

Een sprong voorwaarts met wiskunde

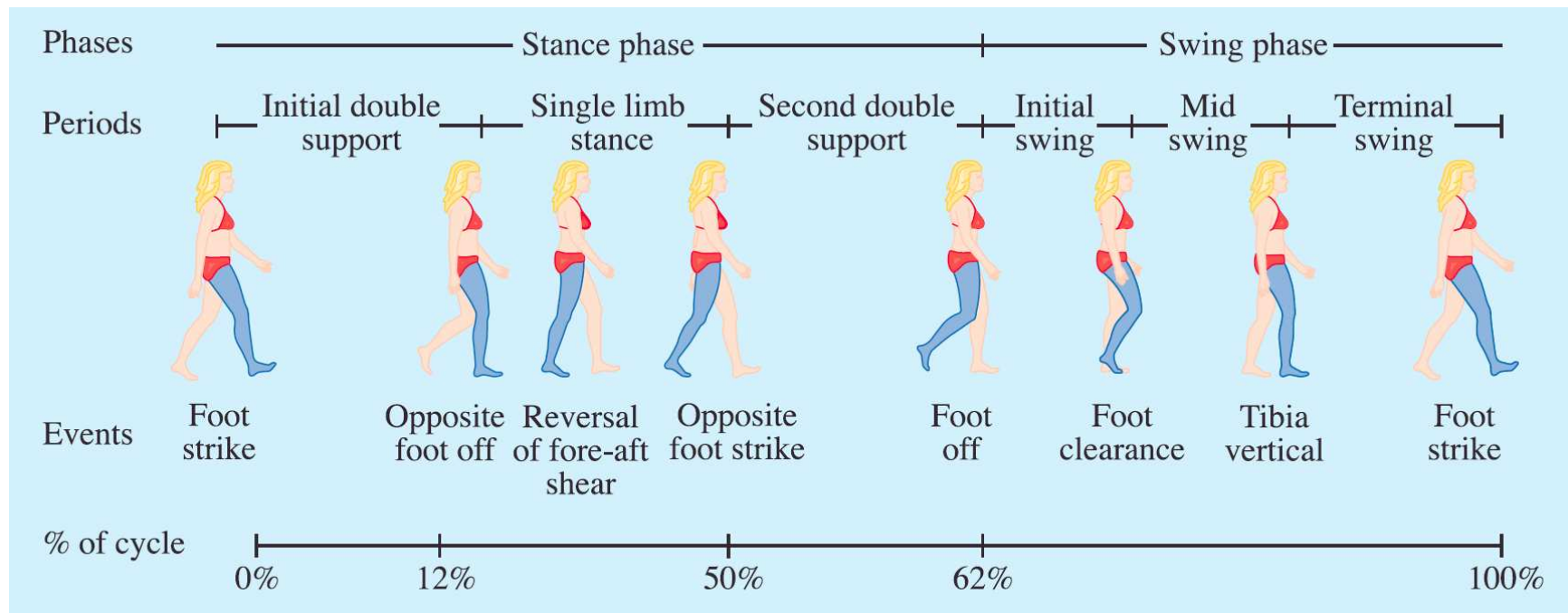
NWD 2010

André Heck, Peter Uylings
AMSTEL Instituut, UvA

Inhoud

- Ganganalyse
- Wandelen vs. rennen
- Hoe snel kun je wandelen?
- Analyse van een hurksprong
- Massa-veer model van verticaal springen met een springstok
- Massa-veer model van verticaal huppen
- Massa-veer model van voorwaarts huppen

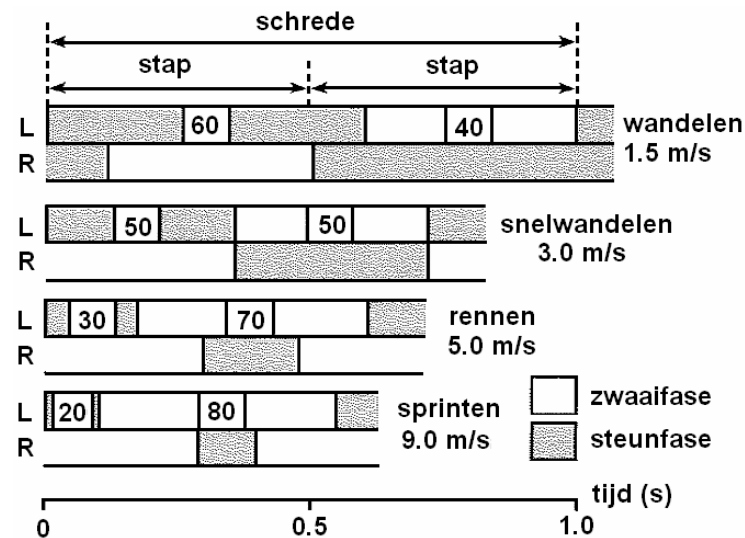
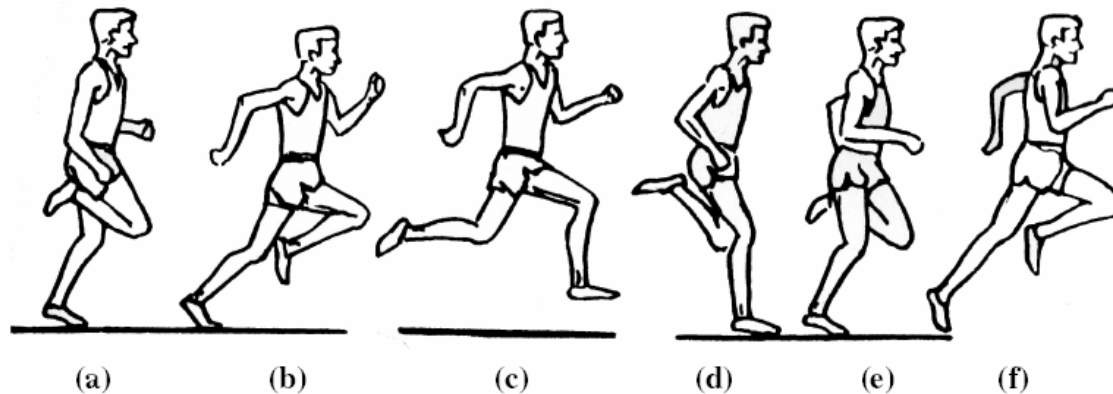
Ganganalyse

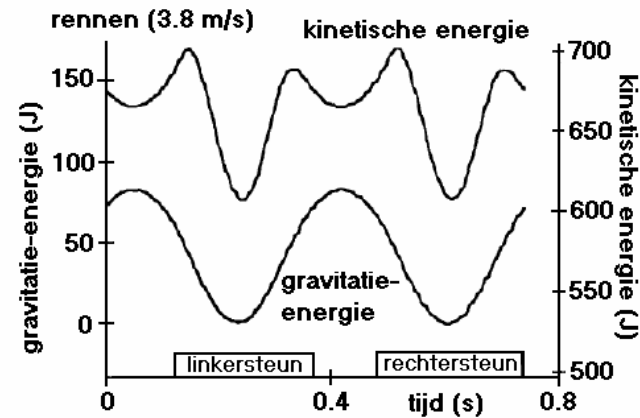
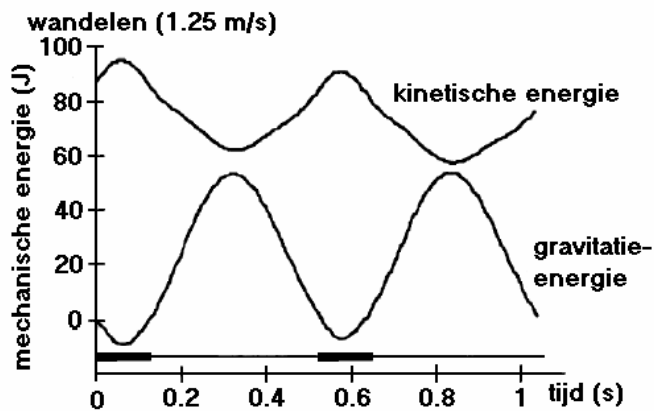
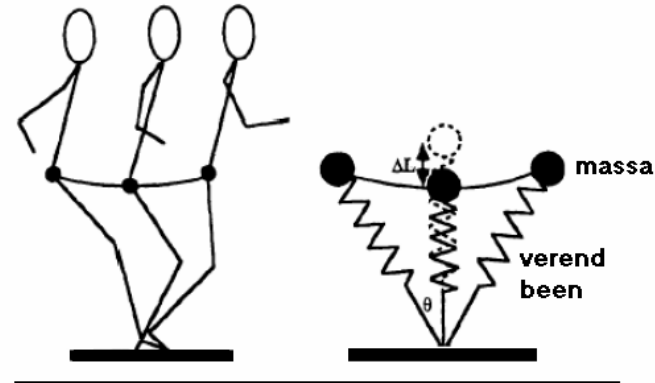
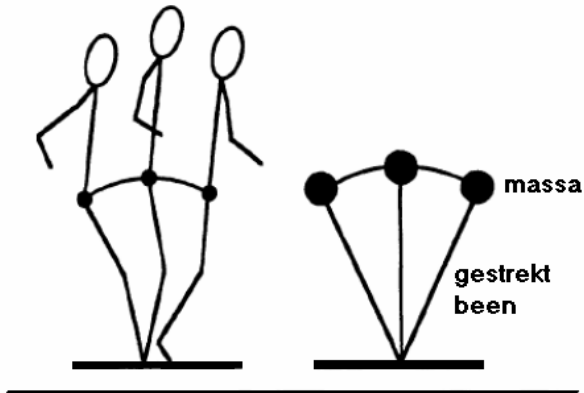


Gangcyclus bij normaal wandelen

Wandelen vs. rennen

- spatio-temporele, dynamische, kinematische verschillen



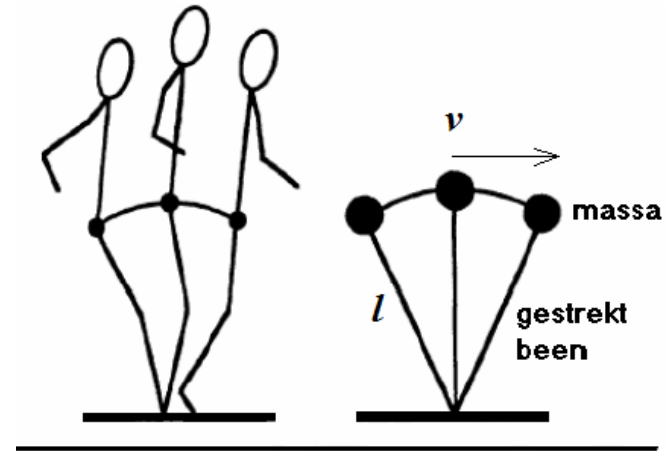


wandelen	altijd grondcontact, soms met twee benen	weinig verandering in kniehoek tijdens steunfase	kinetische energie en potentiële energie uit fase
rennen	contact- en zweeffase	grote verandering in kniehoek tijdens steunfase	kinetische energie en potentiële energie in fase

Hoe snel kun je wandelen?

Omgekeerde slingermodel

eenparige cirkelbeweging
met straal l en snelheid v



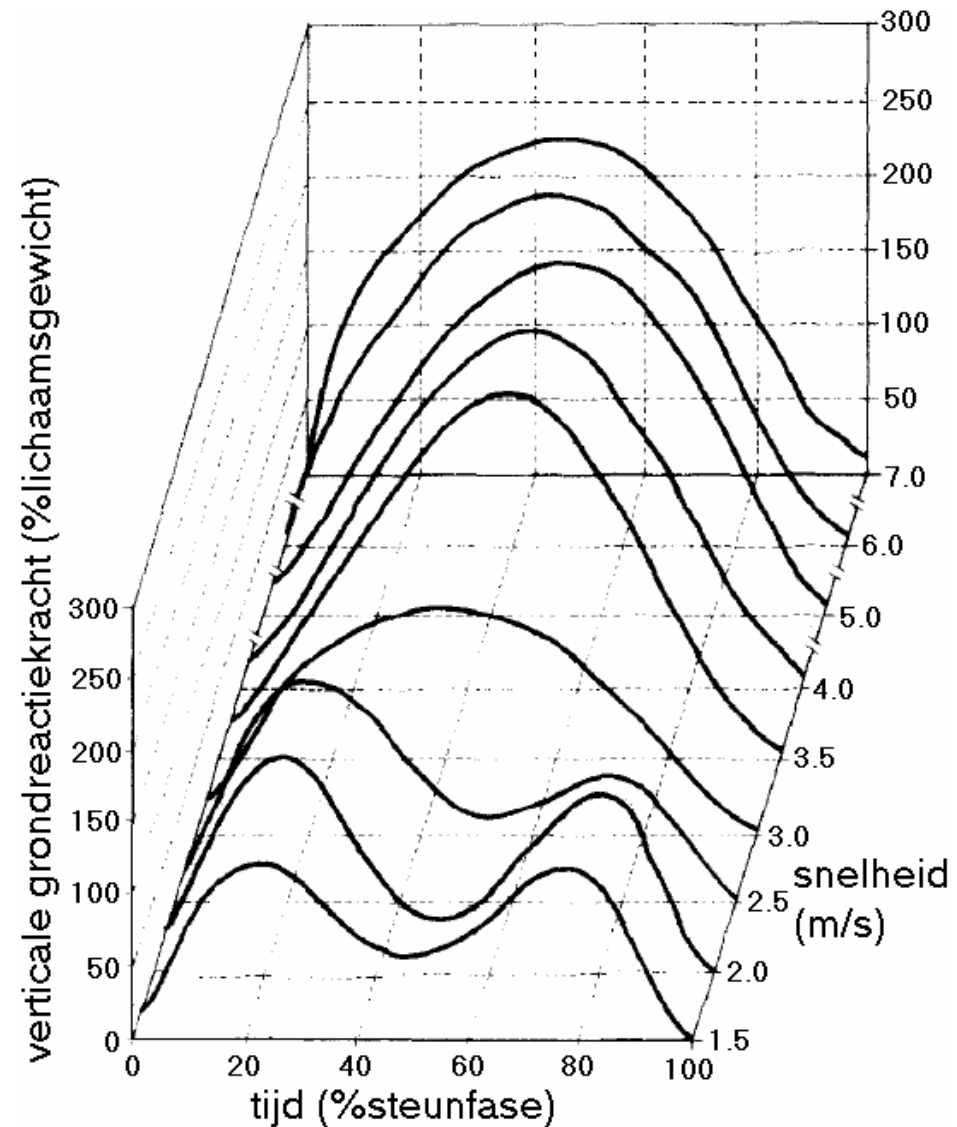
Middelpuntzoekende (centripetale) kracht: $F_{centripet} = \frac{mv^2}{l}$

Zwaartekracht: $F_z = mg$

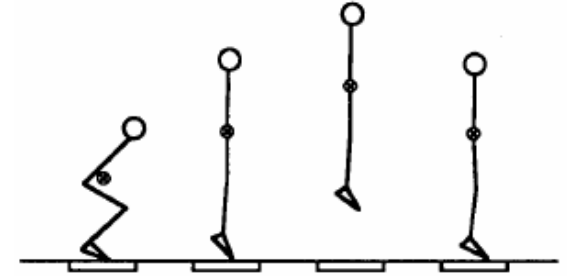
$$F_{centripet} \leq F_z \Rightarrow \frac{v^2}{l} \leq g \quad l = 0.9\text{m} \Rightarrow v_{\max} \approx 3\text{ m/s}$$

Grondreactiekracht:

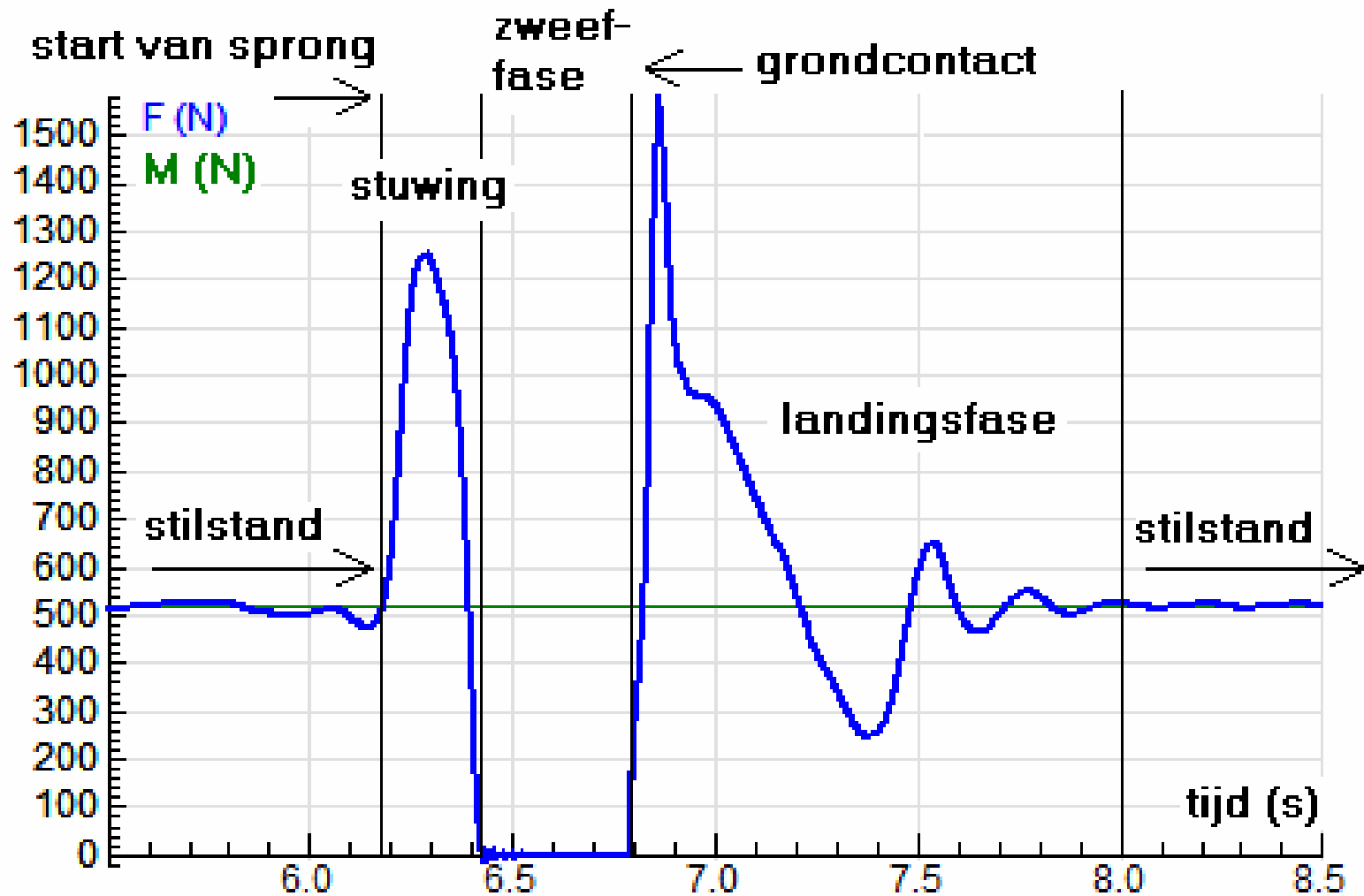
Coach proef met krachtenplatform



Analyse van een hurksprong



Verticale grondkracht bij een hurksprong



Fasen en verticale grondkracht bij een hurksprong

Hoogtebepaling uit grondreactiekracht

Tweede wet van Newton: $F = ma = mv'$

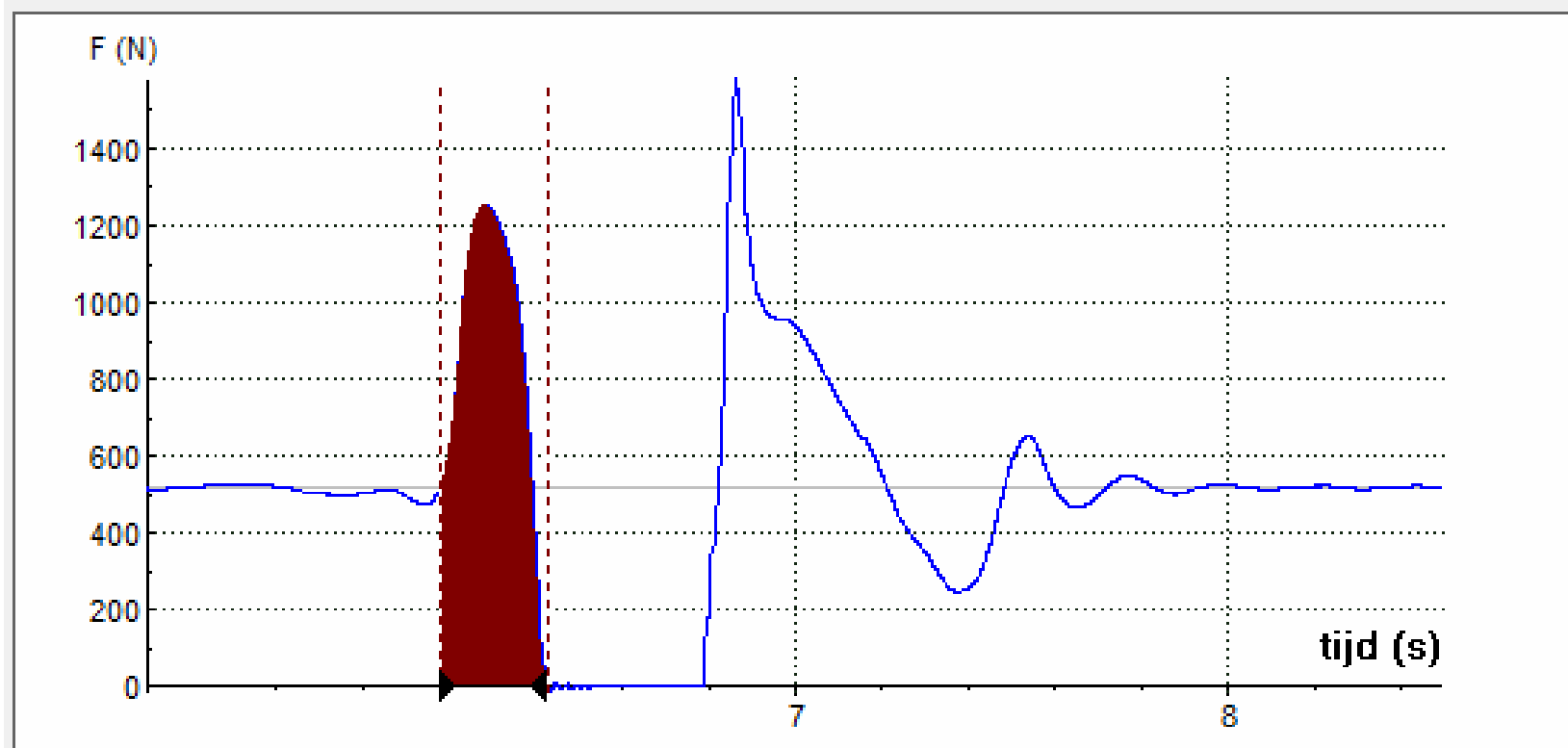
Integreren: $\int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{afzet}}} F dt = mv_{\text{afzet}} - mv_{\text{start}}$

In ons geval met grondreactiekracht F_{GRF} , gewicht M (in N) en starten vanuit hurkstand:

$$\int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{afzet}}} (F_{GRF} - M) dt = mv_{\text{afzet}}$$

$$\left(\int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{afzet}}} F_{GRF} dt \right) - M \cdot t_{\text{stuwing}} = mv_{\text{afzet}}$$

Oppervlakte onder de kromme (in Coach)



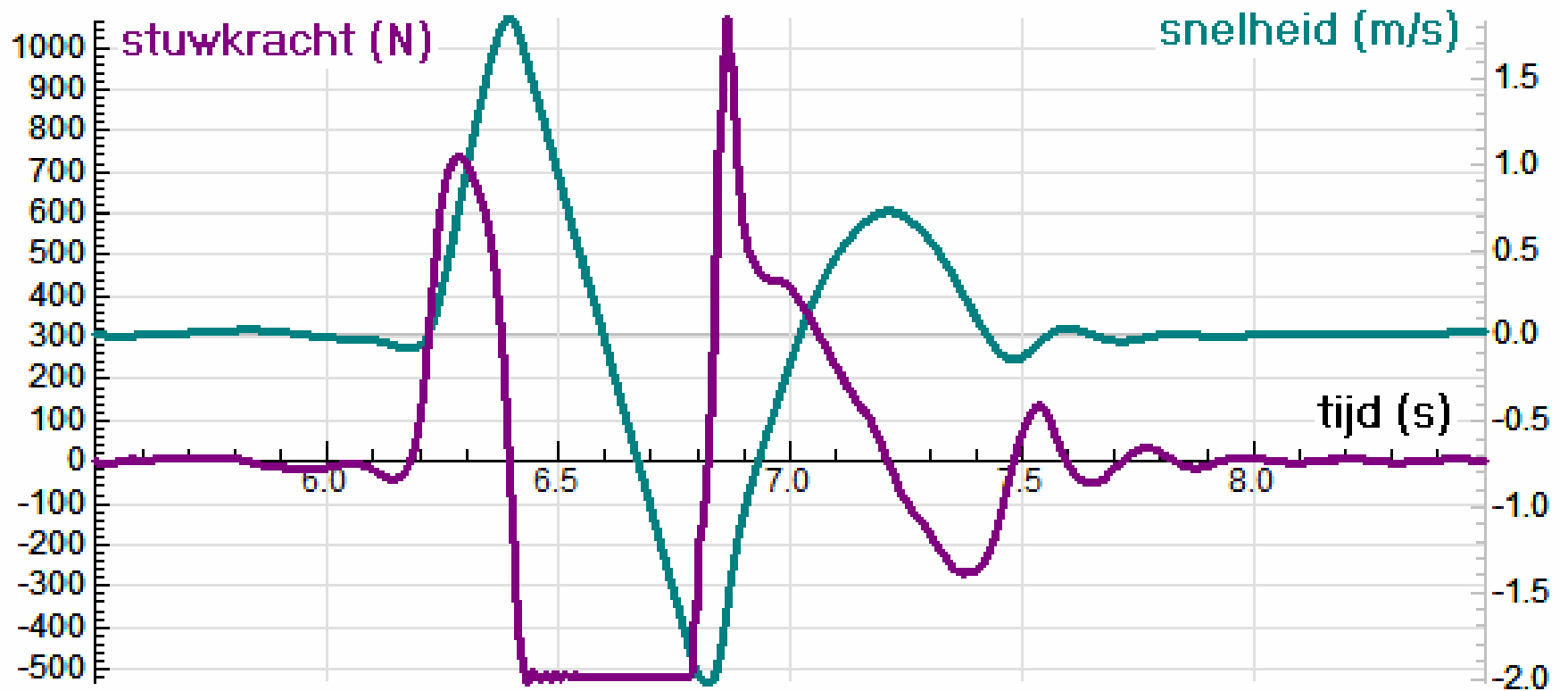
Kolom

Begin: s

Eind: s

Oppervlak: N*s

Integraalkromme



Spronghoogte $\Delta h_{\text{zweeffase}}$ kan uit afzetsnelheid bepaald worden.

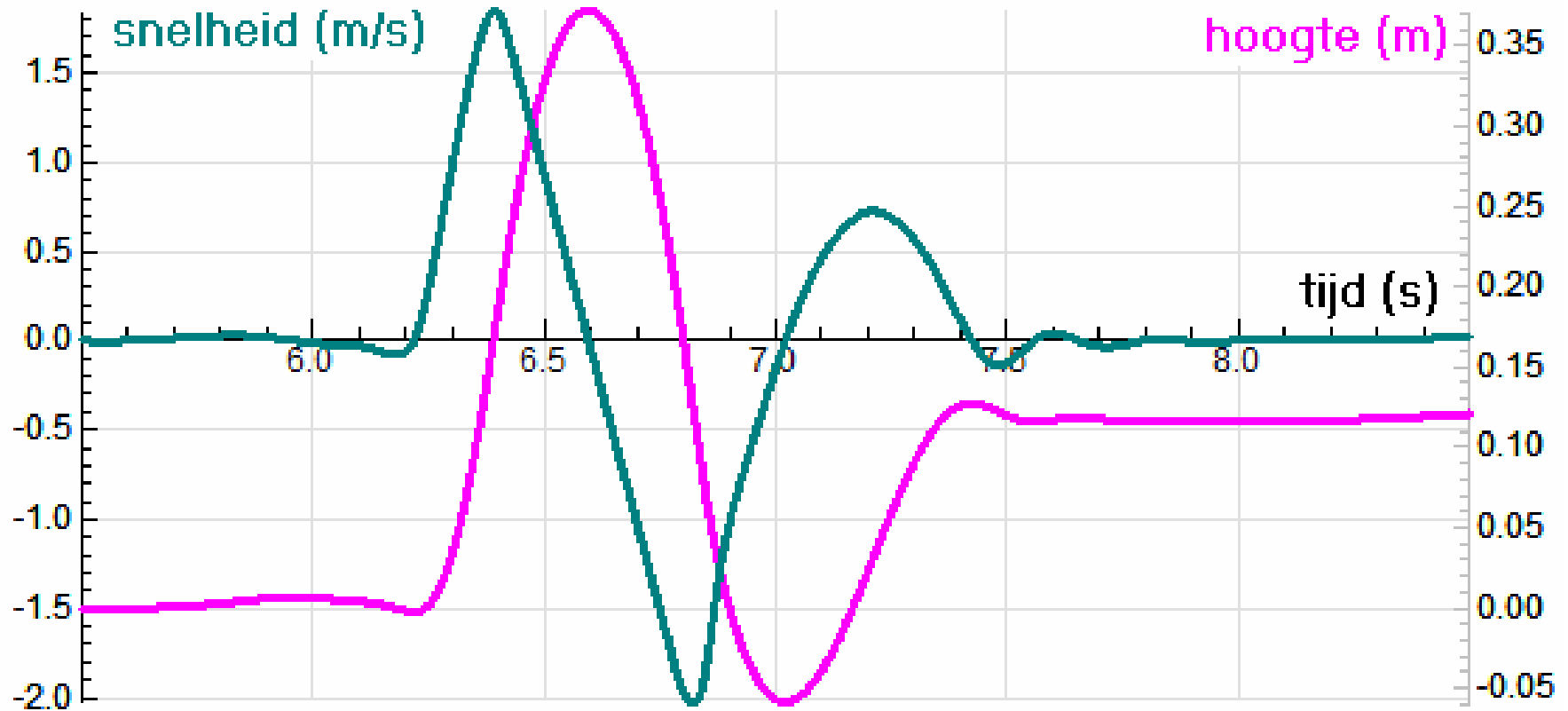
Gebruik de wet van behoud van energie.

$$\frac{1}{2}mv_{\text{afzet}}^2 = mg\Delta h_{\text{zweeffase}}$$

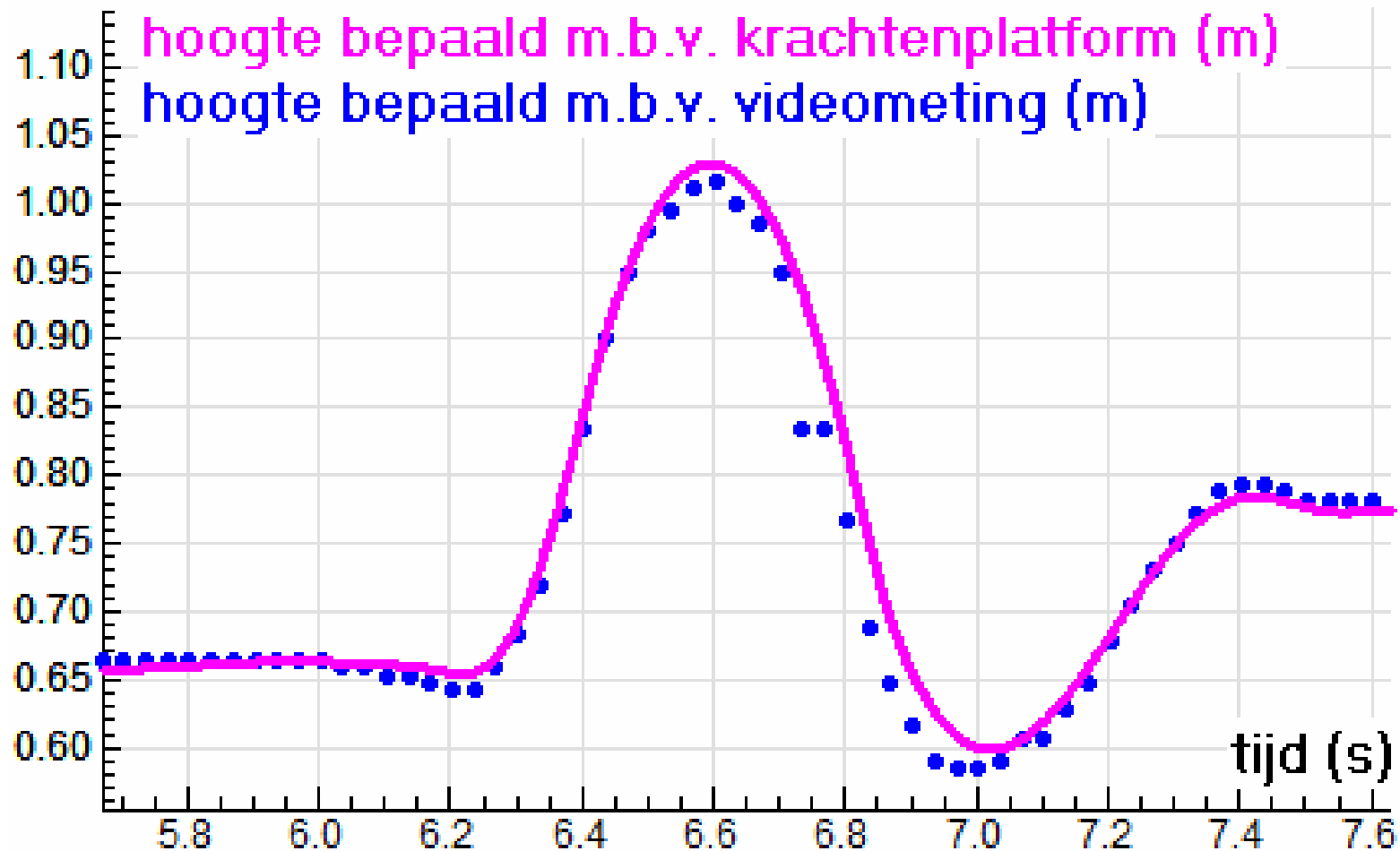
Dus:
$$\Delta h_{\text{zweeffase}} = \frac{v_{\text{afzet}}^2}{2g}$$

Huiswerk = formule voor zweeftijd:

$$t_{\text{zweeffase}} = 2v_{\text{afzet}} / g$$



Vergelijking met videometing



Omhoog met een springstok

- Luchtfase: parabolisch
- Grond- of contactfase: verend, dus sinusvormig



Thomas aan het werk...



Massa-veer model

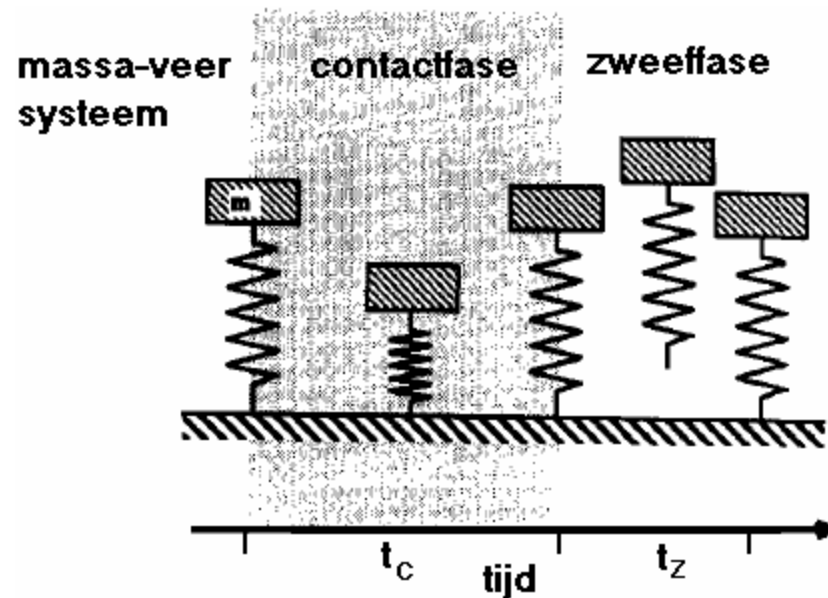
$$F_z = mg$$

$$F_v = C(L - y)$$

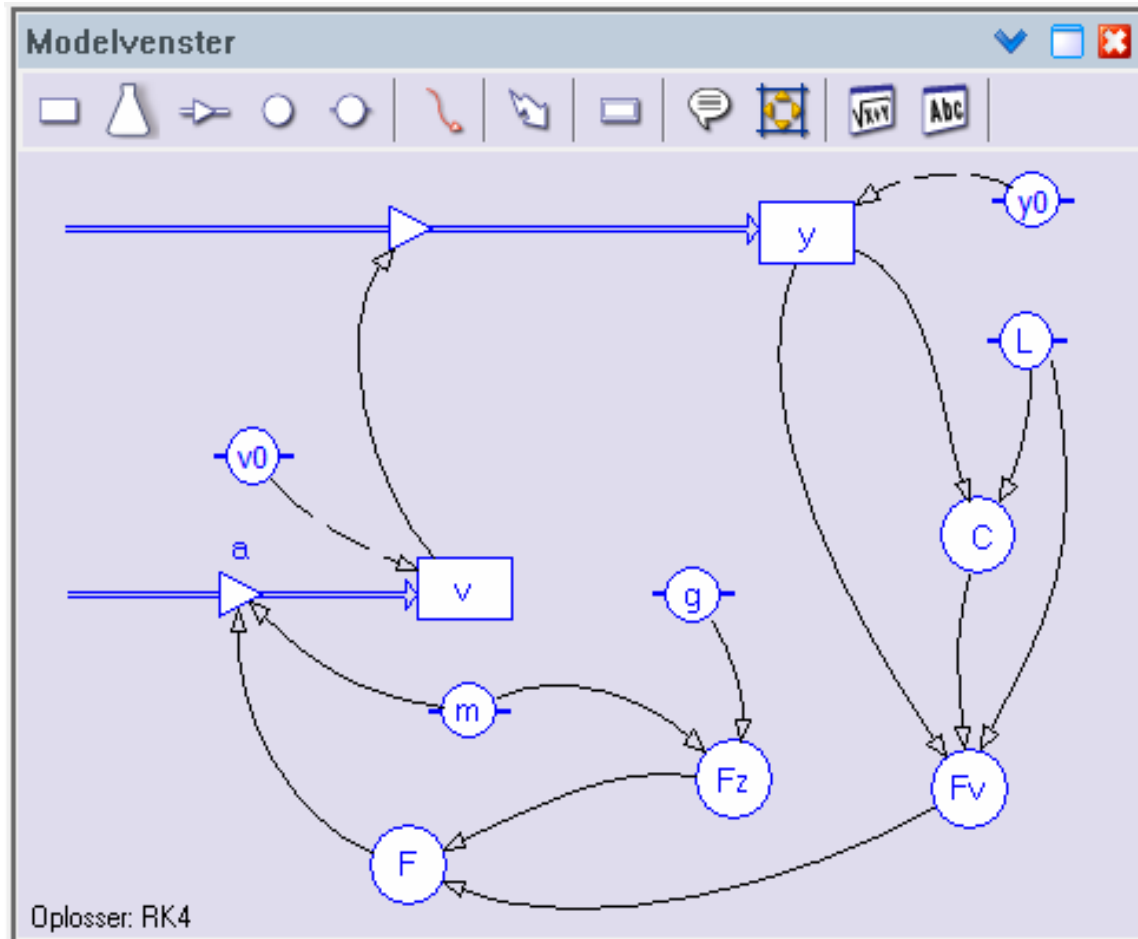
$$a = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{F_z + F_v}{m} = \frac{F}{m}$$

$$y(0) = L$$

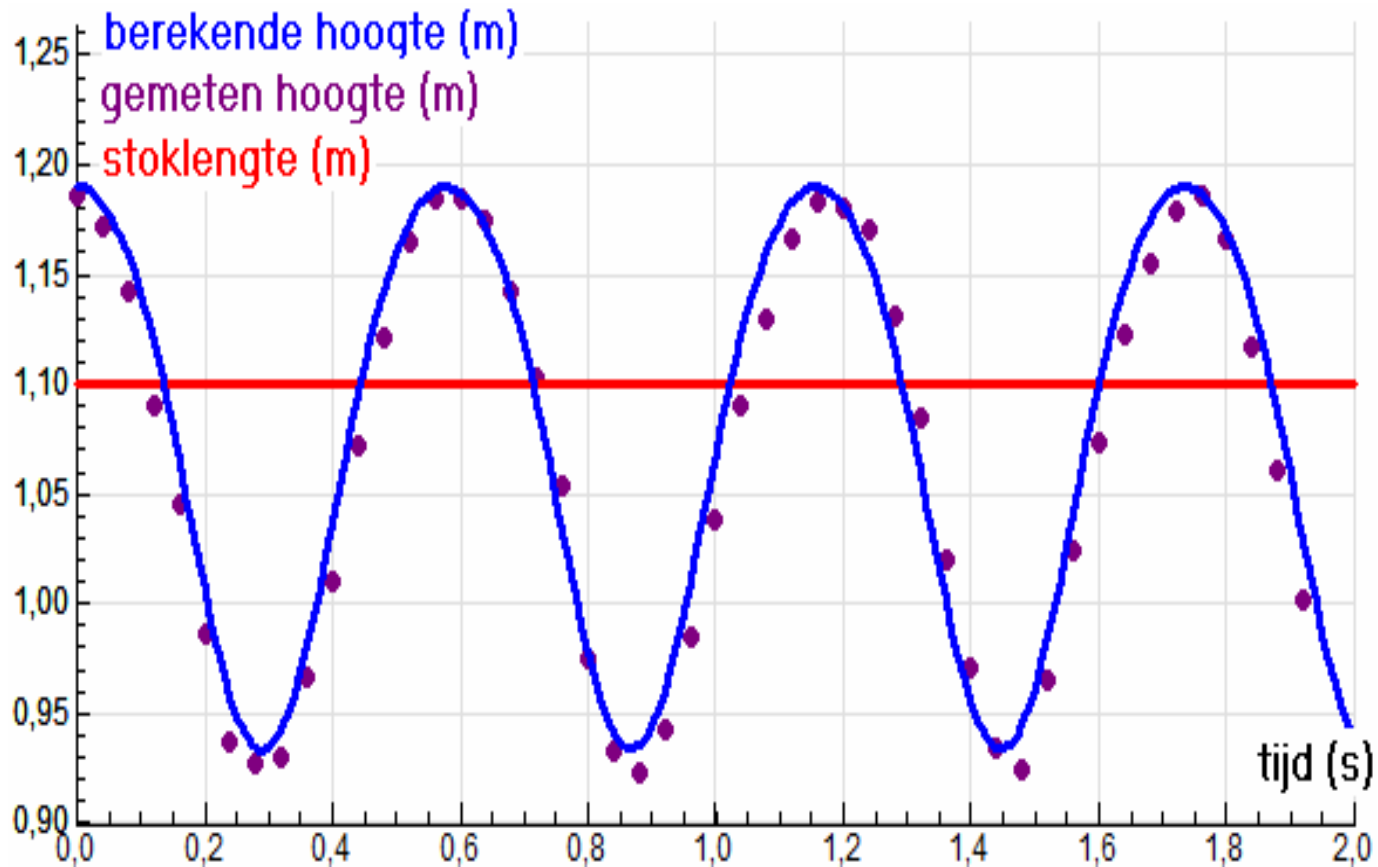
$$\frac{dy}{dt}(0) = v(0) \neq 0$$



Model in Coach uitvoering!



Vergelijking model & meting..



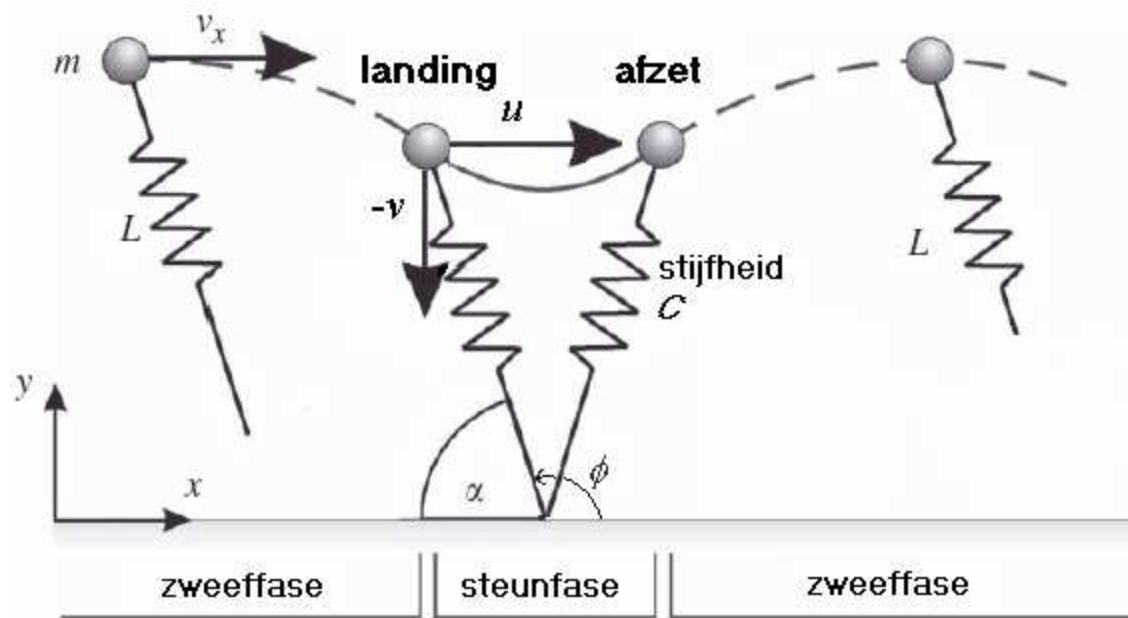
Verticaal huppen zonder hulpmiddelen

Massa-veer model ook goed.

[Videometing](#)

[Model](#)

Voorwaarts huppen



$$\tan \alpha = -\frac{y(0)}{x(0)} \quad \tan \beta = \frac{v}{u}$$

Ontbinding in x en y

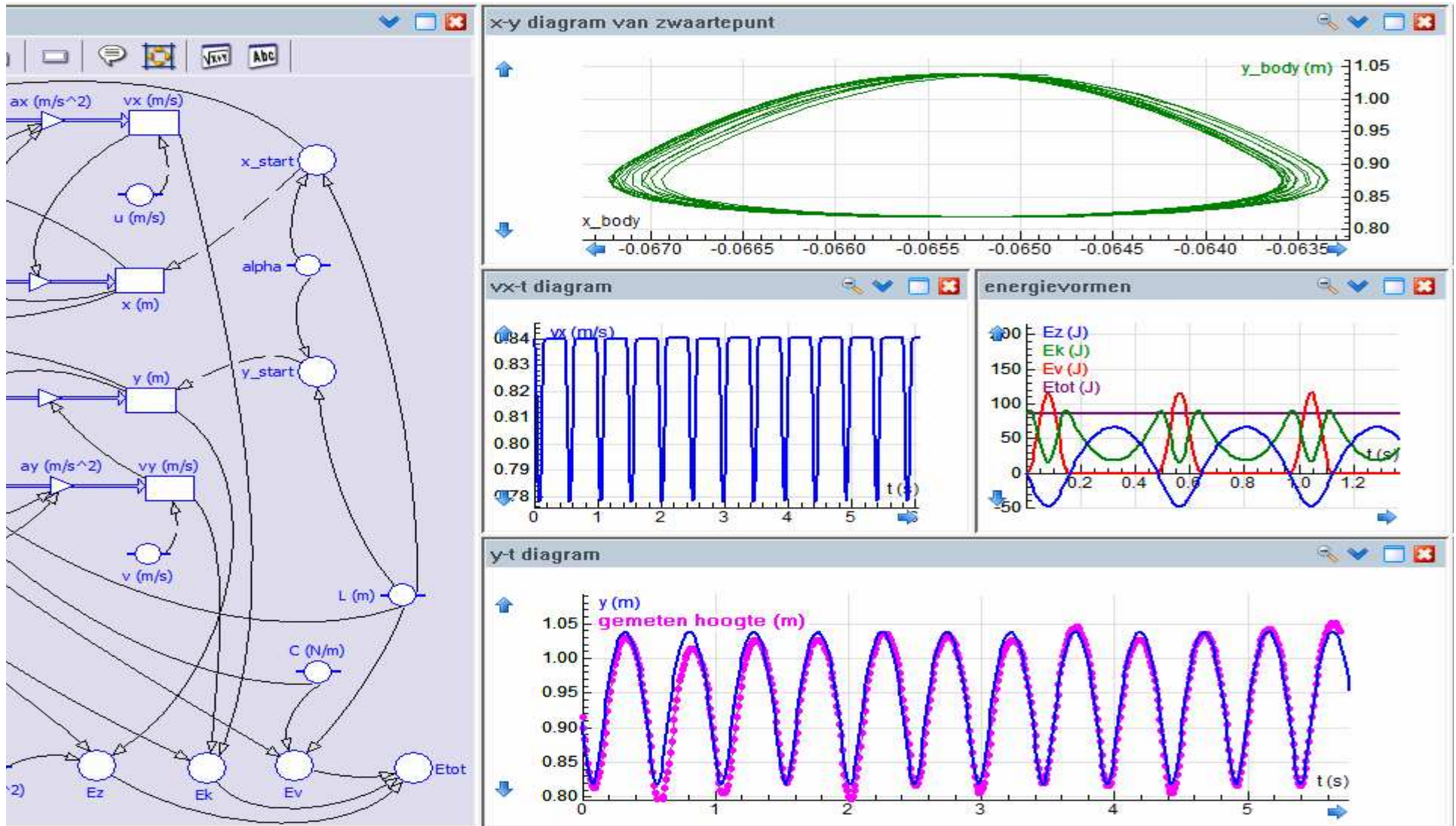
$$F_{v,x} = F_v \cos \phi \quad F_{v,y} = F_v \sin \phi$$

$$F_{v,x} = F_v \frac{x}{r} \quad F_{v,y} = F_v \frac{y}{r}$$

Het beginwaarden probleem

$$\begin{aligned}x'' &= 0, & x'(t_c) &= u, & x(t_c) &= L \cos \alpha, \\y'' &= -g, & y'(t_c) &= v, & y(t_c) &= L \sin \alpha.\end{aligned}$$

En de resultaten!



Enkele referenties

- Blickhan, R. (1989). The spring-mass model for running and hopping. *Journal of Biomechanics* **22** (11/12), 1217–1227.
- Farley, C.T., & Ferris, D.P. (1998). Biomechanics of walking and running: from center of mass movement to muscle action. *Exercise and Sports Sciences Reviews*, **26**, 253–285.
- Heck, A. (2002). Stilstaan bij lopen. *Nieuwe Wiskrant*, **22** (1), 44–50.
- Linthorne, N.P. (2001). Analysis of standing vertical jumps using a force platform. *American Journal of Physics*, **69** (11), 1198–1204.
- Rose, J., & Gamble, J.G. (2006) *Human Walking* (3rd ed.). Philadelphia: Lippincott Williams & Wilkins.
- McMahon, T.A., & Cheng, G.C. (1990). The mechanics of running: how does stiffness couple with speed? *Journal of Biomechanics*, **23** (1), 65–78.
- Trowbridge, E.A. (1982). Walking or running? When does lifting occur? *Mathematical Spectrum* **15** (3), 77–81.