

**André Heck** en **Peter Uylings** zijn op de nwd van 2010 wiskundig ingesprongen op sprongbewegingen zoals het springen op een springstok, huppen op de plaats en het maken van kangoeroesprongen. Dergelijke bewegingen zijn op video vast te leggen en kunnen m.b.v. Coach worden geanalyseerd. In dit artikel bespreken zij eenvoudige wiskundige modellen van deze bewegingen en vergelijken modelresultaten met meetresultaten.

## Een sprong voorwaarts met wis- en natuurkunde

### Inleiding

Er zijn diverse manieren van menselijke gang: slenteren, wandelen, snelwandelen, hardlopen, enzovoort. In dit artikel gaan we springende gangpatronen zoals huppen, rennen, springen op een springstok en het maken van kangoeroesprongen wiskundig onderzoeken. Dit is best ambitieus want zo'n levendige beweging lijkt op het eerste gezicht nog niet zo makkelijk in een wiskundig model te vangen. Het doorbuigen en afzetten van iemand die op en neer springt, doet een beetje denken aan de beweging van een omgekeerde veer, een model dat dan ook in allerlei varianten in de biomechanica terugkomt. Maar hoe eenvoudig of complex moet een dergelijk model zijn om goed overeen te stemmen met de realiteit? Kunnen vwo leerlingen zo'n onderzoek ook doen? Voordat we aan de beantwoording van deze vragen toe komen zullen we eerst de belangrijkste begrippen, principes en meetmethoden van ganganalyse uitleggen en de biomechanische verschillen tussen wandelen en rennen bespreken.

### Ganganalyse

Bij een volledige ganganalyse worden de volgende aspecten onderzocht: spatio-temporele factoren (staplengte, kads, staptijd, gangsnellheid,...), kinematische variabelen (heuphoek, kniehoek, enkelhoek, ...), de dynamica van het lichaamszwaartepunt (verticale/horizontale verplaatsing, energiefluctuaties,...), externe krachten die inwerken op het systeem (grondreactiekrachten) en fysiologische aspecten (spiergebruik, belasting van het skeletstelsel,...). In een eerder artikel [1] is al ingegaan op leerlingenonderzoek naar spatio-temporele en kinematische aspecten van menselijke gang m.b.v. videometingen. Dit betrof met name wandelen. In dit artikel bekijken we springende voortbewegingen. Om het verschil tussen deze gangpatronen beter te begrijpen bespreken we eerst biomechanische basisconcepten van menselijke gang.

Rose en Gamble [2] stellen twee eisen aan normaal wandelen: (1) een aanhoudende grondreactiekracht; (2) een periodieke beweging van elke voet van de ene naar de andere positie van grondcontact in de voortgangsrichting. De gangcyclus (ook wel schrede genoemd) begint wanneer één voet in contact komt met de grond en eindigt wanneer dezelfde voet opnieuw in contact komt met de grond. Tijdens het wandelen bevindt zich een been afwisselend in een fase waarin erop gesteund wordt (de steunfase of standfase) en een fase waarin het been vrij is van de ondergrond (de zwaai fase). De steunfase bestaat uit de steunopvang (waarin er dubbel grondcontact is), het volcontact (waarin er op één been met [bijna] de volledige voetzool gesteund wordt) en de afzet (waarin er weer dubbel grondcontact is en de zwaai fase voorbereid wordt). De zwaai fase kent een begin-, midden-, en eindfase tussen het moment dat de voet contact met de ondergrond verliest en weer opnieuw maakt. Hierbij wordt de beweging van het zwaaibeen eerst versneld en daarna weer afgeremd.

In figuur 1 worden de verschillende fasen van een wandelgang en hun tijdsduur (als percentage van de schredetijd) getoond. Deze figuur is overgenomen uit referentie [2]. Enkele stapgrootheden zijn staplengte, stapfrequentie (kads = aantal stappen per minuut) en gangsnellheid. Enkele staptijdfactoren zijn standtijd, zwaaitijd, bipedale tijd (wanneer beide voeten de grond raken), schredetijd en staptijd. Met behulp van een gemotoriseerde loopband kunnen leerlingen in experimenten uitzoeken hoe de spatio-temporele factoren afhangen van de aard van de loopbeweging en de snelheid van de loopband. Ook kunnen ze daarbij hun aandacht richten op de hoeken van verschillende gewrichten. In het eerder artikel [1] zijn dergelijke onderzoeken al uitvoerig beschreven. Ter voorbereiding op een wiskundige modellering van sprongbewegingen verdiepen we ons nu eerst in verschillen tussen wandelen en rennen.

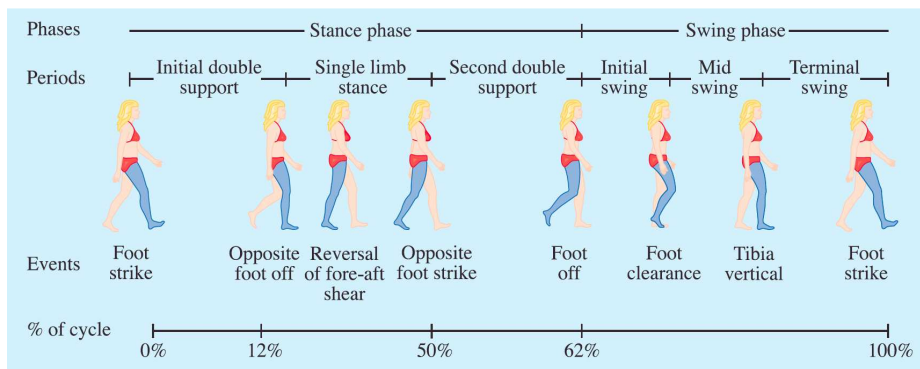


fig. 1 De gangcyclus inclusief specifieke gebeurtenissen tijdens het wandelen (Rose & Gamble [2]).

## Wandelen vs. rennen

In figuur 1 is aangegeven dat een been zich tijdens wandelen pakweg 60% van de gangcyclus in de steunfase en 40% in de zwaai fase bevindt. Deze percentages gelden voor wandelen met een snelheid tussen 5 en 6 km/h. Wanneer iemand haast heeft en een grotere gangnelheid kiest zal het percentage van de steunfase alsmede de schredetijd afnemen. Bij snelwandelen met een gangnelheid nabij 11 km/u is het percentage steun- en zwaai fase gelijk aan 50%. Wanneer de ene voet de grond raakt, verheft de andere voet zich juist van de grond. Er is bijna geen bipedale fase meer waarin beide voeten de grond raken. Bij nog grotere gangnelheid verandert het patroon in joggen, rennen of sprinten. Dan is er helemaal geen bipedale fase meer, maar is daarvoor een zweeffase, waarin geen enkele voet de grond meer raakt, in de plaats gekomen. Uit figuur 2 valt op te maken dat bij een sprint de zweeffase kan oplopen tot 60% van de gangcyclus. Wanneer iemand sneller begint te wandelen, schakelt hij of zij op een bepaald moment over van wandelen naar lopen. Omgekeerd, wanneer iemand langzamer gaat rennen dan komt er een moment waarop overgegaan wordt op wandelen. Uit onderzoek blijkt dat de wandelen-rennen en rennen-wandelen overgangssnelheid gelijk aan elkaar zijn. We verwijzen naar het proefschrift van Veerle Segers [3] voor een beschrijving van het hoe en waarom van deze overgang in gangpatroon.

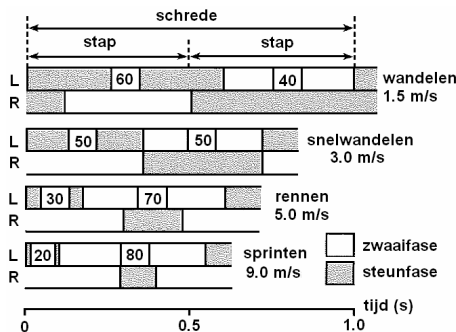


fig. 2 Cyclus van wandelen tot sprinten (Vaughan [4]).

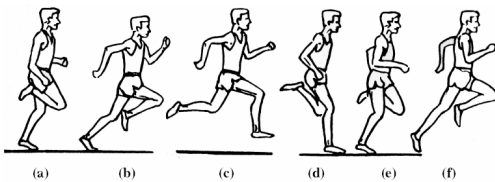


fig. 3 Fasen tijdens rennen (Durward et al [5]).

Net als bij wandelen worden verschillende fasen tijdens rennen onderscheiden. De zweeffase begint bij de afzet, het moment dat de ene voet de grond verlaat, en eindigt met het moment dat de andere voet contact maakt met de grond (afbeelding b t/m d in figuur 3). De steunfase is de periode tussen de steunopvang en de afzet met hetzelfde been (afbeelding d t/m f in figuur 3). Het eerste deel van de steunfase wordt de remfase genoemd omdat het lichaam wordt afgeremd en de kinetische en gravitatie-energie die het lichaam voor de landing had, geabsorbeerd wordt. Het laatste deel van de steunfase wordt de

stuwfase genoemd omdat veerenergie in het spier-skeletstelsel wordt omgezet in kinetische en potentiële energie, zodat de volgende sprong gemaakt kan worden.

Behalve het spatio-temporele onderscheid tussen wandelen en rennen, zijn er nog twee andere onderscheidende karakteristieken in gebruik, namelijk een dynamische definitie gebaseerd op energiefluctuaties van het lichaamszwaartepunt en een kinematische definitie waarin de buiging van het standbeen tijdens het volcontact bepaald is. In de dynamische definitie van wandelen is van belang dat de voorwaartse kinetische energie van het lichaamszwaartepunt minimaal is wanneer de gravitatie-energie maximaal is. Vanaf het moment van steunopvang tot aan het midden van de volcontact-fase neemt de voorwaartse snelheid af naarmate het standbeen verder voorwaarts kantelt in de richting van de hoogste stand van het been. Kinetische energie wordt hierbij omgezet in gravitatie-energie. In de tweede helft van de steunfase beweegt het lichaamzwaartepunt weer naar beneden en wordt potentiële energie omgezet in kinetische energie (de gangnelheid neemt weer toe). Met andere woorden, bij wandelen fluctueren de kinetische energie en de gravitatie-energie uit fase. Bij rennen is dit net andersom: dan zijn kinetische en potentiële energie juist in fase (de gangnelheid is het kleinst wanneer het zwaartepunt het laagst is). De kinematische definitie gaat uit van een min of meer gestrekt standbeen tijdens de steunfase van wandelen en een gebogen standbeen bij volcontact tijdens rennen. De spatio-temporele, dynamische en kinematische kenmerken staan niet los van elkaar: de gravitatie-energie van het lichaamszwaartepunt is bij wandelen maximaal tijdens volcontact van het standbeen vanwege de gestrekte stand van het been op dat moment, terwijl de gravitatie-energie juist minimaal is tijdens volcontact bij rennen omdat het standbeen dan sterk gebogen is.

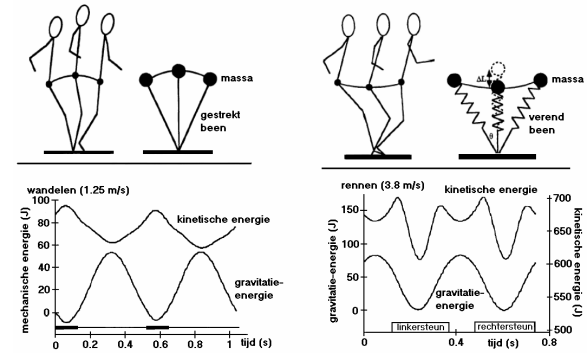


fig. 4 Wandelen versus rennen (Farley & Ferris[6]).

Figuur 4 illustreert het verband tussen de verschillende karakteriseringen van wandelen en rennen. Het toont tevens twee populaire, bijpassende wiskundige modellen van menselijke gang. Het meest simpele wiskundige model van wandelen gaat er van uit dat de knie tijdens de steunfase niet buigt maar gestrekt blijft en dat het steunbeen als een omgekeerde slinger beweegt, net alsof er sprake is van steltlopen. Verder verwaarlozen we in dit model het gewicht van de benen en veronderstellen we dat het lichaamszwaartepunt dezelfde positie heeft

als het heupgewricht en dus een cirkelvormige beweging maakt. In dit model, dat Saunders *et al* [7] geïntroduceerd en onderzocht hebben, wordt ook voorbijgegaan aan bekkenbewegingen tijdens wandelen, verplaatsingen van het lichaamsswaartepunt door andere houdingen, en het feit dat men een voet afwikkelt en niet simpelweg roteert om een vast voetpunt. Ondanks deze beperkingen geeft het model wel inzicht in de wandelbeweging. Het kan bijvoorbeeld gebruikt worden om een schatting te maken van de maximale wandelsnelheid. Bij rennen veert men tijdens de steunfase door de knie en enkel. Een sterk versimpeld model voor de beweging van het standbeen is dan dat van een massa-veer systeem [8,9]. Dit model is het hoofdonderwerp in de tweede helft van dit artikel.

### Hoe snel kun je wandelen?

Met Saunderson *et al*'s [7] model van een omgekeerde slinger kunnen we door toepassing van basisprincipes van natuurkunde de vraag naar de hoogste wandelsnelheid beantwoorden. Om te beginnen is het nodig om te weten dat een object dat een cirkelbeweging maakt versneld wordt in de richting van het centrum van de cirkel. Bij een gegeven snelheid  $v$  en een straal  $r$  is deze versnelling gelijk aan  $v^2/r$ . Dus: als de snelheid gelijk aan  $v$  is op het moment dat het standbeen rechtop staat dan is de versnelling naar beneden gericht en gelijk aan  $v^2/l$ , waarbij  $l$  de lengte van het standbeen is. Omdat de voeten van een wandelaar niet vastgelijmd zijn aan de ondergrond, kan het lichaam niet naar beneden getrokken worden; het kan alleen onder invloed van de zwaartekracht omlaag gaan. Dientengevolge kan het lichaamsswaartepunt, gelokaliseerd op de heup, niet naar beneden gaan met een grotere versnelling dan de valversnelling. Met ander woorden:  $v^2/l \leq g$ .

Het Froude getal wordt gedefinieerd als

$$\text{Froude getal} = \frac{v^2}{gl}$$

Als het Froude getal kleiner of gelijk aan 1 is, dan kan men nog steeds wandelen. Bij een Froude getal groter dan 1 moet men gaan rennen. In praktijk [10] gaat men al over op rennen bij een Froude getal van 0.5. Dit alles betekent dat de maximale loopsnelheid van een volwassene met een beenlengte van 90 cm in theorie op aarde ongeveer gelijk aan 3 m/s en dat deze persoon normaliter bij een snelheid van 2 m/s al overgaat op rennen. Reken op deze manier ook eens de maximale loopsnelheid voor deze persoon op de maan uit. Klopt dit met de televisiebeelden van lopende mannen op de maan? Waarom kunnen snelwandelaars trouwens harder gaan ( $\pm 4$  m/s)? Hoe doen ze dat? Zie referentie [10] voor een beter wiskundig model voor (snel)wandelen en een meer realistische schatting van de maximale gangsnelheid.

Het model van Saunders *et al* [6] geeft ook inzicht in de algemene vorm van de verticale grondreactiekracht tijdens wandelen met de typische M-vorm zoals in figuur 5 te zien is bij lage gangsnelheid, met een lokaal minimum

tijdens volcontact. Deze kracht verschilt kwalitatief van de verticale grondreactiekracht bij rennen, welke in figuur 5 weergegeven is in krommen bij een hoge gangsnelheid en met een maximum tijdens volcontact.

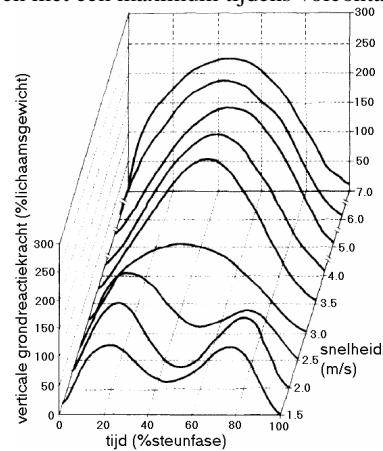


fig. 5 Verticale grondreactiekracht bij verschillende gangsnellheden van een man (Keller *et al* [11]). De overgang van wandelen naar rennen vindt plaats bij 3 m/s.

Dergelijke krommen van de verticale grondreactiekracht kunnen leerlingen ook zelf maken in een praktische opdracht m.b.v. een krachtenplatform [12,13]. Uit een kromme van de verticale grondreactiekracht kan de verticale verplaatsing van het lichaamsswaartepunt bepaald worden. Hoe dit gaat met Coach bespreken we in de volgende sectie over de analyse van een hurksprong

### Analyse van een hurksprong

We gaan op allerlei manieren de verticale verplaatsing van het lichaamsswaartepunt bij een hurksprong bepalen (vgl. [13]). De hurksprong, waarbij vanuit gehurkte houding omhoog gesprongen wordt met de handen op de heupen en zonder eerst verder in te zakken, is schematisch weergegeven in figuur 6.

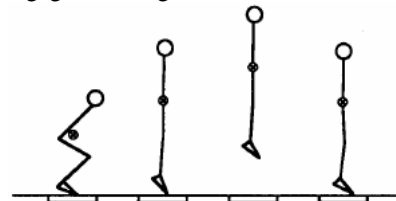


fig. 6 Fasen tijdens een hurksprong.

Figuur 7 is een schermafbeelding van een Coach activiteit waarin de verticale grondreactiekracht  $F$  met een krachtenplatform is gemeten, terwijl simultaan de sprongbeweging van een studente met een webcam opgenomen is. Synchrone meting met een sensor en filmopname van een gebeurtenis maakt het de student-onderzoeker gemakkelijker om bepaalde punten in de grondreactiekracht-tijd kromme in verband te brengen met gebeurtenissen tijdens de sprong (Figuur 8). In het diagram is ook het constante lichaamsgewicht  $M$ , gemeten tijdens de hurkstand van de springster op het krachtenplatform en na haar sprongbeweging ( $\approx 517,5$  N; 53 kg).

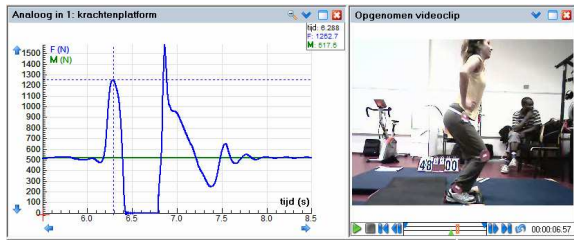


fig. 7 Verticale grondreactiekracht bij een hurksprong.

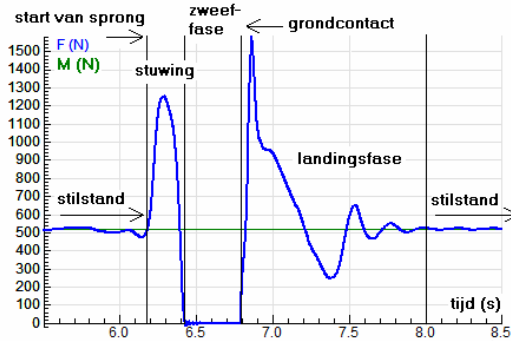


fig. 8 Gemeten grafiek van de verticale grondreactiekracht bij een hurksprong met hierin aangegeven de fasen en speciale momenten van de sprong.

De tweede wet van Newton ( $F = p'$ ), vertelt ons hoe de verandering in impuls  $p = mv$  tussen de start van de sprongbeweging en de afzet te bepalen uitgaande van de gemeten grondreactiekracht  $F$ , namelijk door integratie. Startend vanuit stilstand in hurkhouding ( $v_{\text{start}} = 0$  op tijdstip  $t_{\text{start}}$ ) tot aan het moment van de afzet ( $t_{\text{afzet}}$ ) en met de stuwkracht gelijk aan  $F - M = F - mg$  geeft dit:

$$\int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{afzet}}} (F - M) dt = mv_{\text{afzet}} - mv_{\text{start}},$$

waarbij  $m$  het gewicht van de springster in kg,  $M$  het lichaamsgewicht in N ( $M = mg$ ) en  $v_{\text{afzet}}$  de snelheid op het moment van loskomen van het krachtenplatform zijn. Uitwerken voor een stationaire startpositie geeft:

$$\left( \int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{afzet}}} F dt \right) - M \cdot t_{\text{stuwings}} = mv_{\text{afzet}},$$

waarbij  $t_{\text{stuwings}}$  de tijdsduur van het omhoog brengen van het lichaam is. De linkerkant bestaat uit de impuls tengevolge van de grondreactiekracht en de impuls tengevolge van het lichaamsgewicht van de springster, die allebei door integratie van de kracht-tijd grafiek bepaald kunnen worden. De oppervlakte onder de kromme kan in Coach numeriek bepaald worden met de gelijknamige data analyse faciliteit (Figuur 9). Dit levert een geschatte tijdsduur van 0,248 s voor het omhoog brengen van het lichaam, een impuls tengevolge van de grondreactiekracht ter grootte van 219,6 Ns, en een impuls tengevolge van het lichaamsgewicht ter grootte van 128,3 Ns. Hieruit volgt dat de afzetsnelheid  $v_{\text{afzet}}$  ongeveer gelijk is aan 1,7m/s voor de springster met een gewicht van 53kg.

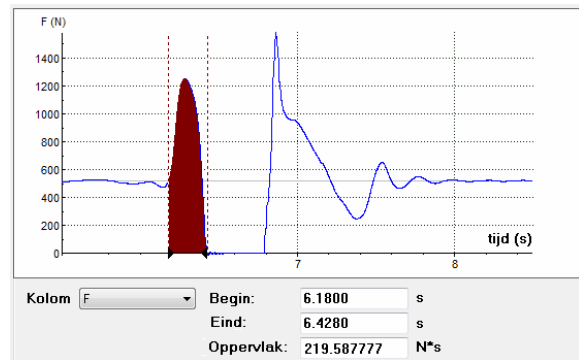


fig. 9 Bepaling van de oppervlakte onder een kromme.

De verworven kinetische energie bij de afzet wordt tijdens de zweeffase in gravitatie-energie omgezet en dit bepaalt als volgt de maximale spronghoogte  $\Delta h_{\text{zweeffase}}$ :

$$\frac{1}{2} mv_{\text{afzet}}^2 = mg \Delta h_{\text{zweeffase}}.$$

Dus:

$$\Delta h_{\text{zweeffase}} = \frac{v_{\text{afzet}}^2}{2g}.$$

Als we veronderstellen dat tijdens de zweeffase alleen zwaartekracht een rol speelt, dan is de versnelling van het lichaam constant en gelijk aan  $-g$ . Omdat de afzetsnelheid in grootte gelijk is aan de landingssnelheid en in richting tegengesteld moet dan het volgende gelden:

$$-gt_{\text{zweeffase}} = v_{\text{landing}} - v_{\text{afzet}} = -2v_{\text{afzet}}.$$

Dus:

$$t_{\text{zweeffase}} = 2v_{\text{afzet}}/g \text{ en } \Delta h_{\text{zweeffase}} = gt_{\text{zweeffase}}^2/8.$$

Als de afzetsnelheid of spronghoogte bekend is kunnen bovenstaande relaties gebruikt worden om de tijd dat de springster in de lucht is uit te rekenen. Omgekeerd, als de zweeftijd bekend is, dan kan hiermee de afzetsnelheid en spronghoogte berekend worden. In ons geval komt de vastgestelde afzetsnelheid van 1,7 m/s overeen met een spronghoogte van 14,7 cm en een zweeftijd van 0,347 s. Deze berekende zweeftijd stemt prima overeen met de gemeten en geobserveerde zweeftijd van 0,35 s.

De snelheid-tijd grafiek kan in Coach geconstrueerd worden door de integratietool uit de data analyse gereedschapskist toe te passen op de stuwkracht en deze te delen door het gewicht van de springster. Figuur 10 toont het resultaat voor de opgemeten hurksprong. Op deze manier is de vastgestelde maximale snelheid van het lichaamsswaartepunt ongeveer 1.85 m/s.

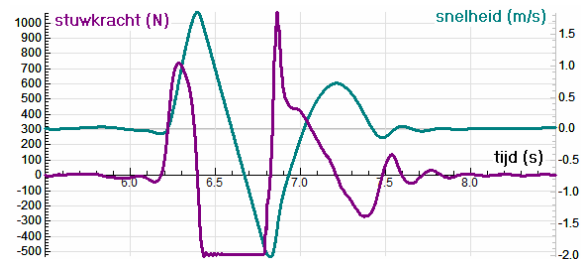


fig. 10 Bepaling van de snelheidskromme via integreren

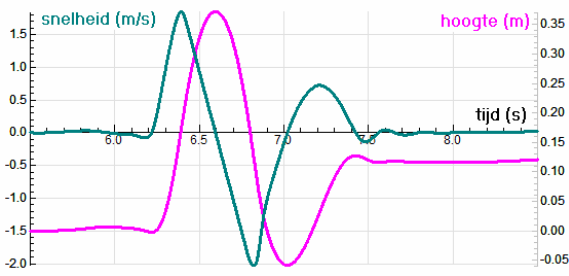


fig. 11 Bepaling van de hoogtekromme via integreren.

De hoogte-tijd grafiek kan op soortgelijke wijze weer bepaald worden door integratie van de snelheid-tijd grafiek. Figuur 11 toont het resultaat voor de hurksprong. De hoogteverandering van het lichaamszwaartepunt t.o.v. de starthouding is nu ongeveer 37 cm en de hoogte na landing van de springster is 12 cm. Dit kan misleidend zijn en tot de verkeerde conclusie leiden dat spronghoogte gelijk aan 25 cm is, een waarde die aanmerkelijk hoger is dan eerder op basis van de afzetsnelheid bepaald is. De fout is dat de vluchthoogte moet bepaald worden op basis van de berekende hoogten op het moment van afzet en landing. Als dit gedaan wordt en de gemiddelde hoogte van 23,5 cm voor afzet en landing gekozen wordt, dan is de spronghoogte gelijk aan 13,5 cm. Dit is dicht bij de eerder gevonden waarde.

De resultaten over afzetsnelheid, spronghoogte en de tijdsduur van de zweeffase kunnen door videoanalyse van de opgenomen film geverifieerd worden. Bijvoorbeeld kun je door numerieke differentiëren de snelheidsgrafiek bepalen en de afzetsnelheid van 1,65 m/s aflezen. In figuur 12 worden de met het krachtenplatform berekende hoogte van het lichaamszwaartepunt vergeleken met de gemeten hoogte in de video clip. Het is altijd weer een groot genoeg wanneer theorie en meting zo mooi overeenstemmen. Leerlingen kunnen op soortgelijke manier ook andere sprongbewegingen onderzoeken en met elkaar vergelijken. Bijvoorbeeld kunnen ze nagaan of je inderdaad hoger springt wanneer je eerst inzak of een aanloop neemt.

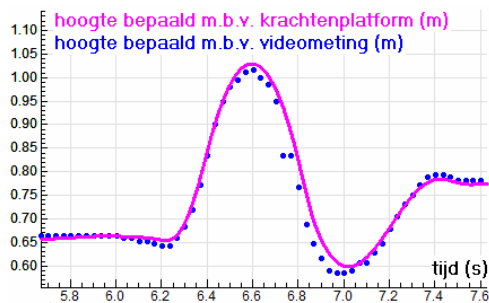


fig. 12 Vergelijking van resultaten uit video analyse met resultaten uit metingen met het krachtenplatform.

### Verticaal huppen op een springstok

In het indexexamen natuurkunde 2008 verscheen Thomas met zijn springstok ten tonele, zie bijgaande foto. Een springstok bestaat uit een holle cilinder gevuld met lucht

en daaronder een springpoot. Tussen cilinder en springpoot zitten twee voetsteunen en een zuiger. In de beweging van de springstok kan men twee fasen onderscheiden:

- De zweeffase: de punt van de springstok is los van de grond. De stok is maximaal uitgeschoven en beweegt star en uitsluitend onder invloed van de zwaartekracht.
- De grond- of contactfase: de punt van de springstok staat vast op de grond. De springpoot schuift met de zuiger in de cilinder waardoor de druk net als bij een fietspomp verhoogd wordt. Vervolgens veert de springpoot terug.



Thomas bleek comfortabel te kunnen springen als de zweeffase en de grondfase ongeveer even lang duurden.

Deze overzichtelijke situatie laat zich goed in een wis- en natuurkundig model beschrijven. Om goede parameterwaarden te krijgen en het model te valideren, moet het vergeleken worden met de realiteit. Daartoe kan men de beweging net als bij de analyse van de hurksprong op video vastleggen en analyseren met voor dat doel ontwikkelde software, bijvoorbeeld met Coach.

### Het massa-veer model van verticaal huppen op een springstok

De beweging van Thomas op zijn springstok vormt een bron van inspiratie voor de beschrijving van natuurlijke menselijke sprongbewegingen met een omgekeerd veersysteem. Dit massa-veer model is schematisch weergegeven in figuur 13. In het model wordt de massa van de veer verwaarloosd en wordt de periode van één hup onderverdeeld in twee fasen, namelijk de contactfase (met contacttijd  $t_c$ ) en de zweeffase (met zweeftijd  $t_z$ ). Ook nemen we aan dat Thomas in staat is verticaal te huppen op de springstok zonder zijn lichaamshouding noemenswaardig te veranderen en dat zijn lichaamszwaartepunt zich ongeveer bevindt ter hoogte van de handvaten van de springstok. Bij het neerkomen van de springstok is de hoogte gelijk aan de rustlengte  $L$  van de stok.

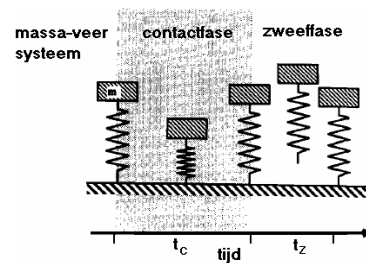


fig. 13 Massa-veer model van verticaal springen.

Ook nu kunnen we een zweeffase en een fase van grondcontact onderscheiden, met als verschil dat in de zweeffase alleen de zwaartekracht  $F_z = mg$  werkt en in de

contactfase zowel  $F_z$  als de veerkracht  $F_v = C(L - y)$ . Hierin wordt voor hoogte  $y \leq L$  de elasticiteit van het doorveren beschreven met een nog onbekende veerconstante  $C$ . Nu ligt de dynamiek van het systeem vast in een tweede orde differentiaalvergelijking en twee randvoorwaarden:

$$a = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{F_z + F_v}{m} = \frac{F}{m} \quad \text{met } y(0) = y_0 \text{ en } \frac{dy}{dt}(0) = v_0.$$

Dit kan herschreven worden als stelsel van twee eerste orde differentiaalvergelijkingen:

$$v = \frac{dy}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{F_z + F_v}{m} = \frac{F}{m}, \quad y(0) = y_0, \quad v(0) = v_0.$$

Een grafisch weergave van dit stelsel ten behoeve van een numerieke berekening met de modelleromgeving van Coach 6 oogt als volgt:

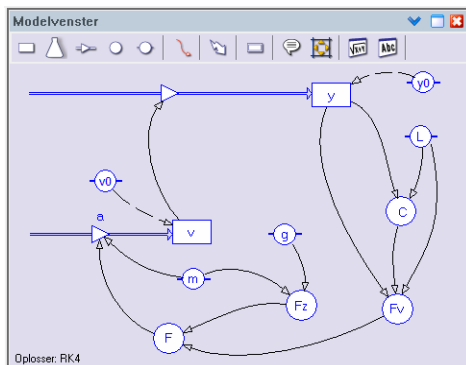


fig. 14 Massa-veer model in Coach.

Hierin stelt elke combinatie van een rechthoekig symbool met instroompijl de integratie van de betreffende grootte voor. In het gegeven voorbeeld wordt  $y$  geïntegreerd en symboliseert de pijl de afgeleide van  $y$ . We kunnen een simulatie van dit model uitvoeren, maar het is wel zo interessant om resultaten van een modelberekening te kunnen vergelijken met meetresultaten. Hoogtemeting in een filmpje maakt dit mogelijk. Het resultaat van een videometing is in figuur 15 te zien. Het blijkt dat als eerste experimenteel model een sinusbenadering kan fungeren. Hoe mooi het ook lijkt, toch is dit een zwakgebod omdat je hiermee geen enkele onderbouwing voor het resultaat hebt. Interessanter is het om het massa-veer systeem te beproeven. Om een goede overeenstemming met de videometing te verkrijgen blijken de volgende parameterwaarden gekozen te moeten worden (zie figuur 16):

- $C = 12,7 \text{ kN/m}$  als  $y \leq L$ , anders  $C = 0$ .
- $L = 1,10 \text{ m}$
- $m = 70 \text{ kg}$
- $g = -9,81 \text{ m/s}^2$
- $y_0 = 1.19 \text{ m}$ ,  $v_0 = 0 \text{ m/s}^2$

We krijgen een oplossing die stuksgewijs en alternerend een sinus- en een paraboolvorm heeft (het verschil is met het blote oog moeilijk waar te nemen).

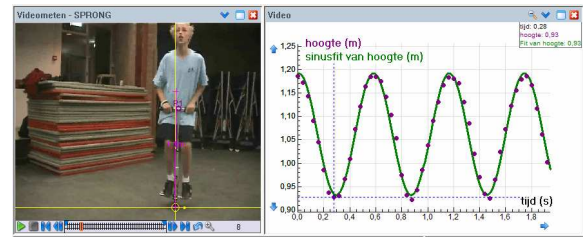


fig. 15 Videometing van de hoogte van het lichaamszwaartepunt bij verticaal huppen op een springstok en een sinusbenadering hiervan.

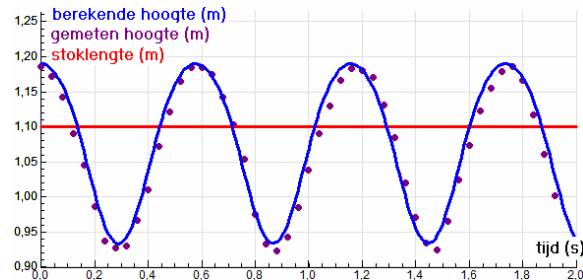


fig. 16 Vergelijking van modelresultaten met de meting.

Ter controle van het model kan men het verloop van de drie voorkomende energievormen bestuderen. Deze zijn gedefinieerd als:

- $E_k = \frac{1}{2} m v^2$  : kinetische energie;
- $E_z = m g y$  : gravitatie-energie;
- $E_v = \frac{1}{2} C (L - y)^2$  : veerenergie ( $C = 0$  in zweeffase).

Bij een correct model is de som van deze energieën constant in de tijd. Figuur 17 toont dat alles in orde is wat betreft behoud van energie in het model.

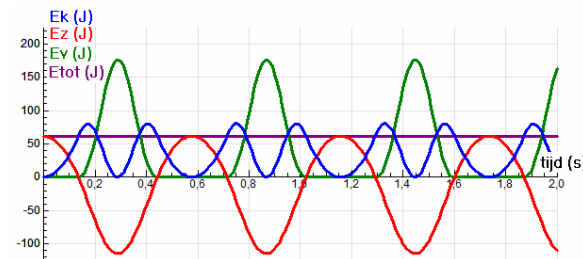


fig. 17 Energievormen in het massa-veer model.

## Het massa-veer model van verticaal huppen zonder hulpmiddelen

Je kunt je terecht afvragen of het massa-veer model ook wel goed werkt bij verticaal huppen zonder gebruik te maken van hulpmiddelen. Als dit niet lukt, dan hoeft je aan een dergelijk model voor voorwaarts huppen al helemaal niet te beginnen. Daarom hebben we op het Universitaire Sport Centrum van de UvA studenten verticaal en voorwaarts laten huppen op een gemotoriseerde loopband. Met een hogesnelheidscamera zijn de bewegingen op film vastgelegd, met een beeldsnelheid van 300 fps om alle details te kunnen waarnemen en om een hoge tijdsresolutie te kunnen bereiken.

Om meer inzicht te krijgen in de beweging van het lichaamszwaartepunt tijdens de contactfase van huppen gaan we het massa-veer model eerst nog even exact oplossen. Het steunbeen (in dit geval eigenlijk allebei de benen) wordt opgevat als een massaloze veer met stijfheid  $C$  en rustlengte  $L$ . Voor het gemak stellen we de tijd  $t = 0$  op het moment van het eerste contact met de loopband (in een videometing kunnen we dit in Coach ook eenvoudig regelen) en gaan we uit van een landingsnelheid gelijk aan  $-v$ , waarbij  $v$  een positieve grootte is. De verticale positie van het lichaamszwaartepunt wordt gelijk gekozen aan de positie van het heupgewricht van de huppelaarster (zie figuur 18 voor de videometing). Onder de aanname dat alleen gravitatie- en veerkracht een rol spelen, levert de tweede wet van Newton en de wet van Hooke de volgende bewegingsvergelijking voor de hoogte  $y$  tijdens de contactfase op:

$$my = -mg + C(L - y), \quad y(0) = L, \quad y'(0) = -v.$$

Als  $u = y - L$  de uitwijking tijdens grondcontact is, dan kan de bewegingsvergelijking herschreven worden als:

$$u'' + \omega^2 u = -g, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = -v,$$

waarbij de natuurlijke frequentie  $\omega$  gegeven wordt door  $\omega^2 = \frac{C}{m}$ . Deze vergelijking is exact oplosbaar en levert een sinusoïde op:

$$u(t) = -\frac{v}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{g}{\omega^2} \cos(\omega t) - \frac{g}{\omega^2}.$$

Hieruit kun je de snelheidsformule afleiden:

$$v(t) = -v \cos(\omega t) - \frac{g}{\omega} \sin(\omega t).$$

Halverwege de contacttijd is het steunbeen maximaal gebogen en de snelheid van het lichaamszwaartepunt is dan gelijk aan nul. Dit levert het volgende verband op:

$$-v \cos\left(\frac{1}{2}\omega t_c\right) - \frac{g}{\omega} \sin\left(\frac{1}{2}\omega t_c\right) = 0$$

Oftewel, de contacttijd wordt vastgelegd door:

$$t_c = \frac{2\pi}{\omega} - \frac{2}{\omega} \arctan\left(\frac{\omega \cdot v}{g}\right).$$

Wat we kunnen leren uit de laatste formule is dat de beweging tijdens grondcontact afhangt van drie van de volgende vier factoren: (1) de valversnelling  $g$ ; (2) de natuurlijke frequentie  $\omega$  van het massa-veer systeem; (3) de afzet- of landingsnelheid  $v$ ; (4) de contacttijd  $t_c$ . Vanwege de definitie van de natuurlijke frequentie kun je deze bepalende factor ook vervangen door de veerconstante  $C$  (stijfheid), mits het gewicht van de springer bekend is. Kortom, door wiskunde te gebruiken kan men meer onderbouwde uitspraken over het beweging doen en afhankelijkheden van bepalende factoren in gangpatronen onderzoeken.

De exacte oplossing van de uitwijking kan ook gebruikt worden om de natuurlijke frequentie en landingsnelheid te schatten op basis van metingen. In figuur 18 is zo'n videoanalyse te zien. De best passende sinusfit is:

$$y(t) = 0,12 \sin(21,25t + 2,95) + 0,88.$$

Dit correspondeert met:

$$u(t) = -0,118 \sin(21,25t) - 0,023 \cos(21,25t) - 0,02.$$

Dit resultaat leidt tot de volgende eerste schattingen:

$$\omega = 21,25 \text{ Hz}, \quad v = 2,5 \text{ m/s}$$

Deze landingssnelheid is maar een klein beetje groter dan de gemeten snelheid van 2,3 m/s in de videoanalyse. Deze waarden geven een contacttijd van 0,17 s, hetgeen ook maar een klein beetje kleiner is dan de gemeten contacttijd van 0,19 s (voor deze precisie is het gebruik van een hogesnelheidscamera nodig). Net als bij opwaarts springen uit hurkstand kun je op basis van de afzetsnelheid de zweeftijd uitrekenen:  $t_z \approx 0,47$  s. Dit wijkt maar een beetje af van de in het filmpje waargenomen zweeftijd van 0,40 s. Kortom, het massa-veer model lijkt resultaten op te leveren die aardig overeenstemmen met videometingen. De overeenstemming tussen model en videometing worden nog beter wanneer we niet een goede sinusfit bij de metingen opsporen, maar m.b.v. de modelleromgeving geschikte parameterwaarden voor het massa-veer model proberen te vinden. Voor de huppende studente in figuur 18 hebben we zo een prima match tussen model en videometing gevonden die stand houdt voor negen achtereenvolgende hupjes:

$$C = 19 \text{ kN/m}, \quad v = 1,95 \text{ m/s}.$$

De stijfheid  $C$  stemt overeen met literatuurwaarden [14]. Deze waarden leveren nog meer resultaten op:

$$\omega = 18,9 \text{ Hz}, \quad t_c = 0,19 \text{ s}, \quad t_z = 0,40 \text{ s}.$$

De som van de contacttijd en de zweeftijd is gelijk aan de schredetijd  $T$ . De simulatie levert een schredetijd van 0,59 s op, hetgeen correspondeert met een hupfrequentie ( $f = T^{-1}$ ) van 1,7 Hz.

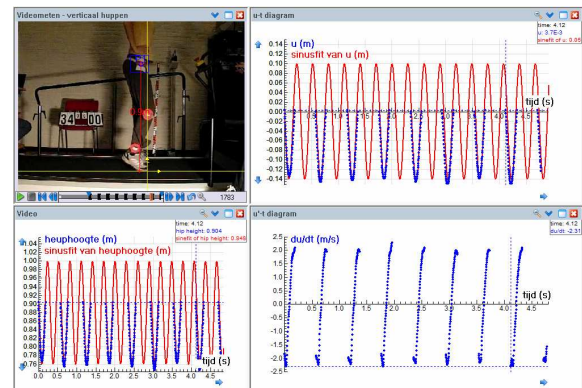


fig. 18 Videoanalyse van verticaal huppen.

## Het massa-veer model van voorwaarts huppen

De kroon op ons werk moet de toepassing van het massa-veer model op voorwaarts huppen worden. Het model wordt nu tweedimensionaal, dus om te beginnen wordt het massa-veer model van verticaal huppen als het ware verdubbeld door naast het viertal grootheden  $(y, v_y, a_y, F_y)$  nu ook het viertal  $(x, v_x, a_x, F_x)$  in te voeren. Grootheden als snelheid en kracht worden dan ontbonden in de  $x$ - en  $y$ -richting. Een schematische voorstelling van dit proces wordt gepresenteerd in figuur 19.

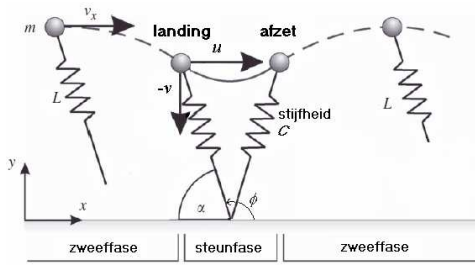


fig. 19 Massa-veer model van voorwaarts huppen.

Figuur 19 representeert een voorwaarts springende punt-massa  $m$  die ondersteunt wordt door een massaloze veer met stijfheid  $C$ , landingshoek  $\alpha$ , verticale landingsnelheid  $-v$  en horizontale landingsnelheid  $u$ . In vergelijking met verticaal huppen zijn er twee condities bijgekomen: de aangrijpingshoek  $\alpha$  van het steunbeen bij landing (plaats) en de aangrijpingshoek  $\beta$  van de snelheid bij landing. Deze aangrijpingshoeken zijn het eenvoudigst te definiëren wanneer we het steunpunt tijdens de steunfase als oorsprong van het assenstelsel kiezen, met de positieve  $x$ -as in de richting van de voortbeweging en de positieve  $y$ -as naar boven gericht, en wanneer we aannemen dat het lichaam landt op tijdstip  $t = 0$ :

$$\tan \alpha = -\frac{y(0)}{x(0)} \text{ en } \tan \beta = \frac{v}{u}.$$

Deze landingshoeken  $\alpha$  en  $\beta$  hoeven niet gelijk aan elkaar te zijn. Het is niet moeilijk om deze hoeken uit opgenomen videobeelden te bepalen: de Coach software levert immers grafieken van plaats en snelheid, waaruit aangrijpingshoeken af te leiden zijn. De hoek van landing t.o.v. de horizontaal is gelijk aan  $\alpha$ , de richtingshoek van de snelheid t.o.v. de horizontaal is gelijk aan  $\beta$ . Hierbij moet worden opgemerkt dat de waarden van  $\alpha$  en  $\beta$  in een computermodel bij gegeven waarden van beenlengte

$L = \sqrt{x(0)^2 + y(0)^2}$  en landingsnelheid  $v(0) = \sqrt{u^2 + v^2}$  niet geheel onafhankelijk gekozen kunnen worden, wil het model de gewenste periodiciteit vertonen. Per slot van rekening zullen hiervoor de afzethoeken gelijk moeten zijn aan de landingshoeken. Onder deze omstandigheden geldt voor de conditie voor de contactfase en dus voor het werkzaam zijn van de veerkracht:  $y \leq L \sin \alpha$ .

Komen we nu tot de afleiding van de bewegingsvergelijking tijdens de steunfase. Voor de totale veerkracht geldt volgend de wet van Hooke:  $F_v = C(L - r)$ , met veerlengte  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  en veerconstante  $C$ . Ontbinding betekent:  $F_{v,x} = F_v \cos \phi$  en  $F_{v,y} = F_v \sin \phi$ . Dus geldt:  $F_{v,x} = F_v \frac{x}{r}$  en  $F_{v,y} = F_v \frac{y}{r}$ . Met andere woorden:

$$F_{s,x} = C x \left( \frac{L}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 \right), \quad F_{s,y} = C y \left( \frac{L}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 \right)$$

Hieruit volgt het volgende beginwaardenprobleem tijdens de steunfase:

$$x'' = \omega_v^2 \left( \frac{L}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 \right) x, \quad y'' = \omega_v^2 \left( \frac{L}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 \right) y - g,$$

$$x(0) = -L \cos \alpha, \quad x'(0) = u, \quad y(0) = L \cos \alpha, \quad y'(0) = -v.$$

Dit kan als volgt herschreven worden

$$x'' = -\omega_s^2 x + \frac{g \lambda x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad y'' = -g - \omega_s^2 y + \frac{g \lambda y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$x(0) = -L \cos \alpha, \quad x'(0) = u, \quad y(0) = L \cos \alpha, \quad y'(0) = -v,$$

waarbij

$$\omega_v^2 = \frac{C}{m}, \quad \omega_p^2 = \frac{g}{L}, \quad \lambda = \frac{\omega_v^2}{\omega_p^2}.$$

Het grootste verschil met verticaal huppen is dat de beenlengte, geparametriseerd via  $\lambda$ , een serieuze rol speelt in het modelleren van de beweging van het zwaartepunt tijdens de steunfase.

We zijn nu bijna volledig klaar om een computermodel voor de voorwaartse hupbeweging in Coach te bouwen. Eerst moeten we ons nog realiseren dat het zwaartepunt tijdens periodiek huppen tijdens de zweeffase een paraboolbaan aflegt die start in  $(L \cos \alpha, L \sin \alpha)$  met een horizontale afzetsnelheid  $u$  en een verticale afzetsnelheid  $v$ . Het beginwaardenprobleem is immers voor deze fase:

$$x'' = 0, \quad x'(t_c) = u, \quad x(t_c) = L \cos \alpha,$$

$$y'' = -g, \quad y'(t_c) = v, \quad y(t_c) = L \sin \alpha.$$

Ten tweede moeten we het probleem van een bewegend assenstelsel van het ene steunpunt naar het andere steunpunt oplossen. In een Coach model biedt de facilititeit om een gebeurtenis te implementeren uitkomst. Als triggerconditie voor landing van de huppende persoon kunnen we de volgende Boolse expressie gebruiken:

$$y \leq y_{start} \text{ en } y' \leq 0 \text{ en } x + x_{start} > 0,$$

waarbij startcoördinaten  $x_{start}$  en  $y_{start}$  gegeven zijn door

$$x_{start} = -L \cos \alpha \text{ en } y_{start} = L \sin \alpha.$$

Het idee is dat men start met een coördinatenstelsel met de oorsprong als eerste steunpunt. In de variabele  $x_0$  wordt de huidige waarde van de  $x$ -coördinaat van de oorsprong van het bewegende assenstelsel bewaard. Telkens wanneer de gebeurtenis van landing optreedt wordt de variabele  $x_0$  ververs met de  $x$ -coördinaat van het nieuwe steunpunt via de toewijzing  $x_0 = x + L \cos \alpha$ .

Om het massa-veer model op waarde te kunnen inschatten voor voorwaarts huppen hebben we weer een video clip opgenomen van dezelfde studente als eerder in figuur 18, maar nu met huppen op een gemotoriseerde loopband die met een snelheid van 3 km/h beweegt. De via automatische videometing bepaalde hoogte-tijd grafiek wordt in figuur 20 getoond. Deze meting wordt als achtergrondgrafiek gebruikt om met vallen en opstaan geschikte parameterwaarden voor het computermodel te vinden. Dit is best lastig omdat kleine wijzigingen in waarden al de periodiciteit van de beweging verstoren. Maar de beloning is groot: figuur 21 laat zien dat een perfecte match bereikt kan worden.



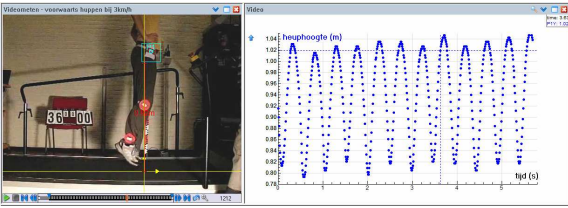


fig. 20 Videoanalyse van voorwaarts huppen.

De parameterwaarden zijn dan:

$$C = 28000 \text{ N/m}, \quad u = 0,84 \text{ m/s},$$

$$v = 1,95 \text{ m/s}, \quad L = 0,91 \text{ m}, \quad \alpha = 86,0003.$$

Hieruit kunnen de volgende interessante grootheden afgeleid worden:

$$\omega = 23,0 \text{ Hz}, \quad \omega_p = 10,8 \text{ Hz}, \quad t_z = 0,40 \text{ s}, \quad t_c = 0,2 \text{ s}.$$

In vergelijking met verticaal huppen moet de student bij voorwaarts huppen met een gangsnelheid van 3 km/h een grotere beenstijfheid hanteren. Ook is de veerfrequentie  $\omega$  groter dan voorheen Toch heeft dit weinig of geen effect op de zweeftijd of de tijdsduur van de steun-

fase. De gangsnelheid is kennelijk nog te langzaam geweest om aanmerkelijke verschillen in het bewegingspatroon ten toon te spreiden. Allen de beenstijfheid moet verhoogd worden om een korte contacttijd te houden.

Ter controle van het model kan men het verloop van de drie voorkomende energievormen bestuderen. Deze zijn gedefinieerd als:

- $E_k = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2)$ : kinetische energie;
- $E_z = mg (y - L \sin \alpha)$ : gravitatie-energie;
- $E_v = \frac{1}{2} C (L - r)^2$ : veerenergie ( $C = 0$  in zweeffase).

Bij een correct model is de som van deze energieën constant in de tijd. In figuur 21 is te zien dat dit klopt voor de implementatie van het massa-veer systeem. Het x-y diagram rechtsboven laat ook in een oogopslag zien dat de gesimuleerde beweging nagenoeg periodiek is. De grafiek rechtsonder toont een opmerkelijk goede match-ing van computermodel met videometing.

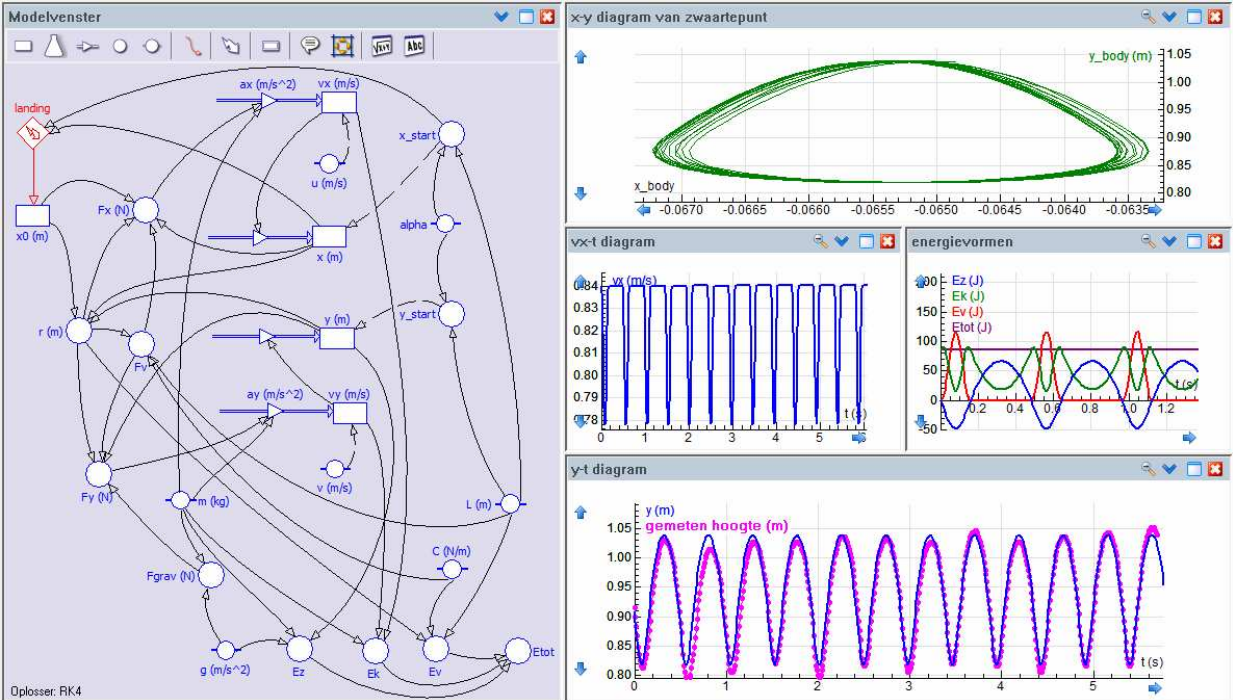


fig. 21 Coach simulatie van het massa-veer model van voorwaarts huppen.

## Conclusie

Keren we tot slot terug bij de twee vragen gesteld in de inleiding. Hoe eenvoudig of complex moet een dergelijk model zijn om goed overeen te stemmen met de realiteit? Het is frappant dat het massa-veer model dat op elementaire wis- en natuurkundige principes gebaseerd is zo'n goede beschrijving geeft van springende menselijke gang. Bullimore en Burn [15] bevestigen dat het model goede voorspellingen oplevert voor een groot aantal gangkenmerken, zoals bijvoorbeeld de tijdsduur van de steunfase, de verticale impuls en de lengte van de

schrede, maar zij merken ook op dat het model regelmatig de horizontale grondreactiekracht, de zweeftijd en de verandering in mechanische energie van het lichaamszwaartepunt overschat. De kracht van het wiskundige model zit hem overigens voornamelijk in de mogelijkheden die de onderzoeker geeft om allerlei aspecten van springende gangpatronen onder de loep te nemen zoals stapfrequenties, grondreactiekrachten, stabiliteit van gangpatronen en energiekosten van menselijke gang. Ook kan men hiermee verschillende prestaties met elkaar te vergelijken Denk bijvoorbeeld aan de recente casus waarin de internationale atletiekunie de

beslissing moest nemen of de paralympisch hardloper Oscar Pistorius met zijn sprintprothese wel of niet deel mocht nemen aan de 2008 olympische spelen in Beijing. Biomechanisch onderzoek wees uit dat een sprintprothese de gebruiker een aanmerkelijk voordeel biedt t.o.v. een atleet die hier geen gebruik van maakt. Van groter algemeen belang is eigenlijk dat een wiskundig model zoals het massa-veer model kan helpen bij het aanmeten van de juiste sportprothese voor een paralympisch atleet [16]. Wie toch niet helemaal tevreden is kan altijd nog zijn of haar toevlucht nemen tot aangepaste massa-veer modellen, die zowel voor wandelen als rennen ontwikkeld zijn (zie bijvoorbeeld [17]).

De tweede vraag in de inleiding luidde als volgt: Kunnen vwo leerlingen zo'n onderzoek ook doen? Uit ervaringen met pas ingestroomde natuurkundestudenten die met *Mathematica* een massa-veer systeem succesvol modelleerden mogen we stellen dat vwo leerlingen met grote interesse en bekwaamheid in natuurkunde het modelleerproces zeker aankunnen. Maar belangrijker is naar onze mening dat ook minder getalenteerde leerlingen m.b.v. Coach in staat zijn interessant bewegingsonderzoek te doen dat dicht staat bij de praktijk van professionals. Videoanalyse, metingen met sensoren en computermodellering maken het mogelijk om experimenten en theorie met elkaar in verband te brengen en om lichaamsbewegingen systematisch te onderzoeken en te vergelijken. Daar komt wis- en natuurkunde bij kijken. Vanuit wiskundig onderwijs bezien geeft de analyse van de hurksprong een mooi voorbeeld van interessante toepassing van de oppervlakte onder een kromme en van numerieke integratie. Ook kunnen leerlingen bij dergelijke onderzoeken nog veel meer facetten van wiskunde oefenen en in praktijk brengen: denk bijvoorbeeld aan het interpreteren van grafieken, numeriek differentiëren, dataverwerking en regressie. Maar misschien is het allerbelangrijkste van de in dit artikel beschreven mogelijkheden van onderzoek van menselijke gang wel dat leerlingen op deze manier actief bezig kunnen zijn met hun verworven wiskundige en natuurkundige kennis, dat ze vaardigheden kunnen verdiepen en dat ze direct ervaren dat op het eerste gezicht complexe situaties met relatief eenvoudige wis- en natuurkunde bestudeerd kunnen worden. Deze exacte vakken gaan niet alleen over abstracte zaken maar hebben ook concrete, voor leerlingen begrijpelijke en haalbare toepassingen.

*Met dank aan Maurice Maas (Universitair Sport Centrum, UvA) voor zijn hulp bij de uitvoering van de experimenten en de deelnemende studenten van de Master of Mathematics and Science Education opleiding.*

André Heck, Peter Uylings,  
AMSTEL Instituut, Universiteit van Amsterdam,  
a.j.p.heck@uva.nl, p.h.m.uylings@uva.nl

#### Noten

- [1] Heck, A. (2002). Stilstaan bij lopen. *Nieuwe Wiskrant*, **22** (1), 44–50.
- [2] Rose, J., & Gamble, J.G. (2006) *Human Walking* (3rd ed.). Philadelphia: Lippincott Williams & Wilkins.
- [3] Segers, V. (2006). *A Biomechanical Analysis of the Realization of Actual Human Gait Transition*. Proefschrift, Universiteit Gent. <http://hdl.handle.net/1854/7499>
- [4] Vaughan, C.L. (1984). Biomechanics of running gait. *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, **12** (1), 1–48.
- [5] Durward, B.R., Baer, G.D., & Rowe, P.J. (2001). *Functional Human Movement*. Oxford, Butterworth Heinemann.
- [6] Farley, C.T., & Ferris, D.P. (1998). Biomechanics of walking and running: from center of mass movement to muscle action. *Exercise and Sports Sciences Reviews*, **26**, 253–285. [www-personal.umich.edu/~ferrisd/Farley&Ferris,1998.pdf](http://www-personal.umich.edu/~ferrisd/Farley&Ferris,1998.pdf)
- [7] Saunders, J., Inman, V., & Eberhart, H. (1953). The major determinants in normal and pathological gait. *Journal of Bone and Joint Surgery. American Volume*, **35** (3), 543–558.
- [8] Blickhan, R. (1989). The spring-mass model for running and hopping. *Journal of Biomechanics* **22** (11/12), 1217–1227.
- [9] McMahon, T.A., & Cheng, G.C. (1990). The mechanics of running: how does stiffness couple with speed? *Journal of Biomechanics*, **23** (1), 65–78.
- [10] Trowbridge, E.A. (1982). Walking or running? When does lifting occur? *Mathematical Spectrum* **15** (3), 77–81.
- [11] Keller, T.S., Weisberger, A.M., Ray, J.L., Hasan, S.S., Shiavi, R.G., & Spengler, D.M. (1996). Relationship between vertical ground reaction force and speed during walking, slow jogging, and running *Clinical Biomechanics*, **11** (5), 253–259.
- [12] Cross, R. (1999). Standing, walking, running, and jumping on a force plate. *American Journal of Physics*, **67** (4), 304–309.
- [13] Linthorne, N.P. (2001). Analysis of standing vertical jumps using a force platform. *American Journal of Physics*, **69** (11), 1198–1204.
- [14] Farley, C.T., Blickhan, R., Saito, J., & Taylor, R. (1991). Hopping frequencies in humans: A test of how springs set stride frequency in bouncing gaits. *Journal of Applied Physiology*, **71** (6), 2127–2132.
- [15] Bullimore, S.R., & Burn, J.F. (2007). Ability of the planar spring-mass model to predict mechanical parameters in running humans. *Journal of Theoretical Biology*, **248** (4), 686–695.
- [16] Huygens, M., & Verbert, K. (2009). *Sprint en prothese: de optimale stijfheid van de sprintlepel*. Afstudeerverslag, Opleiding Bewegingstechnologie, Haagse Hogeschool. <http://documentatiecentrum.kortermaarkrachtig.com/scriptiestijfheidsportlepel.pdf>
- [17] Geyer, H. (2005). Simple Models of Legged Locomotion on Compliant Limb Behavior. Proefschrift, Friedrich-Schiller-Universität, Leipzig. [www.lauflabor.uni-jena.de/files/HartmutData/Geyer05PhDThesis.pdf](http://www.lauflabor.uni-jena.de/files/HartmutData/Geyer05PhDThesis.pdf)