Conflictmeetkunde, dominante termen, GGD's en $1 + 1 = 1$.

Jan Stienstra
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

Nationale Wiskunde Dagen, 28+29 januari 2011

Samenvatting

We laten zien hoe het platte plaatje van de conflictverzameling van een eindige collectie punten in het vlak diepte krijgt als de grafiek van een functie **F** in twee variabelen. Ook maken we bij de puntencollectie een veelterm **V** in twee variabelen en proberen we ons een beeld te vormen van de nulpuntsverzameling. Weer zijn er conflicten: voor waarden van de variabelen waarvoor één van de termen in de veelterm te zeer domineert kan de veelterm als geheel niet de waarde 0 hebben. We maken hiervan een plaatje, dat men de 'amoebe' van **V** noemt. Deze amoebe vertoont een verrassende gelijkenis met de conflictverzameling. Niet alleen de plaatjes vertonen veel gelijkenis. Door een herinterpretatie van het symbool + in de formule voor de veelterm **V** krijgen we het functievoorschrift voor **F**. Het is deze herinterpretatie van + die sommigen 'tropisch' noemen; anderen noemen het 'dequantisatie'. En dan blijkt **1+1=1**.

Tot slot geven we aan hoe in berekeningen met Grootste Gemeenschappelijke Delers ook zo'n herintepretatie van + te zien is.

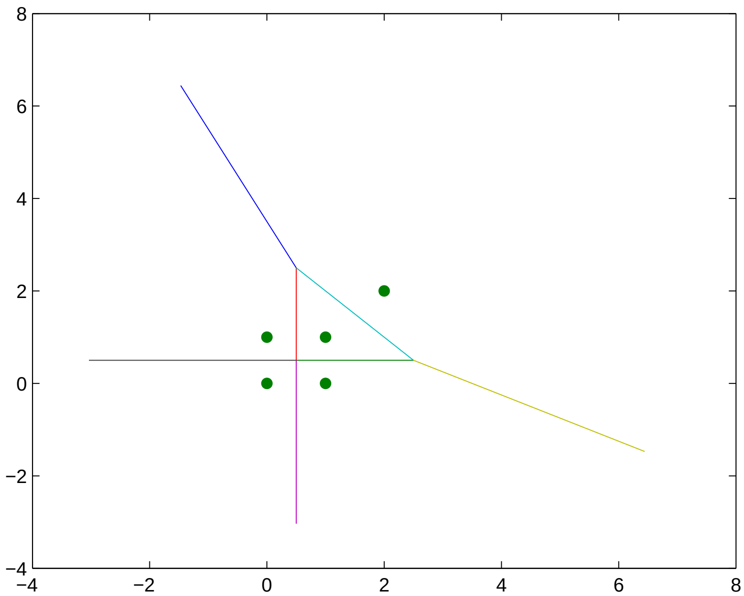
1 Conflictmeetkunde

1.1

Neem een eindige collectie **A** van punten in het (platte) vlak; laten we deze punten noemen $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_N$. De "dikke" punten in Figuur 1 vormen een voorbeeld met $N = 5$.

De **open Voronoi-cel** bij het punt A_j wordt gevormd door alle punten in het vlak waarvan de afstand tot A_j kleiner is dan de afstand tot de andere punten van de collectie **A** . Er zijn dus N Voronoi-cellen. In Figuur 1 zijn dit de vijf "witte gebieden".

De **gesloten Voronoi-cel** bij het punt A_j wordt gevormd door alle punten in het vlak waarvan de afstand tot A_j kleiner is dan of gelijk is aan de afstand tot de andere punten van de collectie **A** . In Figuur 1 zijn dit de "witte gebieden" samen met hun "randen".



Figuur 1: *5 punten, hun Voronoi-cellen en conflictverzameling*

De **conflictverzameling van A** (vaak ook het **Voronoi diagram van A** genoemd) wordt gevormd door alle punten in het vlak die in minstens twee gesloten Voronoi-cellen liggen. In Figuur 1 is dat de vereniging van alle lijnstukken en halve lijnen.

1.2 Tekenen

Het is al sinds de tijd van Euclides (ca. 300 v.C.) bekend dat de conflictverzameling van twee punten A_1 en A_2 samenvalt met de **middenloodlijn van** A_1 **en** A_2; d.w.z. de lijn die gaat door het midden van het lijnstuk tussen A_1 en A_2 en loodrecht staat op dit lijnstuk. Daarom zijn ook in een conflictverzameling bij meer dan twee punten de lijnstukken delen van middenloodlijnen; zie weer Figuur 1.

Met die klassieke meetkunde-stelling kan men een conflictverzameling stapje voor stapje opbouwen. Uit de klassieke Griekse meetkunde is bekend hoe men de middenloodlijn van twee punten kan tekenen met een passer en een liniaal (en een potlood). De *liefhebber van klassieke meetkunde* bespeurt nu wellicht de uitdaging om ook ingewikkelder conflictverzamelingen te tekenen met alleen deze gereedschappen, plus een gummetje om overbodige stukken van middenloodlijnen weer uit te gummen.

1.3 Tekenen wordt Rekenen

De moderne, vaak gehaaste mens gunt zich waarschijnlijk niet de tijd om tekeningen te maken met passer, liniaal, potlood en gummetje. Die wil de conflictverzameling meteen op een computerscherm zien. Googlen met trefwoord “voronoi diagram” (werkt beter dan “conflictverzameling”) levert al gauw een paar computerprogrammaatjes waarmee snel een Voronoi diagram (= conflictverzameling) op het scherm kan worden getoverd.

Dat we tegenwoordig veel meetkundige vragen snel kunnen oplossen door te rekenen werd mogelijk gemaakt door **Descartes’ uitvinding van coordinaten**. Een **coordinaatstelsel** bestaat uit twee lijnen (de **coordinaatassen**), het snijpunt van die lijnen (de **oorsprong**) en op elke lijn een ander punt, waarmee dan de richting en afstandsmaat langs de coordinaatassen worden vastgelegd. Vaak gebruikt men coordinaatassen die **loodrecht op elkaar** staan en neemt men de extra punten op **afstand 1** van de oorsprong. Ieder punt in het vlak wordt dan gegeven door twee getallen, **de coordinaten van dat punt**. Zo zijn de coordinaten van de vijf punten in Figuur 1: $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(2,2)$.

Een lijn wordt gegeven door een vergelijking waaraan de coordinaten van alle punten op de lijn voldoen. Voor de middenloodlijn van de punten (a_1, b_1) en (a_2, b_2) kan men de vergelijking als volgt afleiden uit de beschrijving van de middenloodlijn als conflictverzameling:

*De afstand van een punt (x, y) tot het punt (a_1, b_1) kan worden berekend door de **Stelling van Pythagoras** toe te passen op de driehoek met hoekpunten (x, y), (a_1, b_1) en (x, b_1). De afstand van (x, y) tot (a_1, b_1) is dus gelijk aan:*

$$\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2}\,.$$

Bijgevolg ligt een punt (x, y) op de middenloodlijn van de punten (a_1, b_1) en (a_2, b_2) dan en slechts dan als:

$$\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2} \;=\; \sqrt{(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2}.$$

Door beide leden van deze vergelijking te kwadrateren en vervolgens met $\frac{1}{2}$ te vermenigvuldigen vinden we

$$\tfrac{1}{2}((x-a_1)^2 + (y-b_1)^2) \;=\; \tfrac{1}{2}((x-a_2)^2 + (y-b_2)^2).$$

oftewel

$$\tfrac{1}{2}x^2 - a_1x + \tfrac{1}{2}a_1^2 + \tfrac{1}{2}y^2 - b_1y + \tfrac{1}{2}b_1^2 \;=\; \tfrac{1}{2}x^2 - a_2x + \tfrac{1}{2}a_2^2 + \tfrac{1}{2}y^2 - b_2y + \tfrac{1}{2}b_2^2$$

*Dit kunnen we uiteindelijk omschrijven tot de **vergelijking voor de middenloodlijn** van de punten (a_1, b_1) en (a_2, b_2):*

$$(a_1 - a_2)\,x \;+\; (b_1 - b_2)\,y \;=\; \tfrac{1}{2}(a_1^2 - a_2^2 + b_1^2 - b_2^2)$$

Figuur 1, bijvoorbeeld, laat stukken zien van vijf middenloodlijnen met respectievelijke vergelijkingen:

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2} \\ y &= \tfrac{1}{2} \\ x+y &= 3 \\ x+2y &= \tfrac{7}{2} \\ 2x+y &= \tfrac{7}{2} \end{aligned}$$

Met de vergelijkingen van al die middenloodlijnen zijn we er nog niet, als we de conflictverzameling willen beschrijven. We moeten, immers, ook nog uitzoeken welke stukken van die middenloodlijnen wel in de conflictverzameling zitten en welke stukken niet. We gaan echter niet verder met die middenloodlijnen, maar geven het verhaal een nieuwe wending door naar de gesloten Voronoi-cellen te kijken.

1.4 Een nieuwe dimensie

Laat de punten in verzameling $\mathbf{A} = \{A_1, \ldots, A_N\}$ in termen van coordinaten worden gegeven als $A_i = (a_i, b_i)$ voor $i = 1, 2, \ldots, N$. Het punt (x, y) ligt dan in de gesloten Voronoi-cel bij het punt A_j precies dan als

$$\sqrt{(x-a_j)^2 + (y-b_j)^2} \;\leq\; \sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}\,. \tag{1}$$

geldt voor $i = 1, 2, \ldots, N$.

Omdat beide leden van deze ongelijkheden ≥ 0 zijn, mogen we beide leden kwadrateren en met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigen. Dat levert het volgende stelsel ongelijkheden, equivalent met (1): voor $i = 1, 2, \ldots, N$ is

$$\tfrac{1}{2}((x-a_j)^2 + (y-b_j)^2) \;\leq\; \tfrac{1}{2}((x-a_i)^2 + (y-b_i)^2)$$

Hierin vermenigvuldigen we de kwadraten verder uit en trekken we van linker- en rechterlid $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ af. Bovendien schrijven we om de overzichtelijkheid te verbeteren:

$$c_i = -\tfrac{1}{2}(a_i^2 + b_i^2) \qquad \text{voor} \quad i = 1, 2, \ldots, N\,. \tag{2}$$

Daarmee vinden we dan het volgende stelsel ongelijkheden, nog steeds equivalent met (1):

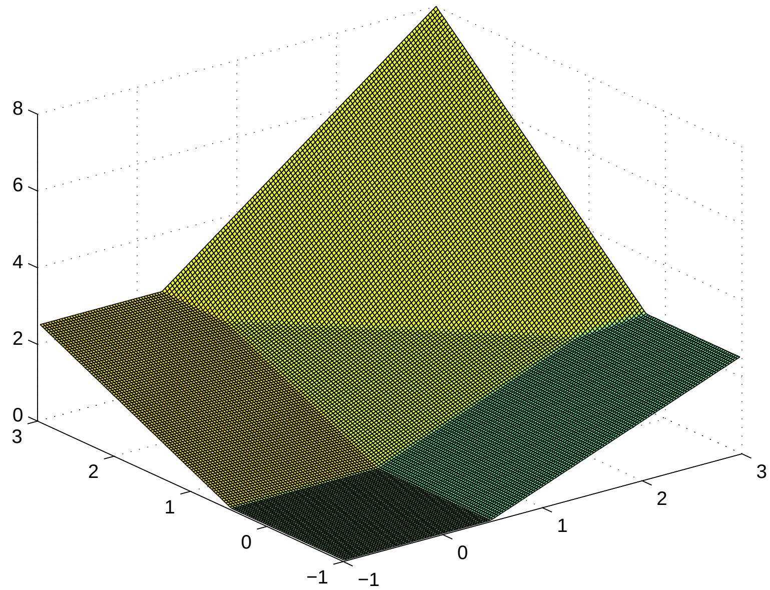
$$a_j x + b_j y + c_j \;\geq\; a_i x + b_i y + c_i$$

voor $i = 1, 2, \ldots, N$.

De nieuwe wending in ons verhaal komt wanneer we de notatie introduceren

$$F(x,y) \;=\; \max\{a_i x + b_i y + c_i \mid i = 1, 2, \ldots, N\}\,, \tag{3}$$

d.w.z. $F(x, y)$ is, bij gegeven (x, y), het grootste van de getallen $a_1 x + b_1 y + c_1$, $a_2 x + b_2 y + c_2, \ldots, a_N x + b_N y + c_N$.



Figuur 2: *grafiek van de functie F(x,y)*

Daarmee kunnen we onze voorgaande overwegingen samenvatten als

> Het punt (x, y) ligt in de gesloten Voronoi-cel bij het punt A_j precies dan als
> $$a_j x + b_j y + c_j \; = \; F(x, y) \tag{4}$$

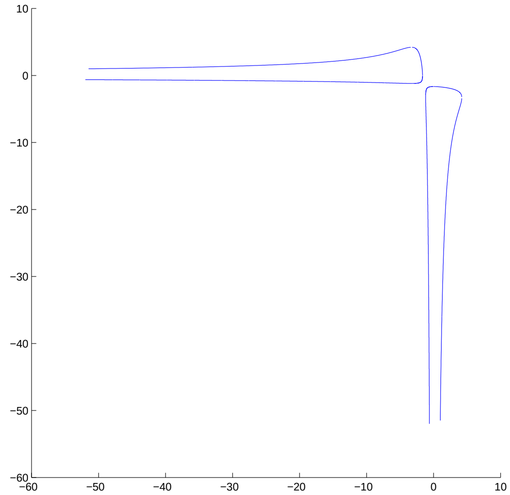
Formule (3) kunnen we lezen als een voorschrift waarmee een functie F op de twee-dimensionale ruimte $\mathbb{R}^2$ wordt gedefinieerd. Van deze functie bekijken we nu de grafiek. Die ligt in de drie-dimensionale ruimte $\mathbb{R}^3$ en wordt gevormd door alle punten (x, y, z) waarvoor geldt:

$$z = F(x, y)\,. \tag{5}$$

Als van het punt (x, y, z) op die grafiek de projectie (x, y) in $\mathbb{R}^2$ in de gesloten Voronoi-cel bij het punt A_j valt kunnen we de Vergelijkingen (4) en (5) combineren tot

$$z \; = \; a_j x + b_j y + c_j\,. \tag{6}$$

In (6) herkennen we de vergelijking van een vlak in $\mathbb{R}^3$. Alleen dat stuk van dit vlak dat boven de gesloten Voronoi-cel bij het punt A_j ligt is een deel van de grafiek van de functie F. Zo zien we:



Figuur 3: *reële nulpunten van de functie V(X,Y)*

De grafiek van de functie F wordt gevormd door vlakke stukjes die precies projecteren op de gesloten Voronoi-cellen. Waar twee van die vlakke stukjes bij elkaar komen vertoont de grafiek van F een knik. De projectie van al die knikken in de grafiek van F is de conflictverzameling bij de punten collectie **A**

Voorbeeld: Laten we het voorgaande concreet illustreren met de punten collectie **A** uit Figuur 1:

$$A_1 = (0,0)\,,\; A_2 = (1,0)\,,\; A_3 = (0,1)\,,\; A_4 = (1,1)\,,\; A_5 = (2,2)$$

en

$$F(x,y) \;=\; \max\{0\,,\; x - \tfrac{1}{2}\,,\; y - \tfrac{1}{2}\,,\; x + y - 1\,,\; 2x + 2y - 4\}\,. \tag{7}$$

Figuur 2 toont de grafiek van deze functie.

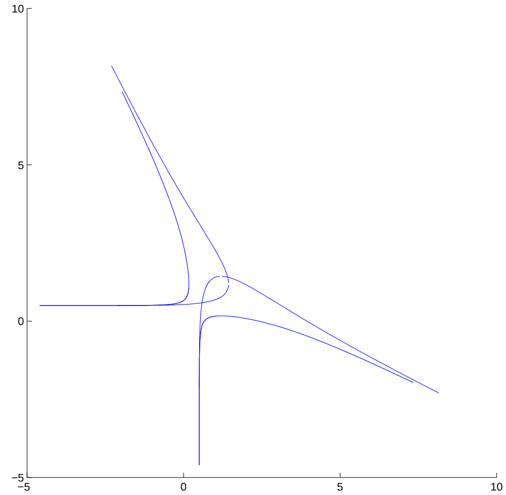
2 Veeltermen en hun Amoebe.

We nemen nu aan dat de coordinaten van de punten in de collectie **A** gehele getallen ≥ 0 zijn. Dan zullen we bij **A** een veelterm $V(X,Y)$ in twee variabelen definiëren. Om de notaties overzichtelijk te houden beperken we ons vanaf nu tot het voorbeeld dat bij de Figuren 1 en 2 hoort:

$$\mathbf{A} \;=\; \{A_1 = (0,0)\,,\; A_2 = (1,0)\,,\; A_3 = (0,1)\,,\; A_4 = (1,1)\,,\; A_5 = (2,2)\}$$

De bijbehorende veelterm is dan

$$V(X,Y) \;=\; C_1X^0Y^0 \;+\; C_2X^1Y^0 \;+\; C_3X^0Y^1 \;+\; C_4X^1Y^1 \;+\; C_5X^2Y^2$$



Figuur 4: *reële nulpunten van de functie V(X,Y) op dubbellogaritmische schaal*

of, in de gebruikelijke verkorte notatie:

$$V(X,Y) \;=\; C_1 \;+\; C_2X \;+\; C_3Y \;+\; C_4XY \;+\; C_5X^2Y^2 \tag{8}$$

waarbij de coëfficiënten zijn (vergelijk met (2))

$$\begin{aligned} &C_1 \;=\; e^{c_1} \;=\; 1\,, \quad C_2 \;=\; e^{c_2} \;=\; e^{-\frac{1}{2}}\,, \quad C_3 \;=\; e^{c_3} \;=\; e^{-\frac{1}{2}}\,, \\ &C_4 \;=\; e^{c_4} \;=\; e^{-1}\,, \quad C_5 \;=\; e^{c_5} \;=\; e^{-4}\,; \end{aligned} \tag{9}$$

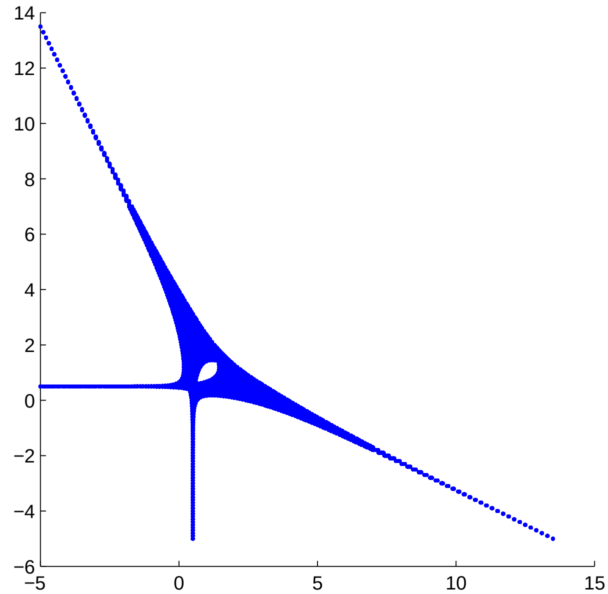
hier is e het grondtal van de natuurlijke logaritme: $e = 2,7182....$.

We zijn geïnteresseerd in de ***nulpuntsverzameling van de functie*** $V(X,Y)$*; d.w.z. de punten met coordinaten* (X,Y) *waarvoor* $V(X,Y) = 0$*.*

In Figuur 3 is de verzameling van punten (X,Y) in het reële vlak $\mathbb{R}^2$ getekend, waarvoor $V(X,Y) = 0$. Dat is de **reële nulpuntsverzameling van** $V(X,Y)$. Figuur 4 geeft een andere weergave van de reële nulpuntsverzameling van $V(X,Y)$: voor ieder nulpunt (X,Y) is hier het punt $(\log|X|, \log|Y|)$ in het reële vlak $\mathbb{R}^2$ getekend.

In het functievoorschrift $V(X,Y)$ mogen we voor X en Y echter ook **complexe getallen** invullen. De **complexe nulpuntsverzameling van** $V(X,Y)$ wordt gevormd door de paren complexe getallen waarvoor de functie de waarde 0 heeft. Omdat de verzameling van alle complexe getallen twee-dimensionaal is (te identificeren met het reële vlak $\mathbb{R}^2$) is de verzameling van alle paren complexe getallen 4-dimensionaal. Daarin ligt de complexe nulpuntsverzameling van $V(X,Y)$ en dat is niet te tekenen.

Wat wel te tekenen is, is de verzameling punten in het reële vlak $\mathbb{R}^2$ waarvan de coordinaten zijn $(\log|X|, \log|Y|)$ met (X,Y) een paar complexe getallen



Figuur 5: *amoebe van de functie V(X,Y)*

waarvoor $V(X,Y) = 0$:

$$\mathcal{A}(V) \ = \ \left\{ (\log|X|, \log|Y|) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ \begin{array}{l} X, Y \text{ complexe getallen} \\ \text{zo dat } V(X,Y) = 0 \end{array} \right\} . \tag{10}$$

Hier is log de **natuurlijke logaritme functie** en is $|X|$ de **absolute waarde van het complexe getal** X (wanneer je het complexe getal X ziet als een punt in het reële vlak $\mathbb{R}^2$ dan is $|X|$ de afstand van punt X tot de oorsprong).

Men noemt de verzameling $\mathcal{A}(V)$ de **amoebe van de veelterm** $V(X,Y)$. Figuur 5 geeft het plaatje van de amoebe $\mathcal{A}(V)$.

De gelijkenis tussen Figuur 1 aan de ene kant en Figuren 4 en 5 aan de andere kant is frappant.

De witte gebieden in Figuur 5 kunnen als volgt intuïtief worden begrepen: *Om het resultaat* $V(X,Y) = 0$ *te bereiken moeten de verschillende termen van de veelterm samenwerken; een kwestie van geven en nemen. Wanneer echter, voor gegeven* X *en* Y*, één van de termen te zeer domineert (d.w.z. in absolute waarde veel groter is dan de andere), dan kan* $V(X,Y)$ *niet* 0 *zijn en blijft in Figuur 5 het punt* $(\log|X|, \log|Y|)$ *wit. De termen van de veelterm corresponderen 1-op-1 met de punten van* $\boldsymbol{A}$ *, net als de gesloten Voronoi-cellen in Figuur 1.*

3 Gewoon Rekenen wordt Tropisch Rekenen

Niet alleen is er een frappante gelijkenis tussen de Figuren 1 en 5, ook tussen de functies $F(x,y)$ en $V(X,Y)$ in Vergelijkingen (7) en (8) schuilen intrigerende overeenkomsten. Om die te zien nemen we eerst de e-macht van $F(x,y)$:

$$e^{F(x,y)} = \max\{1\,,\ e^{x-\frac{1}{2}}\,,\ e^{y-\frac{1}{2}}\,,\ e^{x+y-1}\,,\ e^{2x+2y-4}\}\,. \tag{11}$$

Vervolgens nemen we $C_1, \ldots, C_5$ als in (9) en schrijven we

$$X = e^x\,, \qquad Y = e^y\,, \qquad E(X,Y) = e^{F(x,y)}\,. \tag{12}$$

Daarmee gaat (11) over in

$$E(X,Y) = \max\{C_1\,,\ C_2X\,,\ C_3Y\,,\ C_4XY\,,\ C_5X^2Y^2\}\,. \tag{13}$$

Als we nu (8) schrijven als

$$V(X,Y) = \mathrm{som}\{C_1\,,\ C_2X\,,\ C_3Y\,,\ C_4XY\,,\ C_5X^2Y^2\}\,, \tag{14}$$

dan zien we een duidelijke overeenkomst tussen de formules voor $E(X,Y)$ en $V(X,Y)$.

Formules (13) en (14) geven functievoorschriften waarmee aan paren getallen (X,Y) een functiewaarde wordt toegekend. Deze functievoorschriften zijn zelf weer opgebouwd uit elementairdere bouwstenen. In (14) zijn de elementaire bouwstenen: **het vermenigvuldigen van twee getallen** en **het optellen van twee getallen**. In (13) zijn de elementaire bouwstenen: **het vermenigvuldigen van twee getallen** en **de operatie die voor twee getallen de grootste van de twee oplevert**. Om de analogie met optelling te onderstrepen noteren we deze laatste operatie met $\oplus$:

$$A \oplus B = \max\{A,\, B\}\,. \tag{15}$$

Bijvoorbeeld:

$$3 \oplus 2 = 3 \quad 3 \oplus 3 = 3 \quad 3 \oplus 4 = 4\,;$$

vergelijk dit met de gewone optelling:

$$3 + 2 = 5 \quad 3 + 3 = 6 \quad 3 + 4 = 7\,.$$

Met de nieuwe notatie $\oplus$ kan Formule (13) worden geschreven als

$$E(X,Y) = C_1 \oplus C_2X \oplus C_3Y \oplus C_4XY \oplus C_5X^2Y^2\,. \tag{16}$$

Vergelijk dit nu eens met Formule (8):

$$V(X,Y) = C_1 + C_2X + C_3Y + C_4XY + C_5X^2Y^2\,.$$

De operatie $\oplus$ in (15) wordt **tropische optelling** genoemd. Meer hierover in de volgende paragraaf.

4 Tropisch Rekenen.

De benaming **tropisch** voor deze manier van rekenen is ingevoerd door Franse informatici, die daarmee een groep Braziliaanse collega's wilden eren die in hun werk het nut van deze manier van rekenen hadden aangetoond. In Franse ogen is Brazilië een tropisch land. Het belang van deze manier van rekenen was ook gezien door Russische wis- en natuurkundigen, maar de Russische benamingen **dequantisatie** en **idempotente analyse** hadden niet dezelfde reclame-uitstraling als "tropisch" en worden nauwelijks gebruikt.
Tropisch Rekenen is een hot topic in de hedendaagse wiskunde.

Het belang van de tropische manier van optellen ligt in het feit dat het onderliggende algebraïsche formalisme voldoende veel eigenschappen met de gewone optelling gemeen heeft. Hier is een lijst van zulke eigenschappen:

1. tropisch rekenen werkt voor **reële getallen die** ≥ 0 **zijn**
2. voor twee reële getallen $a\,,\ b \geq 0$ is het tropische product hetzelfde als het gewone product; dit product wordt genoteerd als ab
3. voor twee reële getallen $a\,,\ b \geq 0$ wordt de tropische som genoteerd als $a \oplus b$ en gedefinieerd door
$$a \oplus b \,=\, \max\{a, b\}$$
4. de distributieve, associatieve en commutatieve wetten gelden:
voor alle reële getallen $a\,,\ b\,,\ c \geq 0$ is:
$$\begin{aligned} (a \oplus b)c &= ac \oplus bc \\ (a \oplus b) \oplus c &= a \oplus (b \oplus c) \\ (ab)c &= a(bc) \\ a \oplus b &= b \oplus a \\ ab &= ba \end{aligned}$$
5. 0 is het neutrale element voor de tropische optelling; 1 is het neutrale element voor de vermenigvuldiging; d.w.z. voor alle reële getallen $a \geq 0$ geldt:
$$0 \oplus a \,=\, a \oplus 0 \,=\, a\,, \qquad 1a \,=\, a1 \,=\, a$$
6. anders dan voor de gewone optelling hebben reële getallen $a > 0$ **geen tegengestelde voor de tropische optelling**.
Dit kan niet worden hersteld door ook negatieve getallen toe te laten, want dan verliezen enkele van de bovenstaande wetten hun geldigheid.
7. Merk op dat voor alle reële getallen $a > 0$ geldt $a \oplus a \,=\, a$. Omdat $a = 1a$ en $a \oplus a \,=\, (1 \oplus 1)a$, is waar het echt om gaat:
$$\mathbf{1} \oplus \mathbf{1} \,=\, \mathbf{1}\,.$$

5 Grootste Gemeenschappelijke Delers

Eenmaal gewezen op de mogelijkheid van een zinnige herinterpretatie van $+$ vraagt men zich natuurlijk af of er nog andere voorbeelden zijn. Hier is zo'n voorbeeld:

Neem de verzameling $\mathbb{N}_0$ bestaande uit 0 en alle positieve gehele getallen. Definieer voor twee getallen a en b het product ab als het gewone product en definieer de "alternatieve som" $a \boxplus b$ door

$$a \boxplus b = GGD\{a, b\},$$

de grootste gemeenschappelijke deler van a en b.

bijvoorbeeld:

$$60 \boxplus 18 = 6, \qquad 21 \boxplus 5 = 1, \qquad a \boxplus a = a, \qquad 1 \boxplus a = 1$$

voor elke a in $\mathbb{N}_0$.

De lezer wordt uitgenodigd om na te gaan dat deze definities van de vermenigvulding en de "alternatieve optelling" voldoen aan de distributieve, associatieve en commutatieve wetten: *voor alle getallen* a, b, c *in* $\mathbb{N}_0$ *is:*

$$\begin{aligned}
(a \boxplus b)c &= ac \boxplus bc \\
(a \boxplus b) \boxplus c &= a \boxplus (b \boxplus c) \\
(ab)c &= a(bc) \\
a \boxplus b &= b \boxplus a \\
ab &= ba
\end{aligned}$$

en dat 0 het neutrale element is voor de "alternatieve optelling" en dat 1 het neutrale element is voor de vermenigvuldiging; d.w.z. voor alle getallen a in $\mathbb{N}_0$ geldt:

$$0 \boxplus a = a \boxplus 0 = a, \qquad 1a = a1 = a.$$

Een meer geavanceerde opgave is om voor een keuze van de coëfficiënten $C_1, \ldots, C_5$ in $\mathbb{N}_0$ en voor een aantal waarden van X en Y in $\mathbb{N}_0$ te berekenen

$$C_1 \boxplus C_2X \boxplus C_3Y \boxplus C_4XY \boxplus C_5X^2Y^2$$