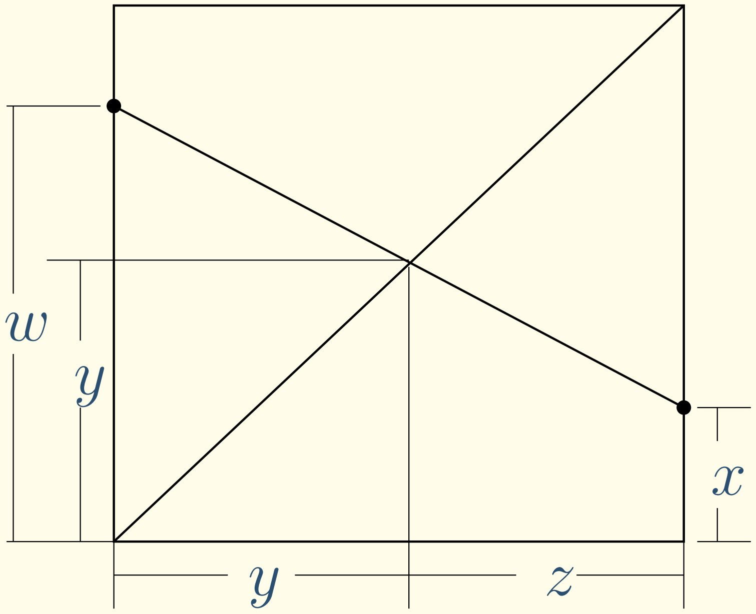
$$\frac{1}{3} = .0101010101\ldots$$

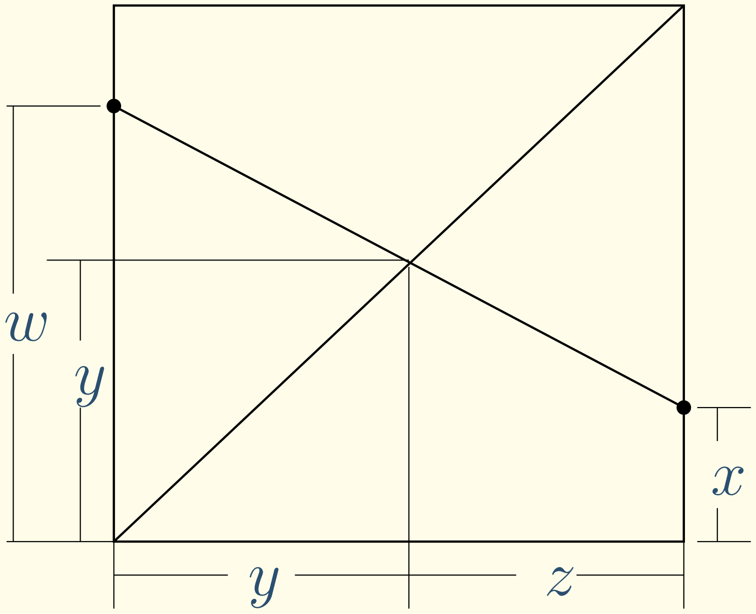
Benaderingen

$$\frac{1}{3} = .0101010101\ldots$$

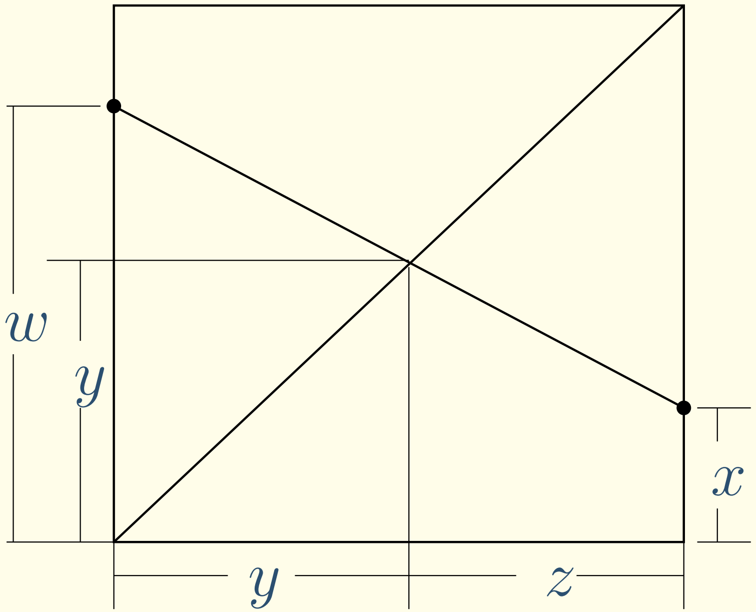
Dus vouw bovenkant naar beneden, onderkant naar boven, bovenkant naar beneden, onderkant naar boven, bovenkant naar beneden, onderkant naar boven, bovenkant naar beneden, onderkant naar boven, bovenkant naar beneden, onderkant naar boven, bovenkant naar beneden, onderkant naar boven, . . .

Willekeurige breuken



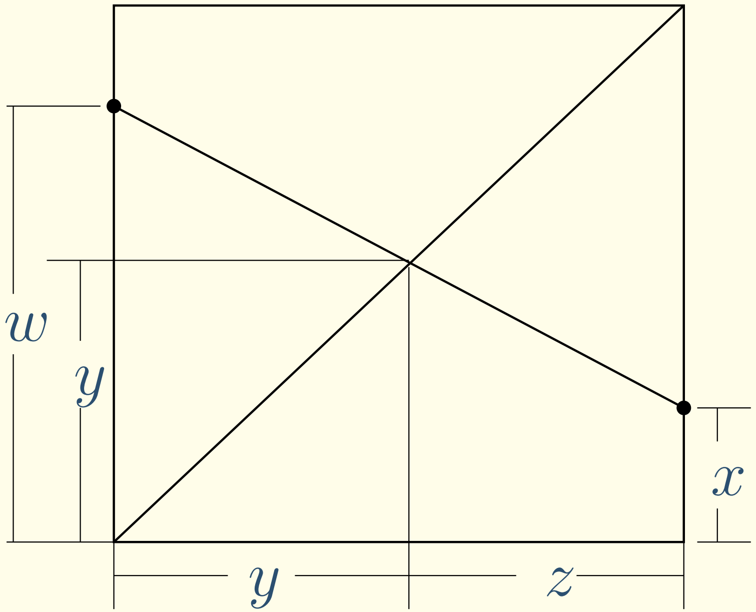


- $Y = w + \frac{x-w}{y+z} X = w + (x-w) X$



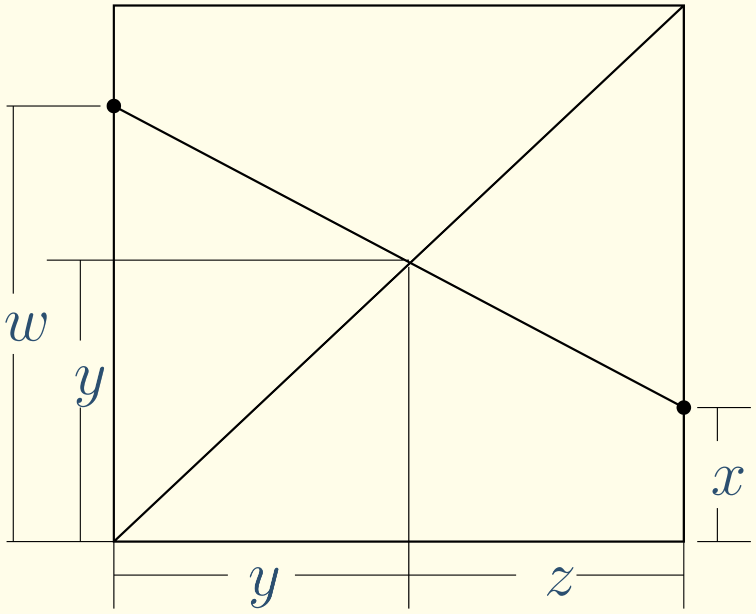
- $Y = w + \frac{x-w}{y+z} X = w + (x-w)X$
- Diagonaal $\equiv X = Y$

Willekeurige breuken

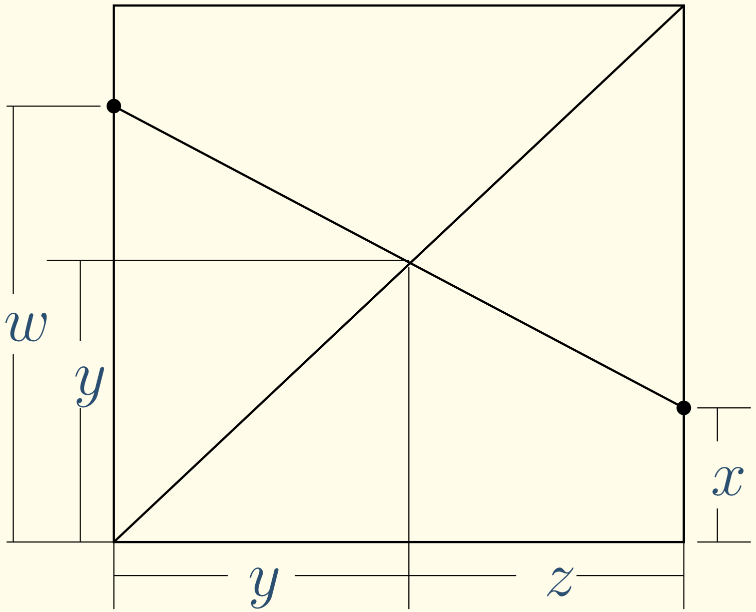


- $Y = w + \frac{x-w}{y+z} X = w + (x-w)X$
- Diagonaal $\equiv X = Y$
- $Y(1-(x-w)) = w \iff y = \frac{w}{1-x+w}$

Willekeurige breuken

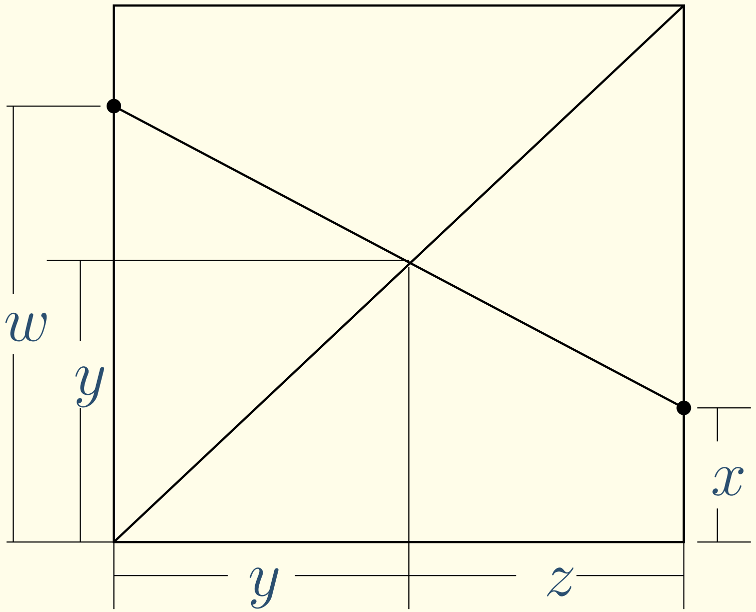


- $Y = w + \frac{x-w}{y+z} X = w + (x-w)X$
- Diagonaal $\equiv X = Y$
- $Y(1-(x-w)) = w \iff y = \frac{w}{1-x+w}$
- $z = 1 - y = \frac{1-x}{1-x+w}$



- $Y = w + \frac{x-w}{y+z}X = w + (x-w)X$
- Diagonaal $\equiv X = Y$
- $Y(1-(x-w)) = w \iff y = \frac{w}{1-x+w}$
- $z = 1 - y = \frac{1-x}{1-x+w}$
- Zij $p = 2^k$ en stel $w = \frac{m}{p}$ en $x = \frac{n}{p}$ met $m, n < p$

Willekeurige breuken

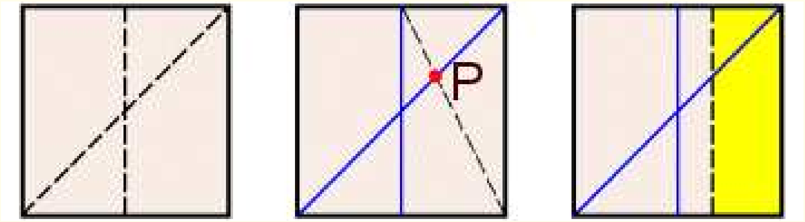


- $Y = w + \frac{x-w}{y+z}X = w + (x-w)X$
- Diagonaal $\equiv X = Y$
- $Y(1-(x-w)) = w \iff y = \frac{w}{1-x+w}$
- $z = 1 - y = \frac{1-x}{1-x+w}$
- Zij $p = 2^k$ en stel $w = \frac{m}{p}$ en $x = \frac{n}{p}$ met $m, n < p$
- Dan $y = \frac{m}{p+m-n}$ en $z = \frac{p-n}{p+m-n}$.

Constructie van a/b

- Dan $y = \frac{m}{p+m-n}$ en $z = \frac{p-n}{p+m-n}$.
- $m := a$, $n = a - b + p$ met $p = 2^k$ zó dat $p \geq a$ en $p \geq b - a$.

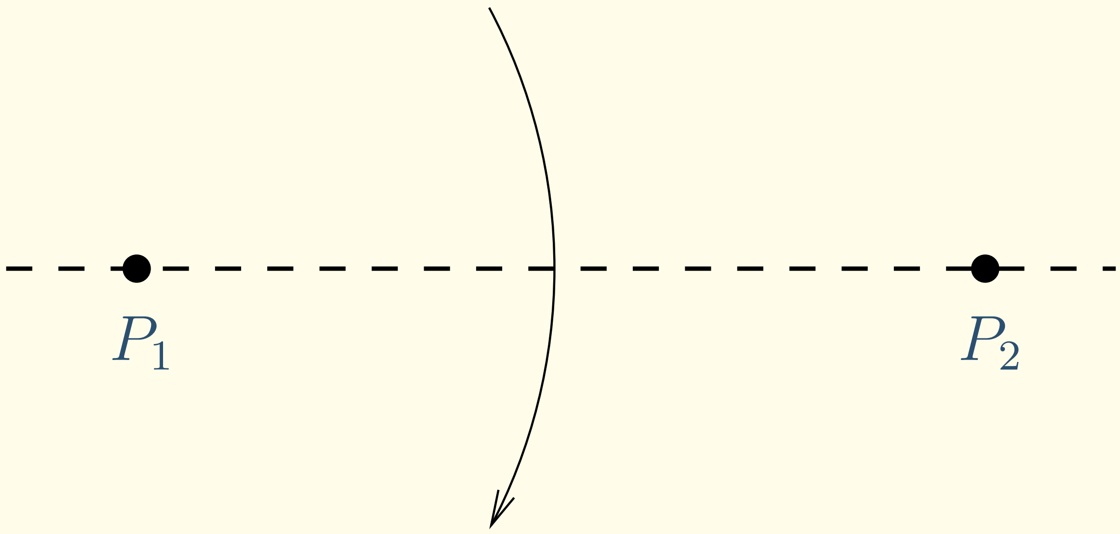
- Dan $y = \frac{m}{p+m-n}$ en $z = \frac{p-n}{p+m-n}$.
- $m := a$, $n = a - b + p$ met $p = 2^k$ zó dat $p \geq a$ en $p \geq b - a$.
- Voorbeeld: voor $\frac{1}{3}$ nemen we $p = 2$, $m = 1$ en $n = 0$

- Dan $y = \frac{m}{p+m-n}$ en $z = \frac{p-n}{p+m-n}$.
- $m := a$, $n = a - b + p$ met $p = 2^k$ zó dat $p \geq a$ en $p \geq b - a$.
- Voorbeeld: voor $\frac{1}{3}$ nemen we $p = 2$, $m = 1$ en $n = 0$
- 

Origami axioma's

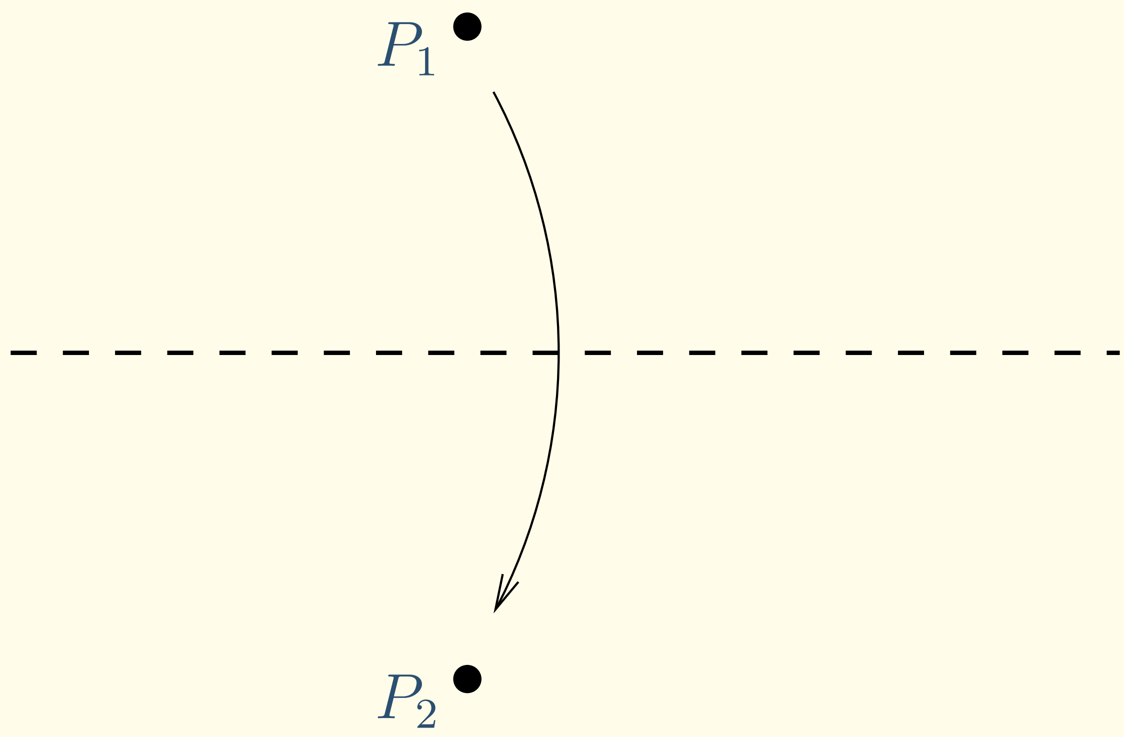
Twee punten $\longrightarrow$ rechte vouwen die ze verbindt.

Twee punten $\longrightarrow$ rechte vouwen die ze verbindt.

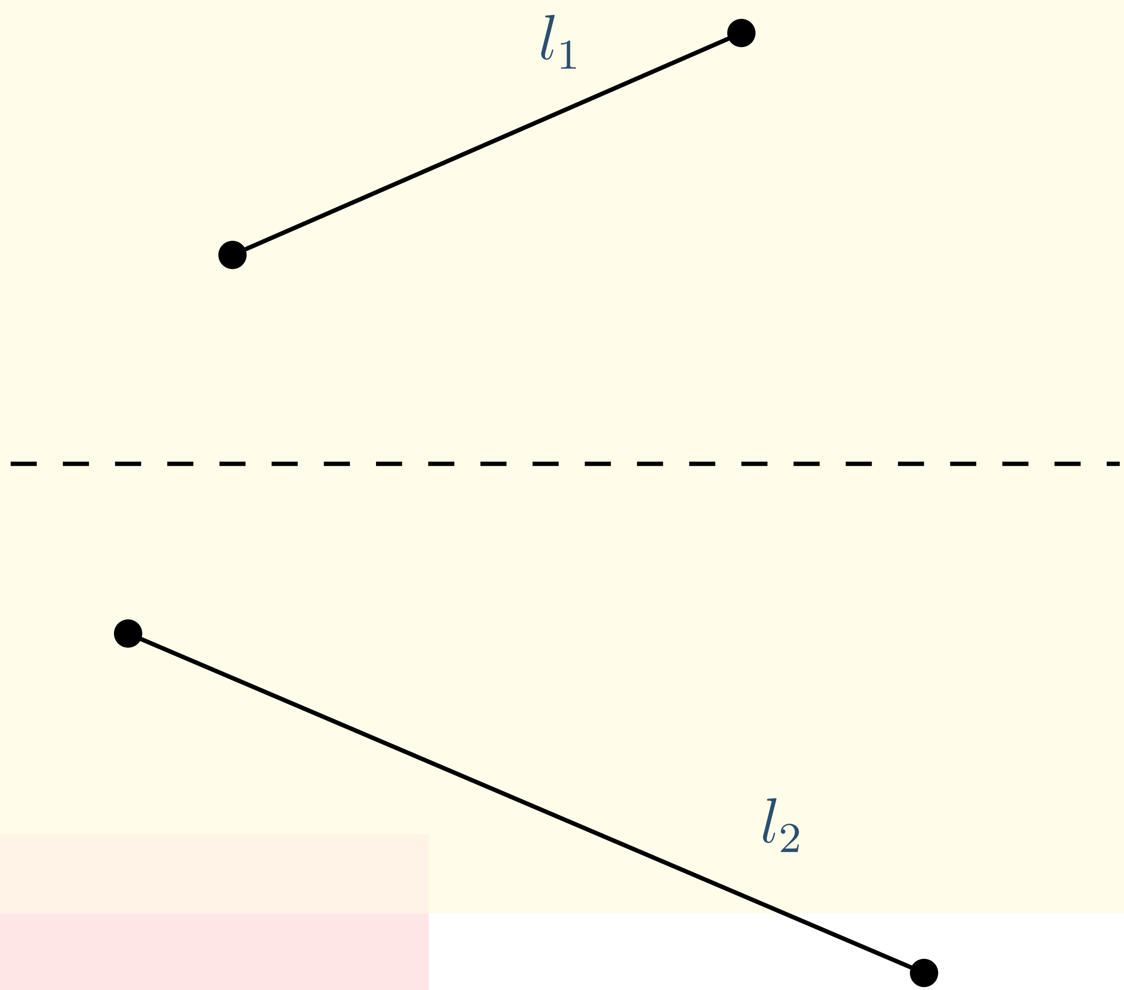


P_1 en P_2 $\longrightarrow$ zó plooien dat P_1 op P_2 terecht komt.

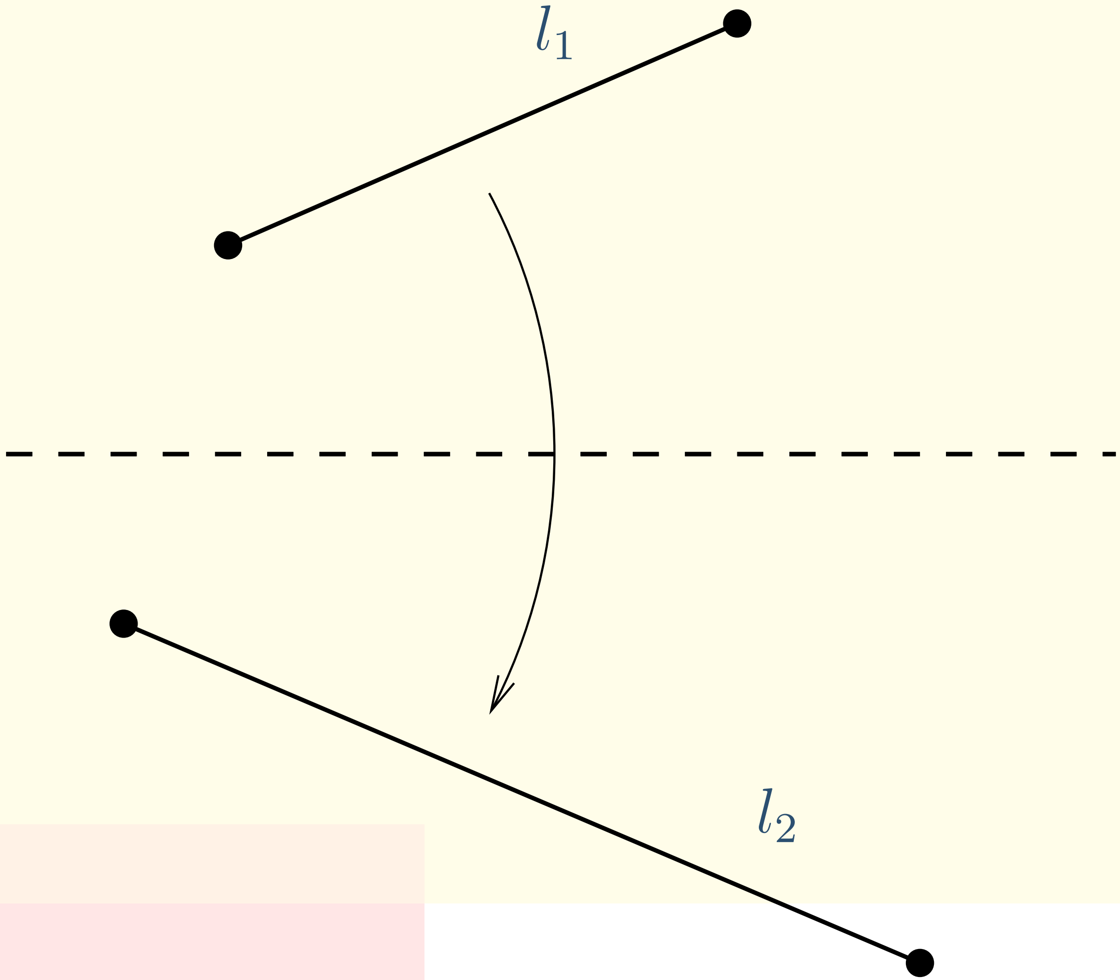
P_1 en P_2 $\longrightarrow$ zó plooien dat P_1 op P_2 terecht komt.



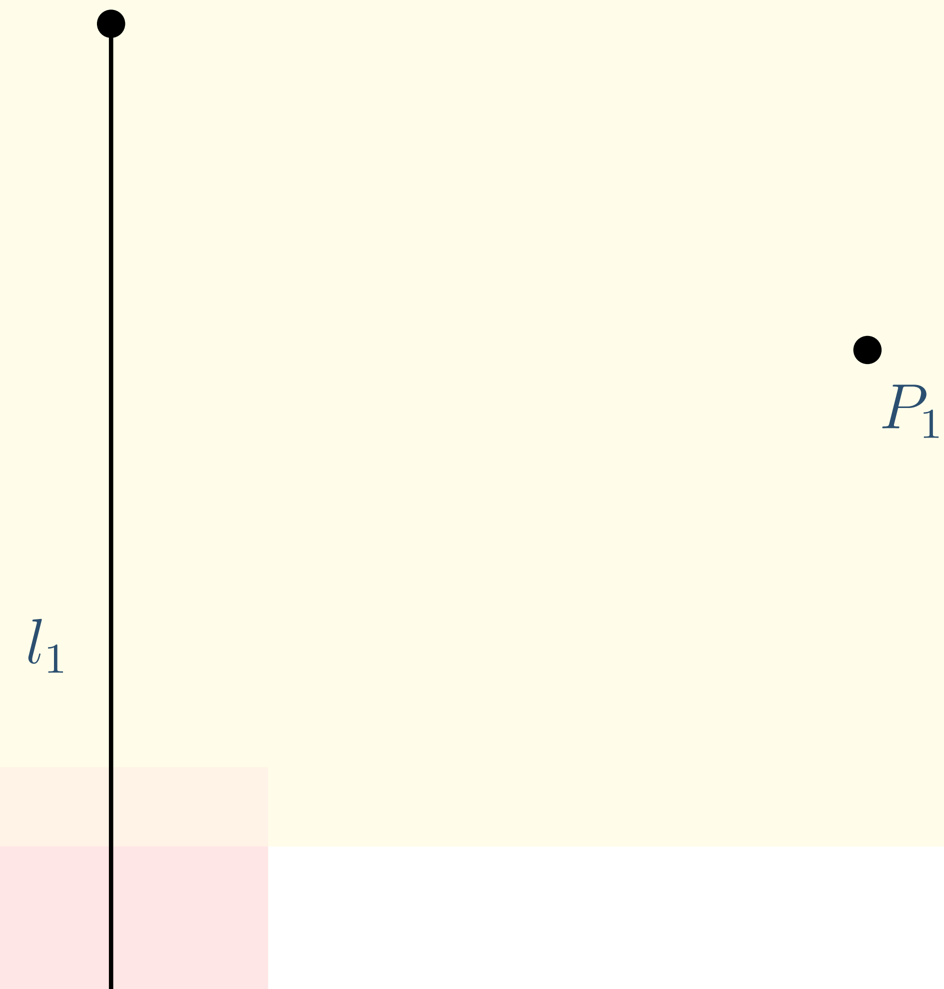
Twee rechten l_1 en l_2 $\longrightarrow$ die op elkaar vouwen.



Twee rechten l_1 en l_2 $\longrightarrow$ die op elkaar vouwen.

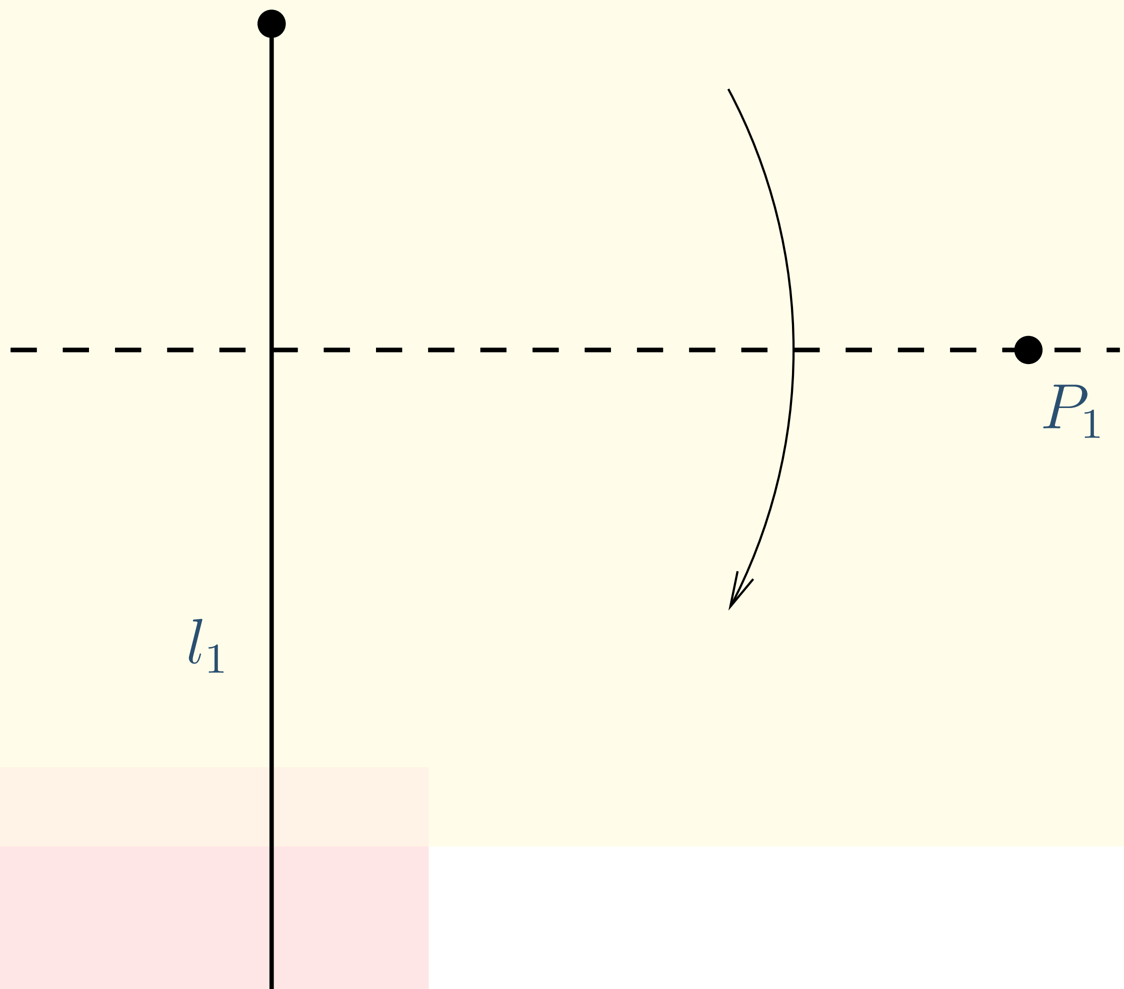


Punt P_1 en een rechte $l_1 \longrightarrow$ loodlijn op l_1 door P_1 construeren.

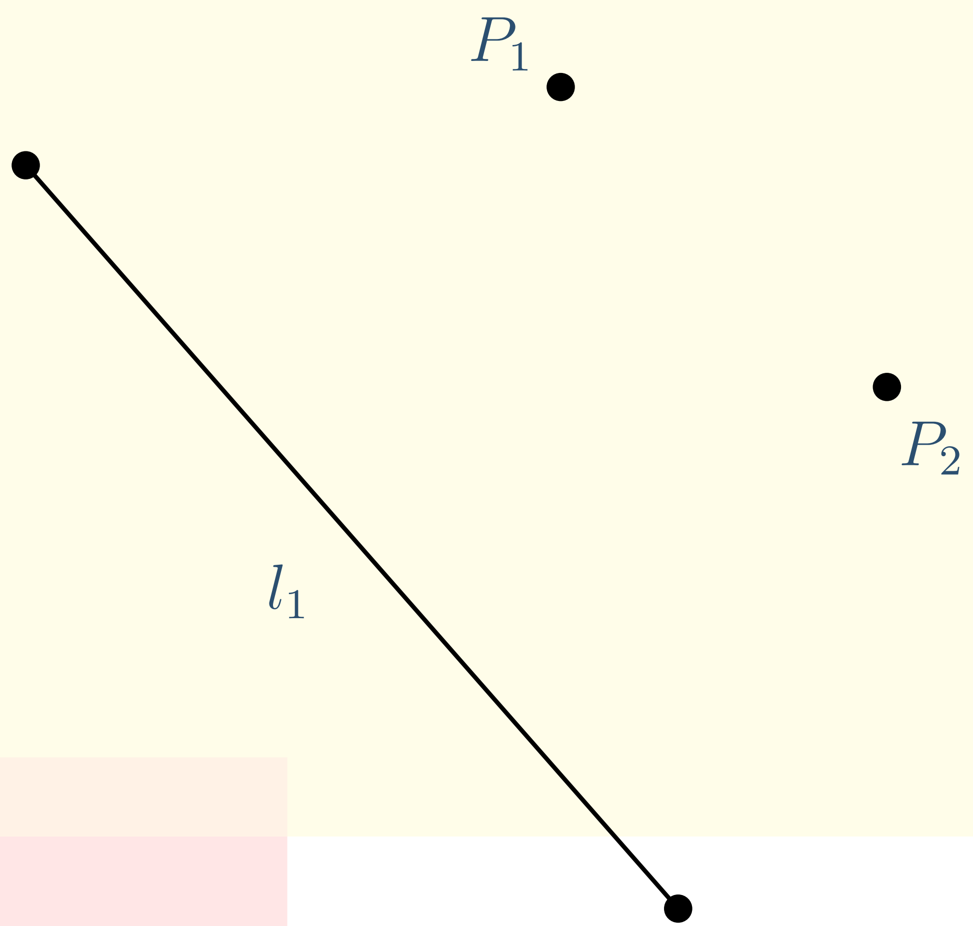


Origami axioma's

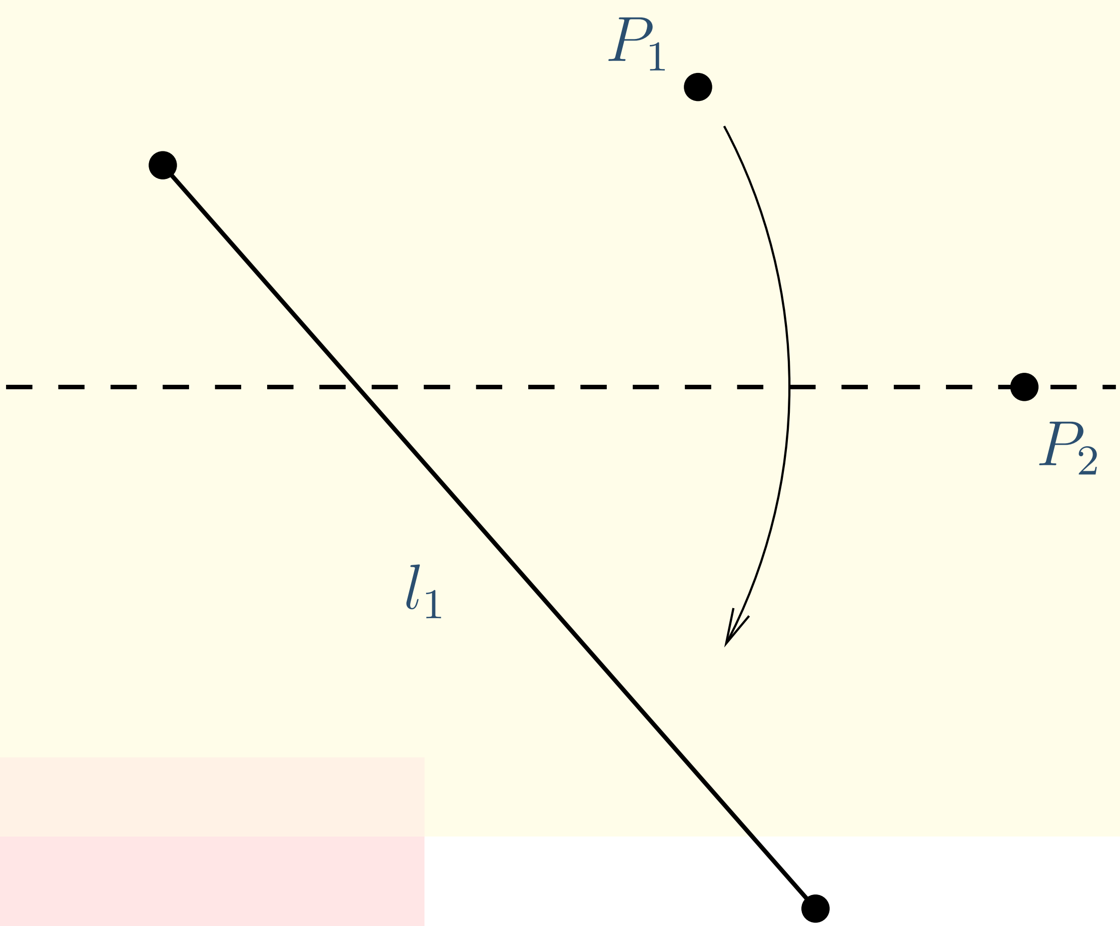
Punt P_1 en een rechte $l_1 \longrightarrow$ loodlijn op l_1 door P_1 construeren.



P_1 en P_2 samen met een rechte l_1 $\longrightarrow$ een vouw maken door P_2 zo dat P_1 op l_1 terecht komt.



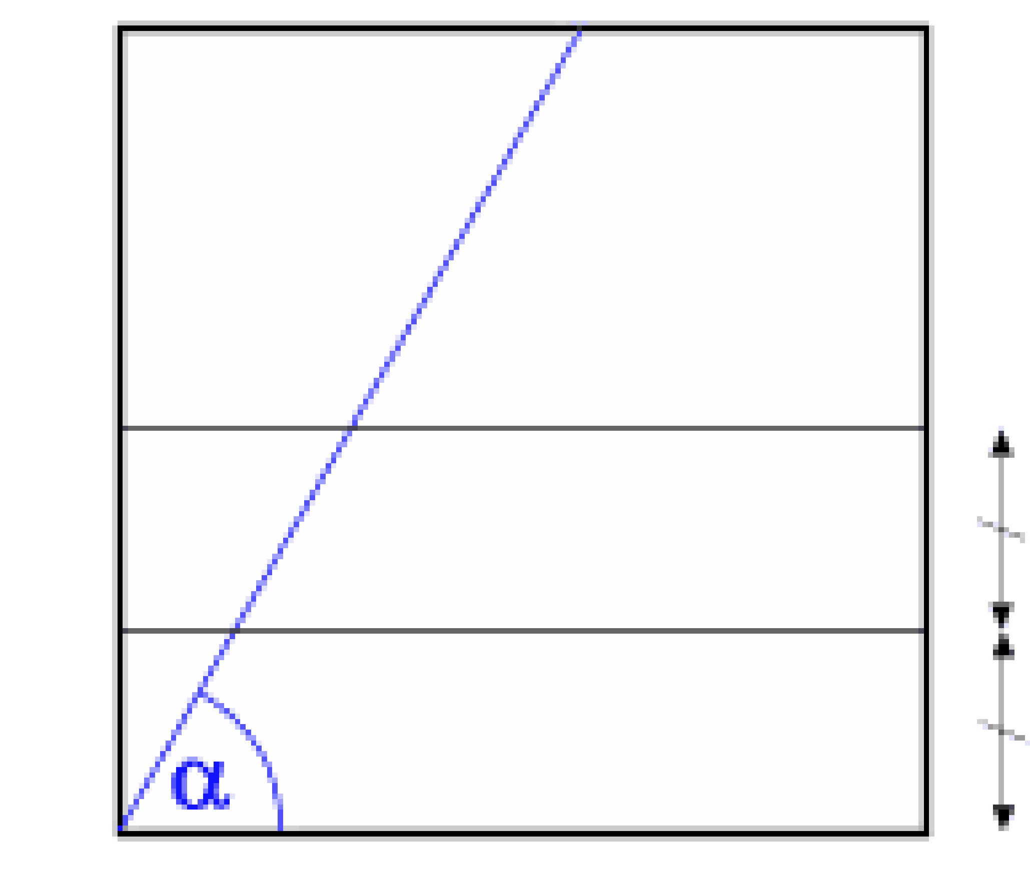
P_1 en P_2 samen met een rechte $l_1 \longrightarrow$ een vouw maken door P_2 zo dat P_1 op l_1 terecht komt.

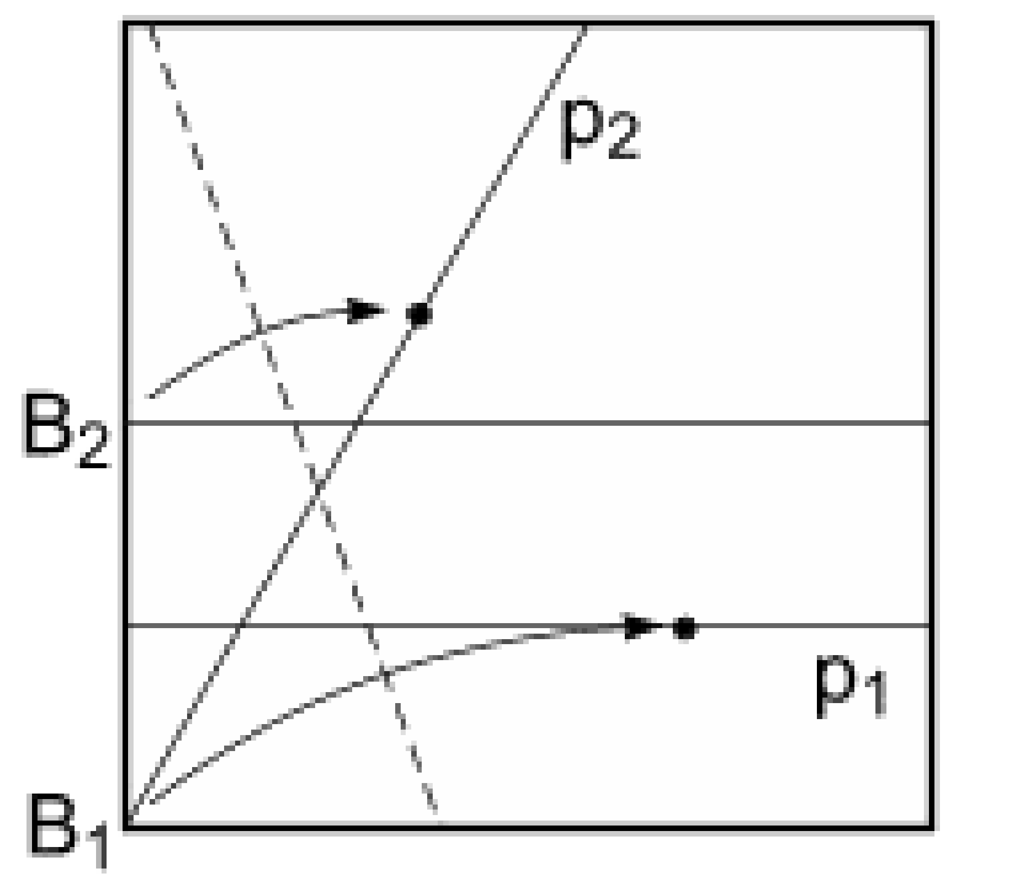


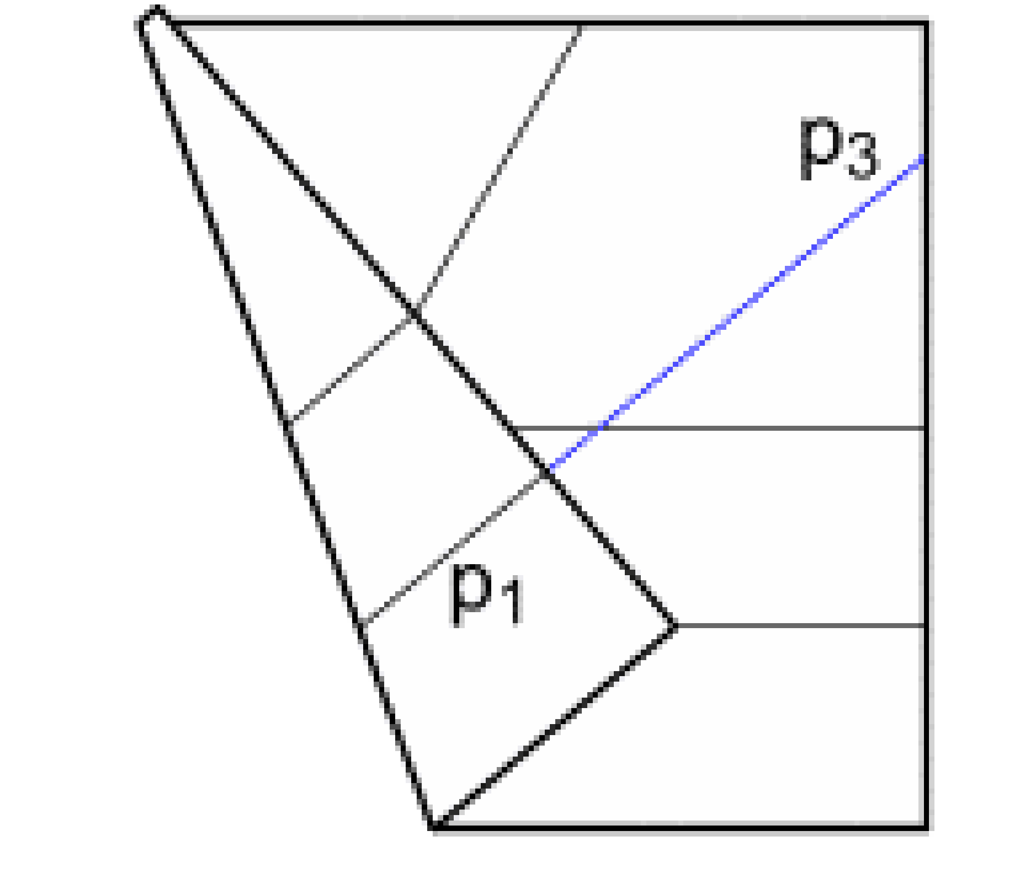
Origami axioma's

1. Twee punten $\longrightarrow$ rechte vouwen die ze verbindt.
2. P en Q $\longrightarrow$ zó plooien dat P op Q terecht komt.
3. Twee rechten l en m $\longrightarrow$ die op elkaar vouwen.
4. Punt P en een rechte l $\longrightarrow$ loodlijn op l door P construeren.
5. P en Q samen met een rechte l $\longrightarrow$ een vouw maken door Q zo dat P op l terecht komt.

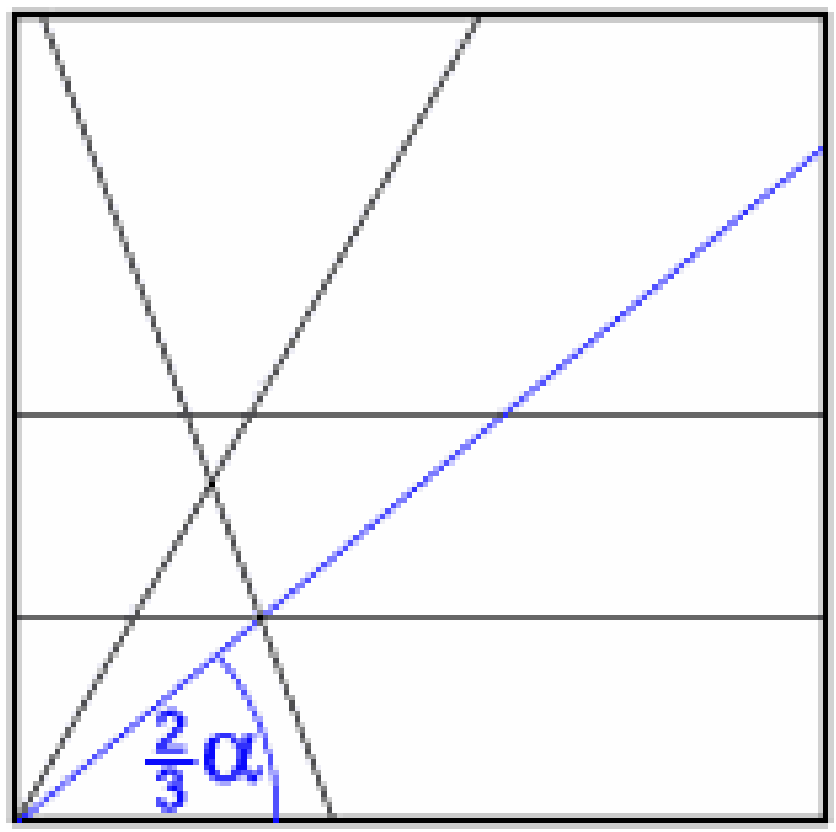
De meetkunde der spiegelingen!


α

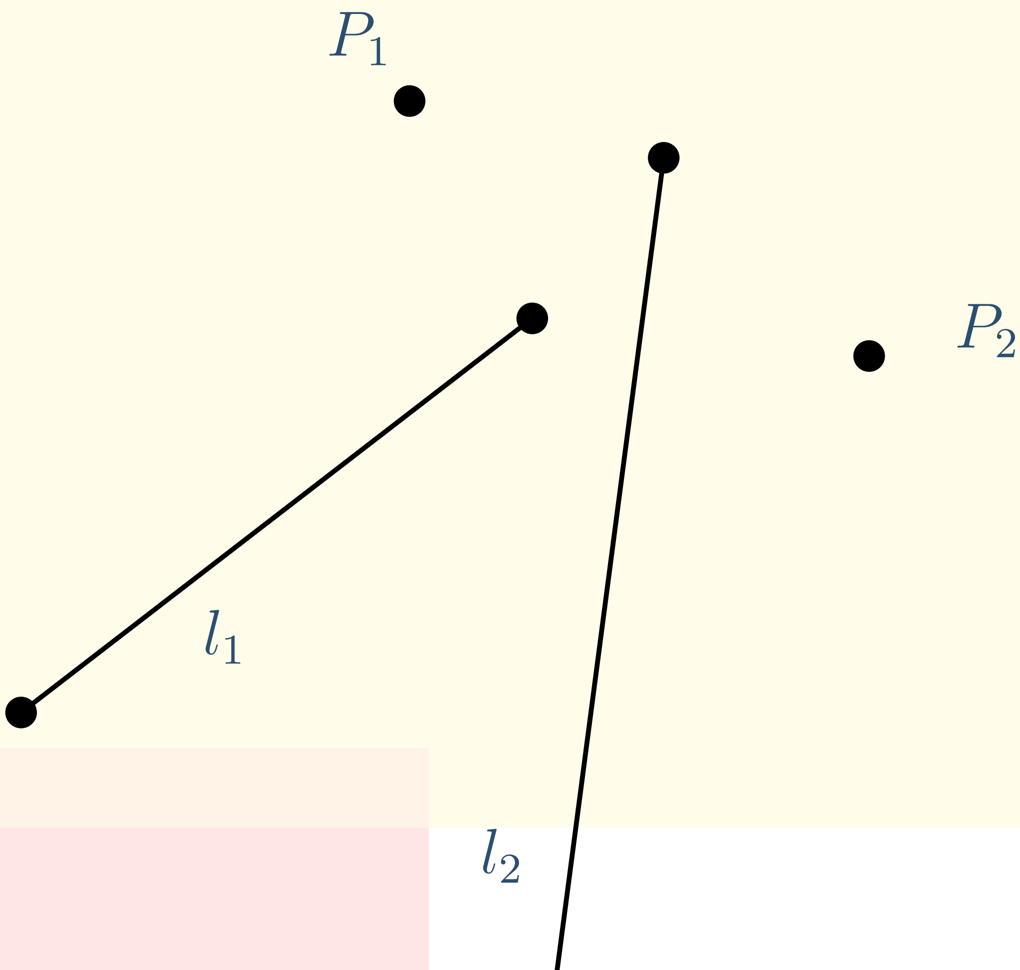

p2
B2
p1
B1



p3
p1

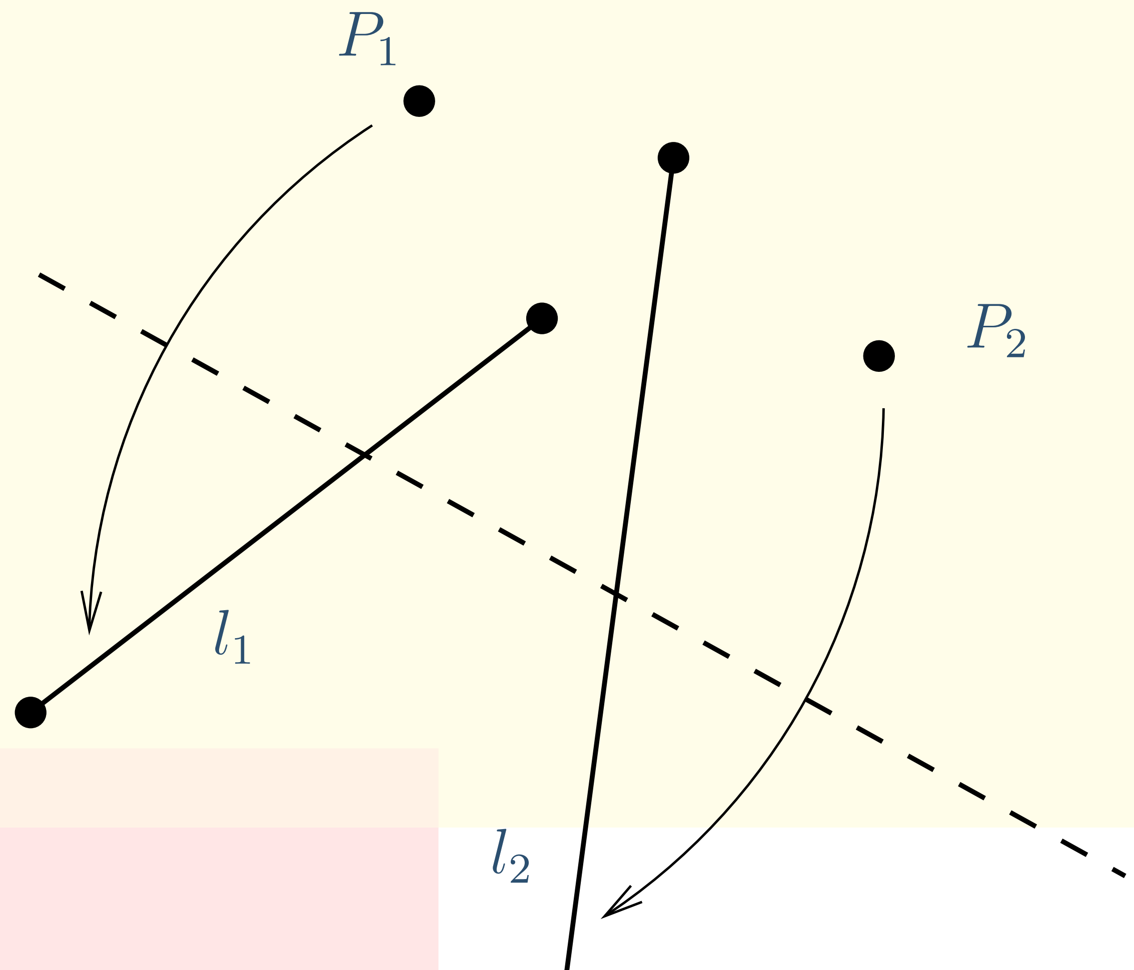

$\frac{2}{3}\alpha$

Twee punten P_1, P_2 en twee rechten $l_1, l_2 \longrightarrow$ een vouw maken zó dat P_1 op l_1 komt en P_2 op l_2.



Origami axioma's

Twee punten P_1, P_2 en twee rechten $l_1, l_2 \longrightarrow$ een vouw maken zó dat P_1 op l_1 komt en P_2 op l_2.



Zonder instrumenten ?

1. Twee punten $\longrightarrow$ rechte vouwen die ze verbindt.
2. P en Q $\longrightarrow$ zó plooien dat P op Q terecht komt.
3. Twee rechten l en m $\longrightarrow$ die op elkaar vouwen.
4. Punt P en een rechte l $\longrightarrow$ loodlijn op l door P construeren.
5. P en Q samen met een rechte l $\longrightarrow$ een vouw maken door Q zo dat P op l terecht komt.
6. Twee punten P, Q en twee rechten l, m $\longrightarrow$ een vouw maken zó dat P op l komt en Q op m.

Plooien is beter dan Euklides!

Door axioma 6 kunnen we derdegraadsvergelijkingen oplossen!

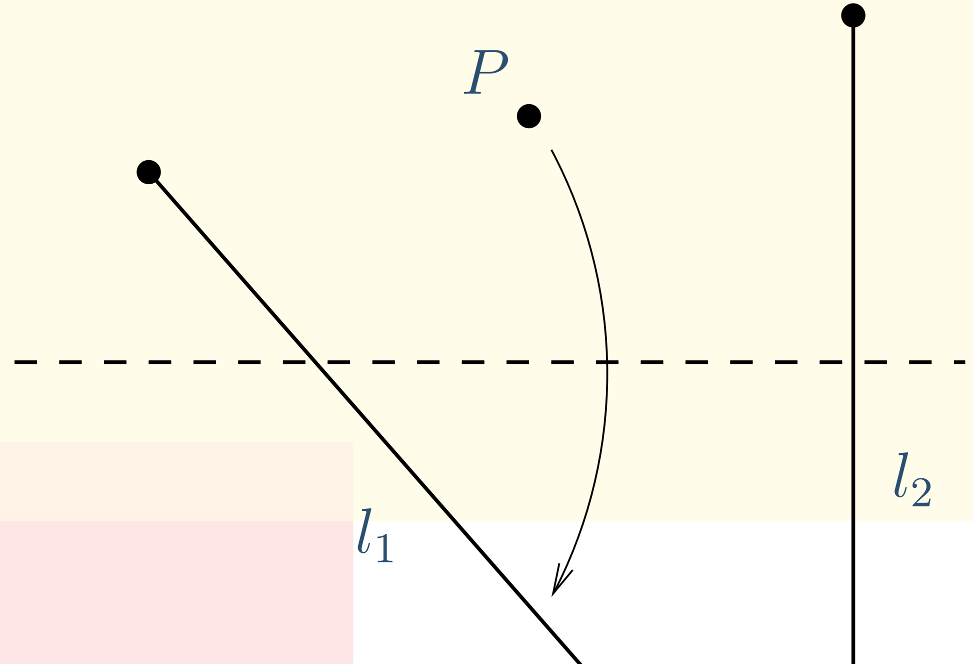
Stelling. *Met papierplooien kan je juist evenveel als met passer en geijkte liniaal.*

Plooien is beter dan Euklides!

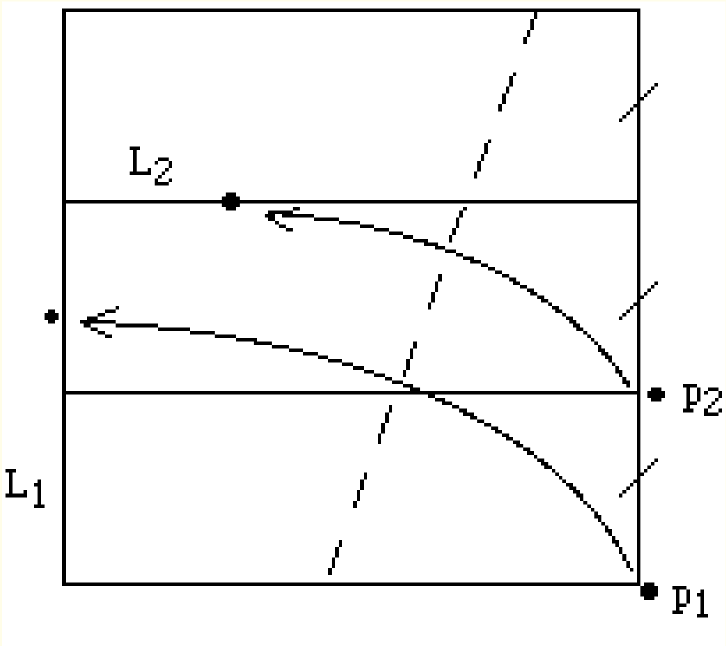
Door axioma 6 kunnen we derdegraadsvergelijkingen oplossen!

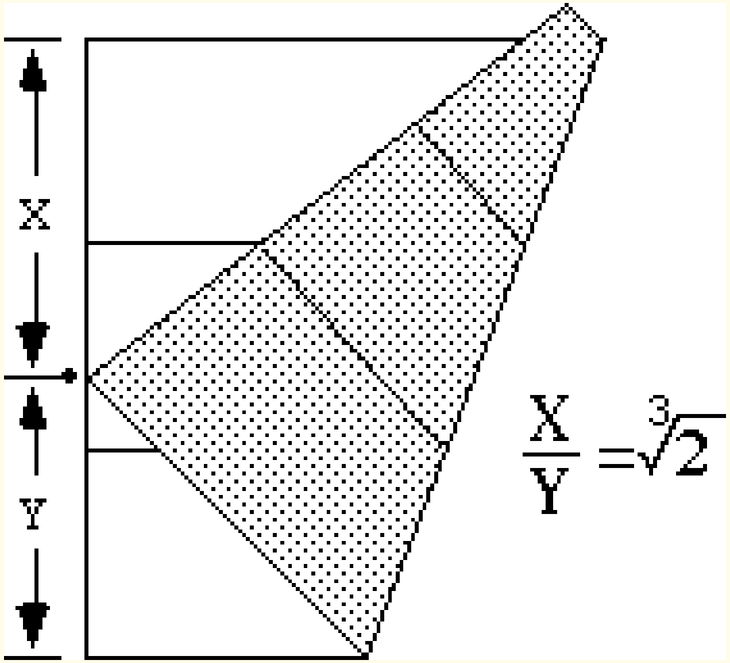
Stelling. *Met papierplooien kan je juist evenveel als met passer en geijkte liniaal.*

7de axioma : Gegeven P en l_1, l_2, kunnen we een vouw maken, loodrecht op l_2, die P afbeeldt op l_1.

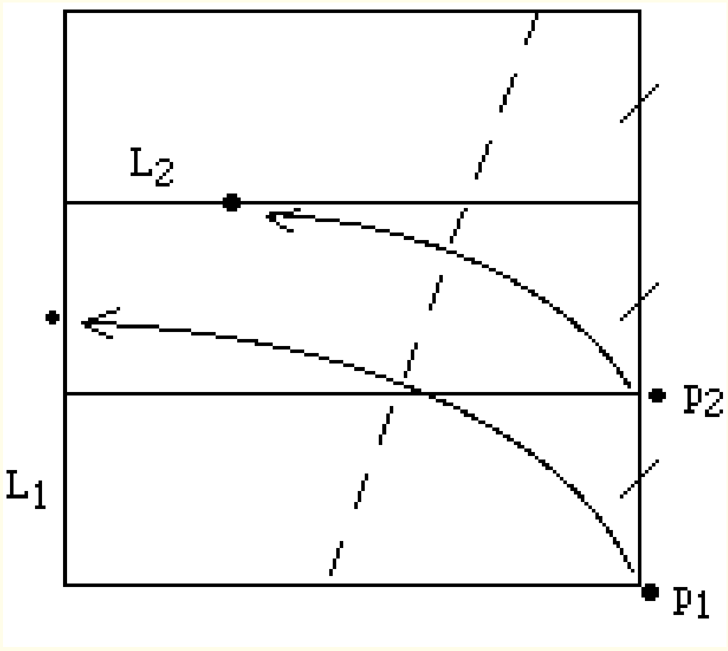


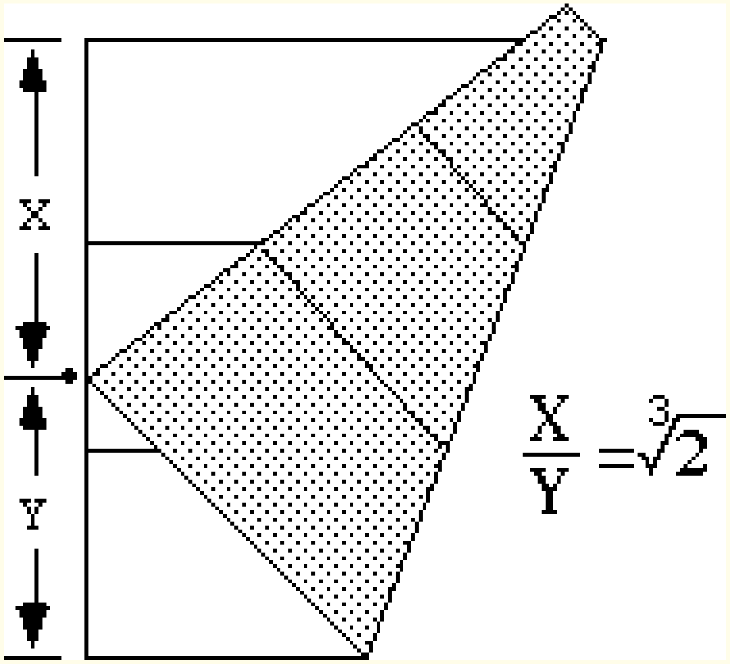
Duplicatie van de kubus

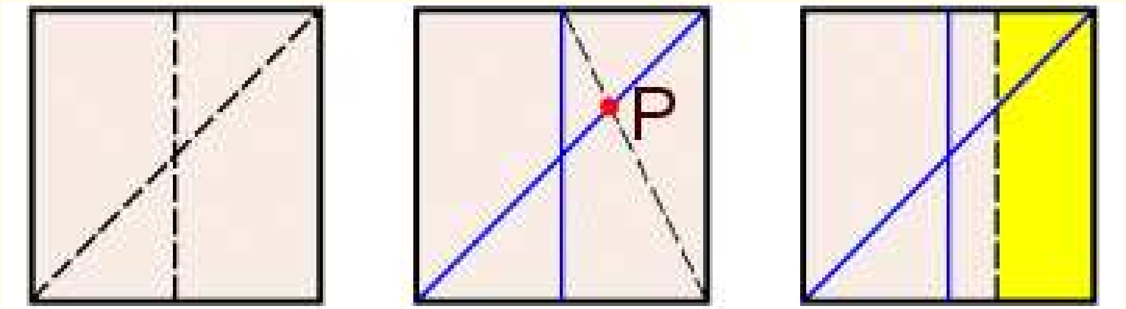




Duplicatie van de kubus







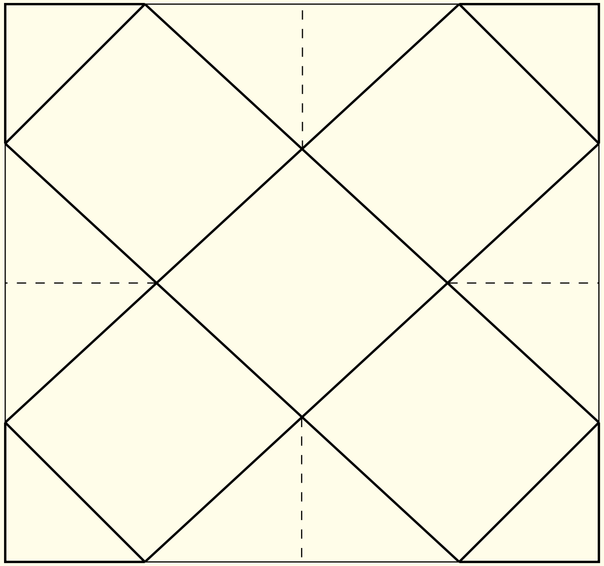
Erik Demaine

- Geboren op 28 februari 1981 in Canada.
- Werd op 20-jarige leeftijd prof op MIT.
- Uiterst multidisciplinair!
- Meer dan 100 publicaties!
- Werkt veel op gebied van origami en wiskundige veralgemeningen van vouwen.
- Houdt ook van computers.
- `http://erikdemaine.org`

Pasen

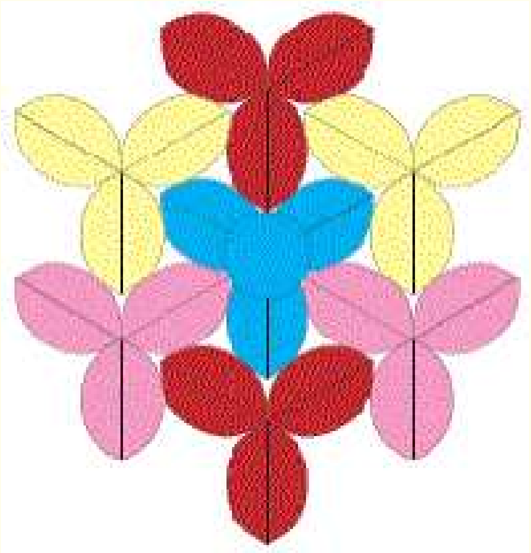
Verpakkingsprobleem

De kubus: $2\sqrt{2}z$

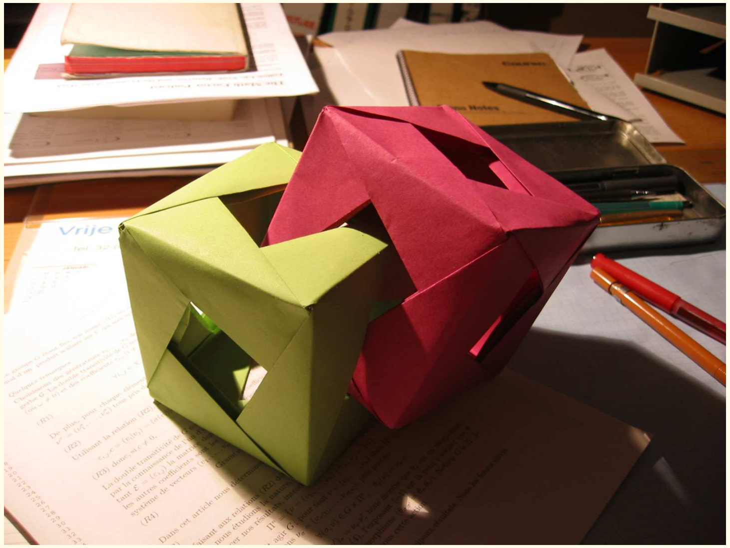


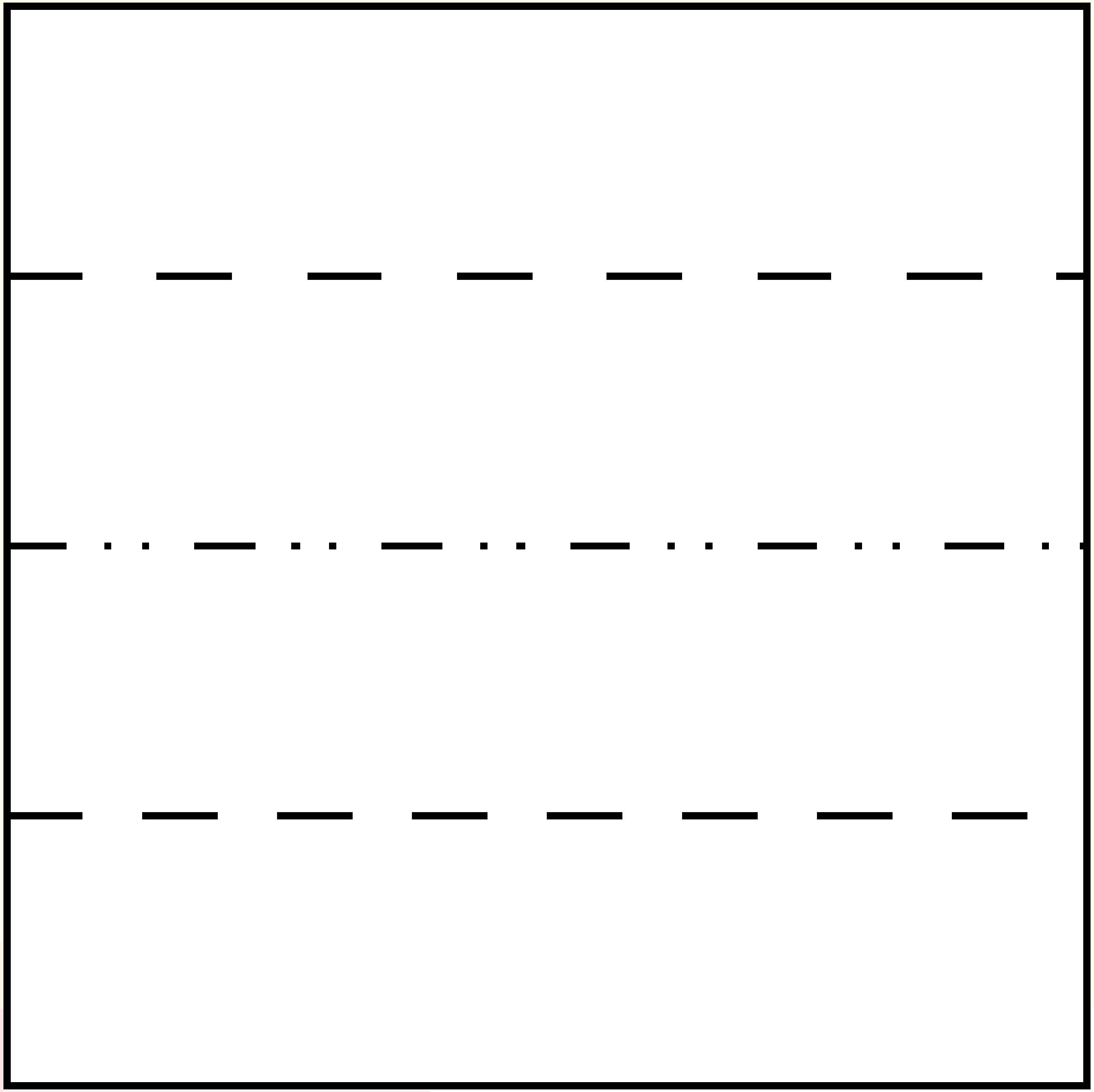
Mozartkugel $=$ eenheidssfeer

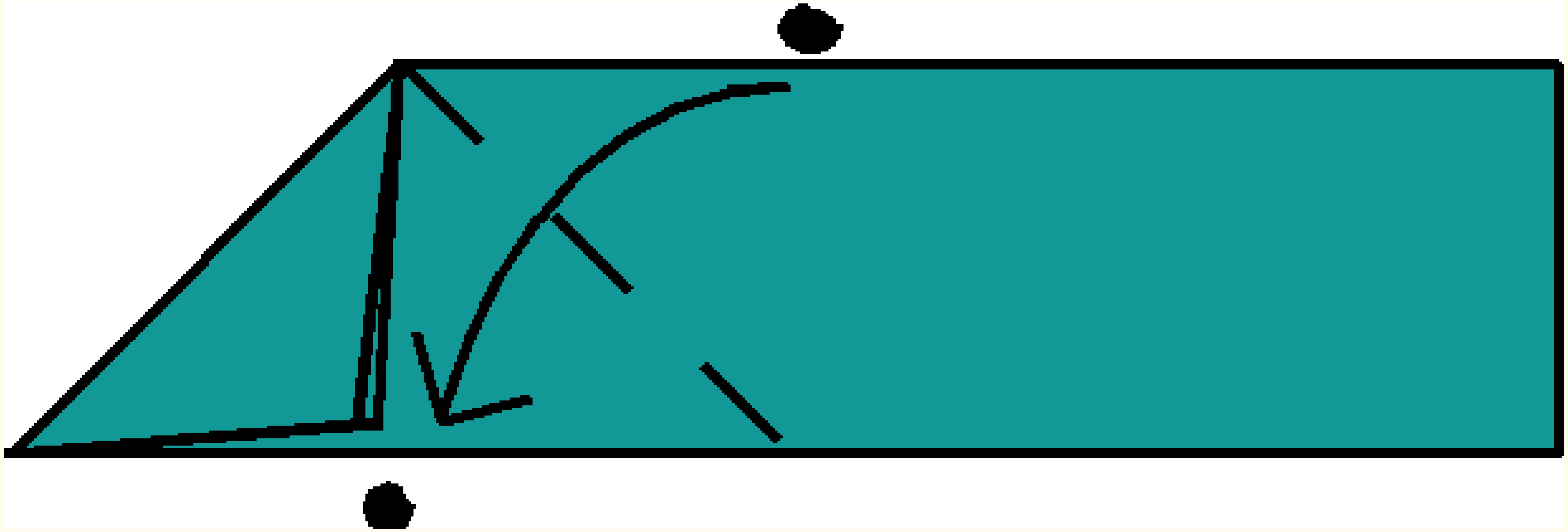
$1.6\pi^2 < 2\pi^2$

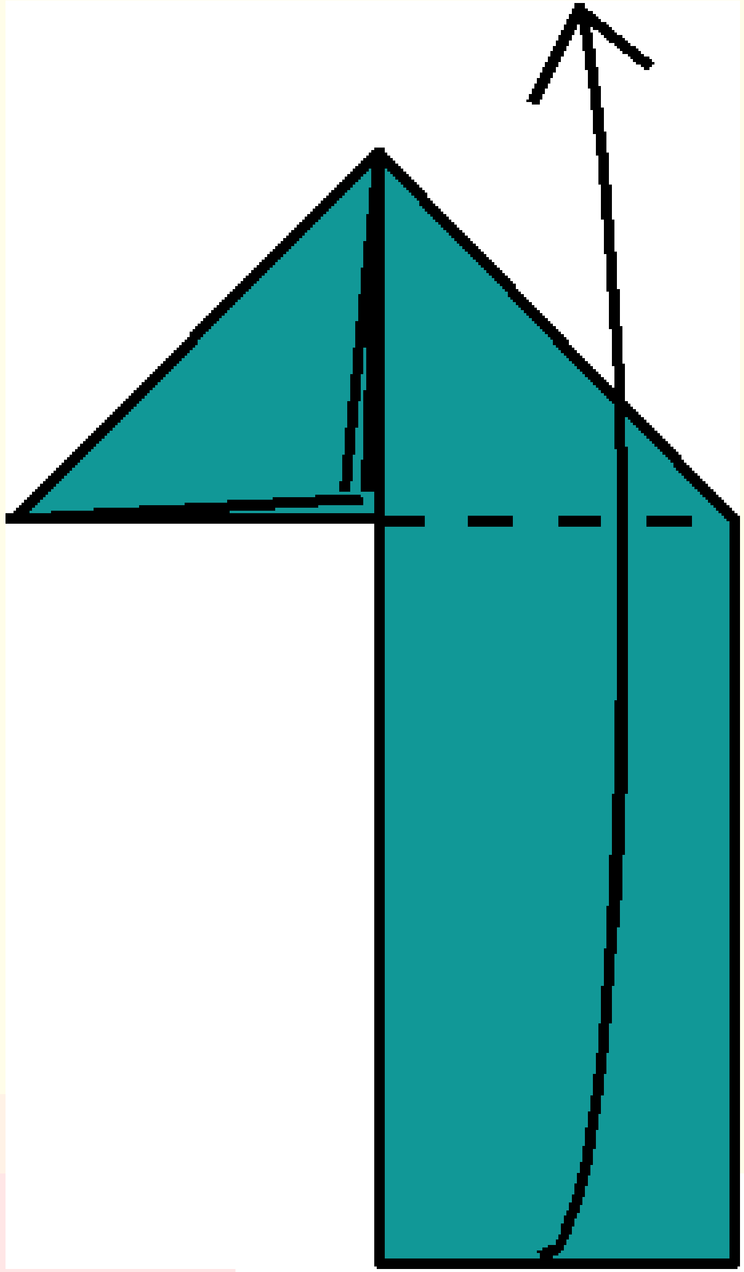


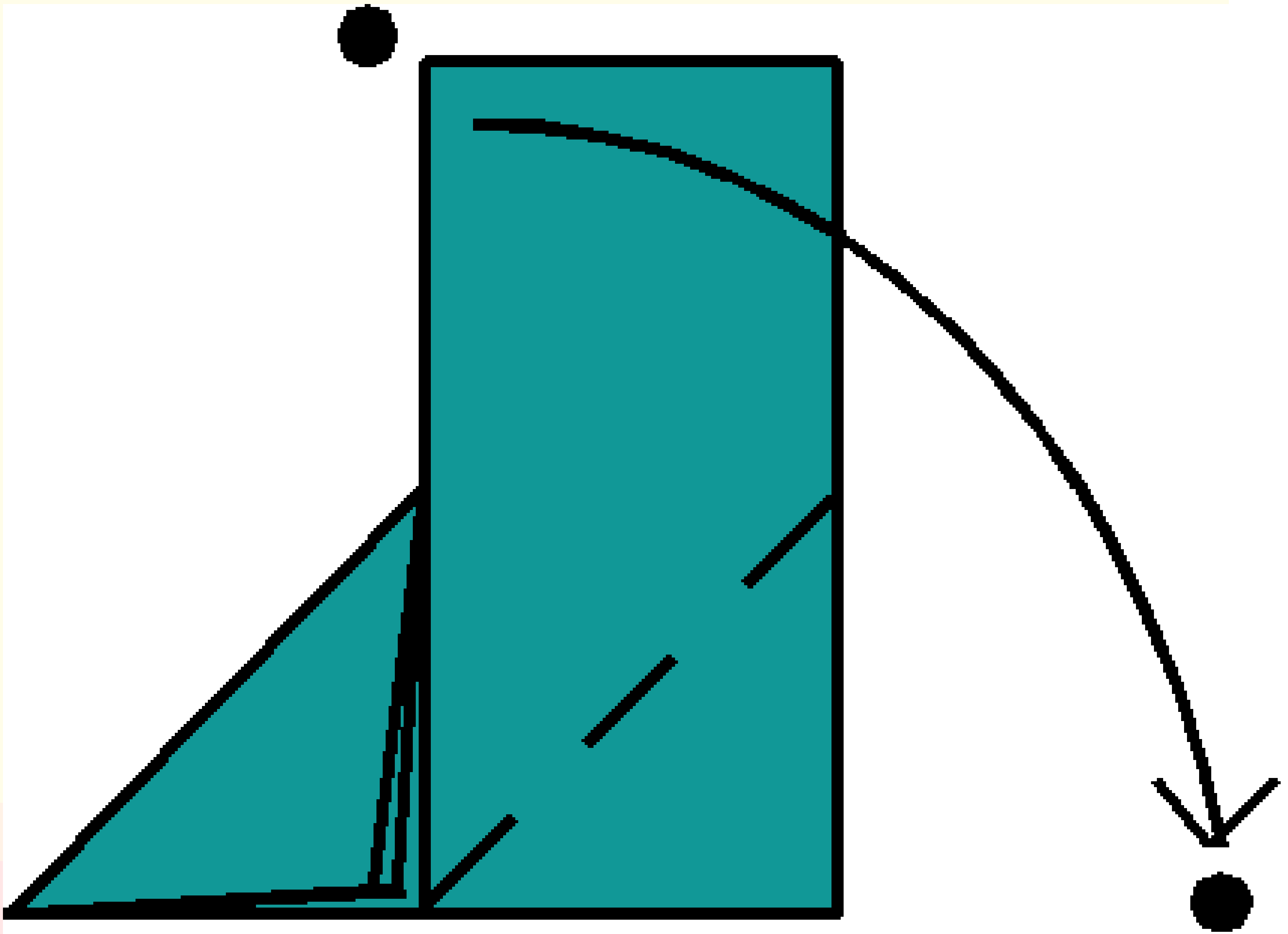
Modulaire origami

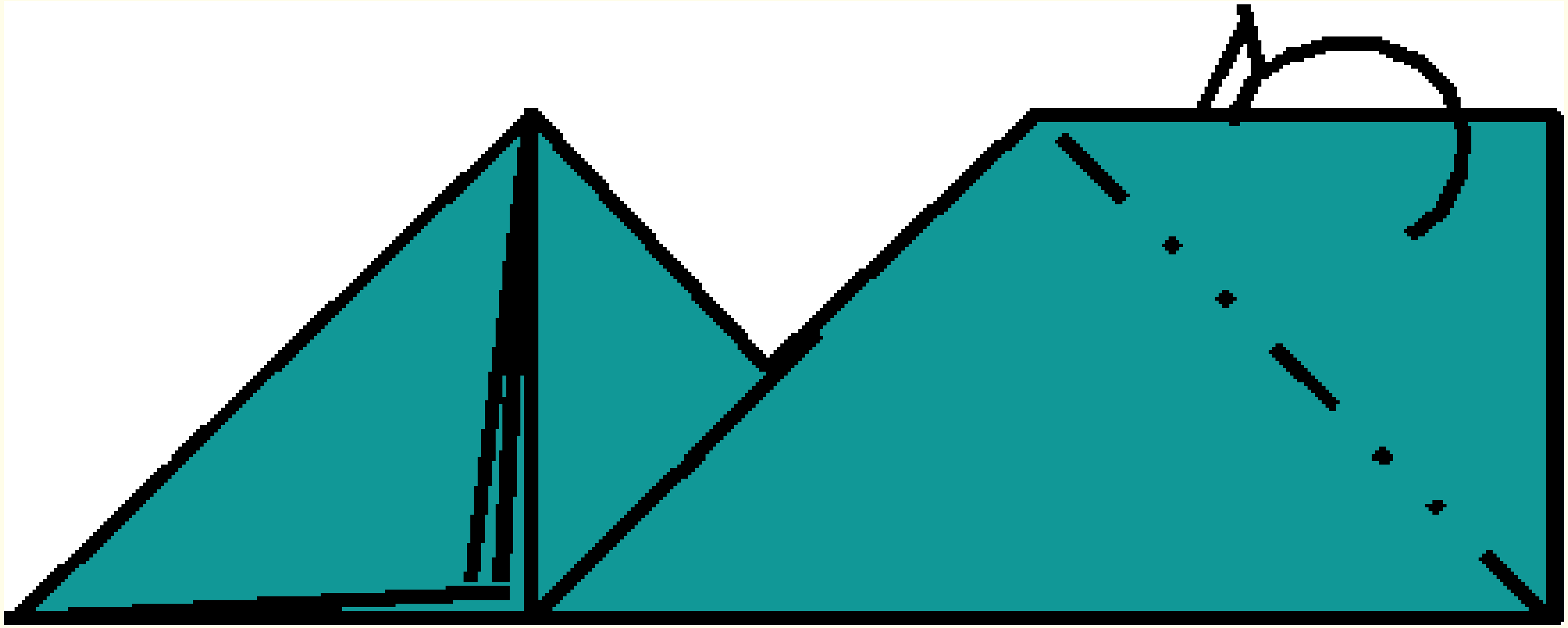




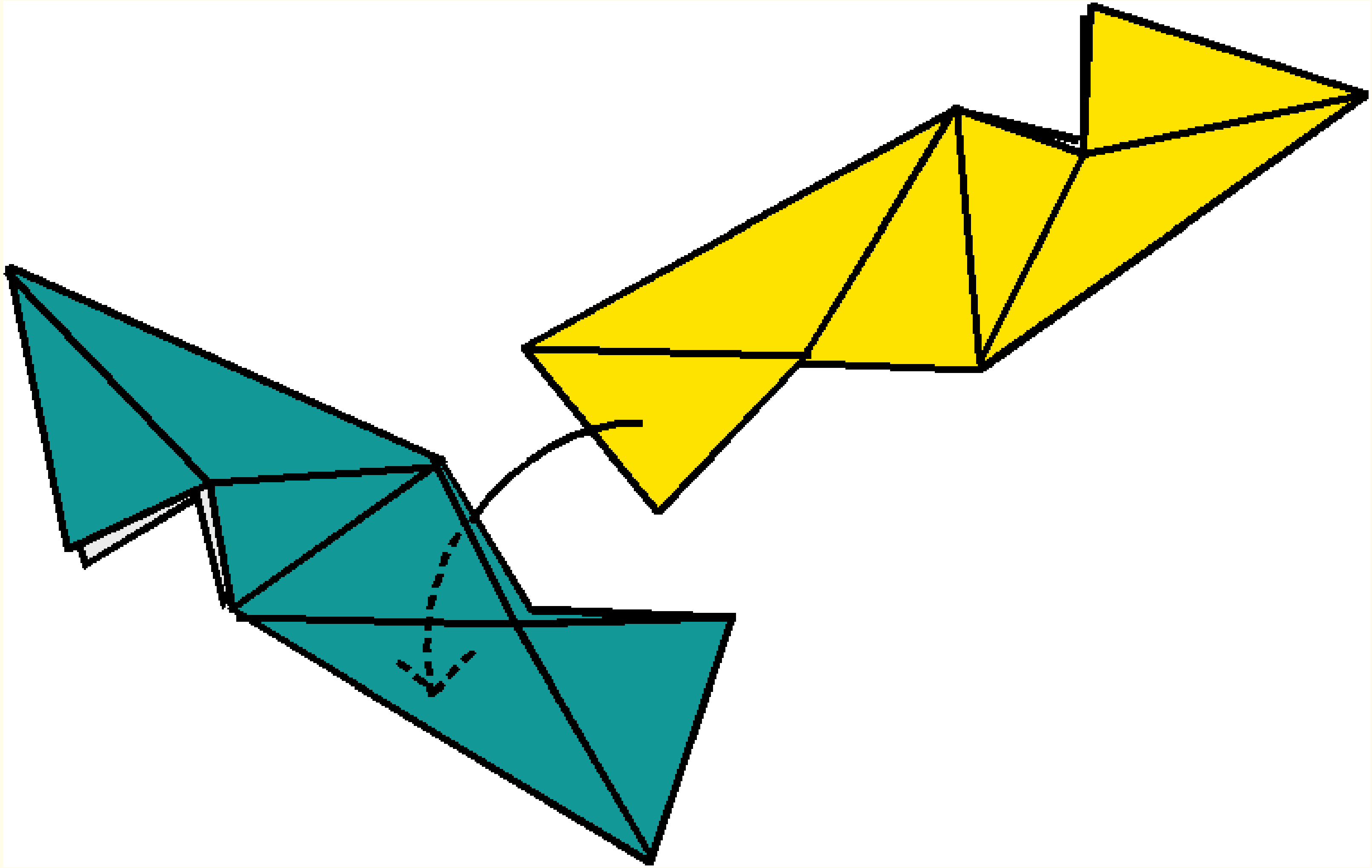


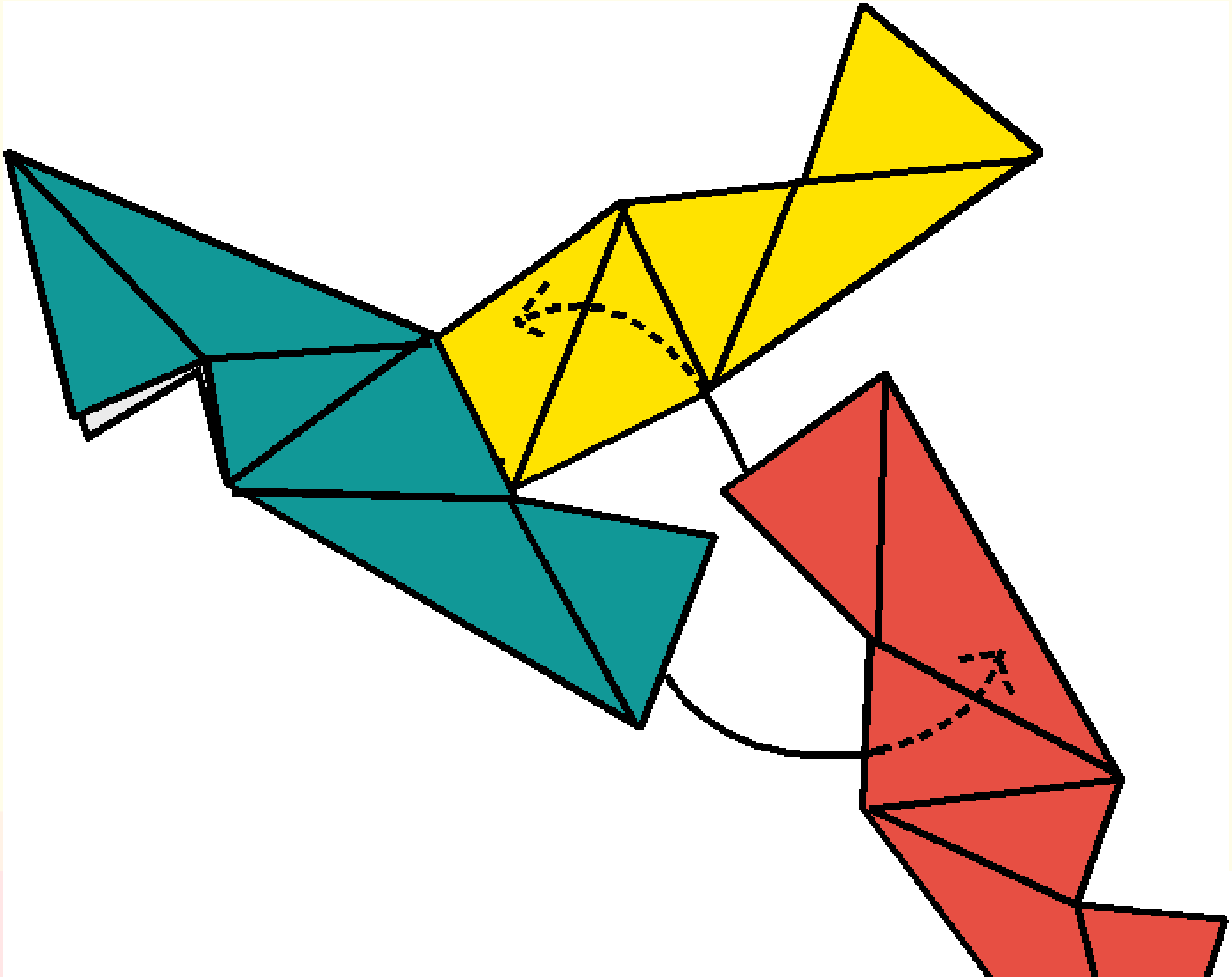






Modulaire origami





Modulaire origami