Handout bij Magische Wiskunde en de Prijsvraag 2009

door
Matthijs Coster

PYTHA GORAS

www.pythagoras.nu
6 februari 2010

Over Pythagoras

Pythagoras is een Wiskunde tijdschrift voor jongeren
… maar ook ouderen
Bestaat al 49 jaar!

Onderwerpen:

- Nootjes,
- Thema: Beroepen,
- Pythagoras Olympiade,
- journaal/post,
- Losse artikelen,
- … en nog veel meer,

In 2011 wordt er een groot feest georganiseerd in het kader van ons 50 jarig bestaan. Er wordt een jubileumboek uitgegeven. Op het ogenblik wordt er gekeken in hoeverre we kunnen aansluiten bij de komst van de Internationale Wiskunde Olympiade naar Nederland.

Dit zijn een paar recentere voorkanten van Pythagoras. De redactie is bezig met het digitalise-ren van Pythagoras. De totale uitgave van Pythagoras zal op de website (www.pythagoras.nu) worden geplaatst.

Oudere Prijsvragen

- 4444
  maak met 4 vieren de getallen 1 t/m 100
- Escher
  maak een tekening of kunstwerk met thema Esher.
- Veelvlakken
  Maak een tekening of kunstwerk met thema veelvlakken.
- PriemPrijsvraag
  Maak met de getallen 2, 3, 5, 7, en 11 de getallen 1 t/m 200.
- Costergetallen
  Maak met de cijfers van een getal het getal zelf.
- Pygram
  Een puzzel gebaseerd op Tangram.
- Pyth-actie
  Maak opgaven met een aantal getallen die tevens gelden voor het aantal letters van die getallen.

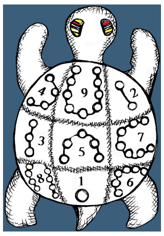
Prijsvraag 2009

- Magische Vierkanten
- Andere magische figuren
- Geomagische vierkanten

Iets over Magische Vierkanten

In een n x n vierkant worden de getallen 1 t/m n^2 ingevuld, zodanig dat de getallen van elke rij, elke kolom en de beide diagonalen gelijke som hebben.

Lo Chu



Magisch vier-kant van 3 x 3, wel bekend van Lo Chu, 2800 voor Chr.

Albrecht Dürer

Melancholia

Een bekend magisch vierkant komt voor op de gravure Melencolia I (melancholie) van Albrecht Dürer uit 1514. In 2007 werd Melencolia I, prent uit de collectie Fodor van het Amsterdams Historisch Museum tentoongesteld in het Armando Museum in Amersfoort. Daar brak op 22 oktober een felle brand uit. Hierbij is dit werk verloren gegaan. De gravure is nog te bezichtigen in o.m Museum Boijmans Van Beuningen, Rotterdam en Metropolitan New York.

Antoni Gaudí

Sagrada Familia

De Sagrada Família (Heilige Familie), of, voluit, Templo Expiatorio de la Sagrada Família, is een basiliek in de Spaanse stad Barcelona, ontworpen door Antoni Gaudi, gebouwd (te bouwen) 1883 - 2026.

"Pan" Magische vierkanten

5	11	14	4
10	8	1	15
3	13	12	6
16	2	7	9

Gelijke sommen, ook voor "nevendiagonalen".

De getallen in blokjes met gelijke kleur hebben steeds dezelfde som. Dit zijn de nevendiagona-len. Er kan uitgaande van de gelijke sommen van de getallen op de nevendiagonalen tevens worden berekend dat ook andere viertallen getallen gelijke sommen moeten hebben. Een aardige opgave!

Pan Magische vierkant 5 x 5

1	7	15	23	19
13	24	16	2	10
17	5	8	14	21
9	11	22	20	3
25	18	4	6	12

Elke kleur heeft gelijke som!

Ook hier zijn een aantal nevendiagonalen getoond. In de rechter figuur zijn een vijftal kruizen getoond, alwaar de vijf getallen ook gelijke som hebben. Dit geldt voor elk op deze manier gevormd kruis. Er zijn tevens andere vormen van figuren bestaande uit vijf blokjes met getallen met gelijke som.

1	7	15	23	19
13	24	16	2	10
17	5	8	14	21
9	11	22	20	3
25	18	4	6	12

Hoe toon je dit aan?

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

- Ga uit van een leeg 5x5 rooster.

2	0	0	2	1
0	0	2	1	2
0	2	1	2	0
2	1	2	0	0
1	2	0	0	2

- We tellen de diagonaal (zoals aangegeven) eenmaal en de twee aangrenzende diagonalen tweemaal.

3	2	0	2	3
2	1	4	1	2
0	4	2	4	0
2	1	4	1	2
3	2	0	2	3

- We tellen hierbij op de (hoofd)diagonaal eenmaal en de twee aangrenzende diagonalen tweemaal.

3	3	3	3	3
2	2	7	2	2
0	5	5	5	0
2	2	7	2	2
3	3	3	3	3

- We tellen hierbij op eenmaal de tweede en vierde kolom en driemaal de derde kolom.

3	3	3	3	3
3	3	8	3	3
3	8	8	8	3
3	3	8	3	3
3	3	3	3	3

- We tellen hierbij op eenmaal de tweede en vierde rij en driemaal de derde rij.

0	0	0	0	0
0	0	5	0	0
0	5	5	5	0
0	0	5	0	0
0	0	0	0	0

- Trek van het resultaat driemaal alle rijen af...,

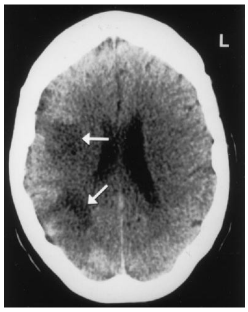
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	1	1	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

- en deel dit resultaat door 5.

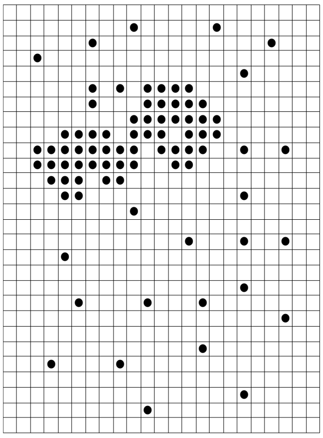
Intermezzo over MRI

MRI = Magnetic Resonance Imaging
Er wordt een scan gemaakt van een orgaan in diverse richtingen.

De te onderzoeken persoon wordt in het MRI-apparaat geschoven, en er worden vanuit diverse richtingen foto's gemaakt. Het is nog een lastig karwei om deze foto's terug te vertalen naar de driedimensionale organen. Dit wordt gedaan met Tomografie (2*D*-doorsnijding van de ruimtelijke structuur). Bij discrete tomografie versimpelen we de basisideeen. We gaan uit van een simpel rooster met afmetingen *m* x *n*. Elk blokje in het rooster kan worden voorzien met een één of nul (pixel of geen pixel).



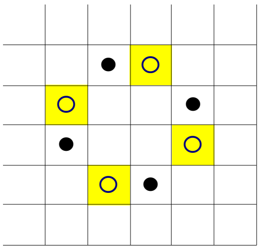
Discrete Tomografie



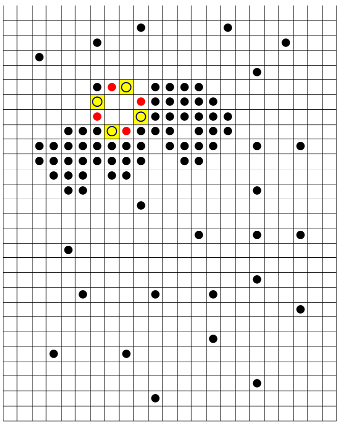
- Gegeven is een m x n matrix gevuld met nullen en enen.
- Voor elke rij, kolom en diagonaal is be-kend hoeveel enen er zich bevinden
- Probeer de oorspronkelijke figuur te reconstrueren.

Hier heb ik een voorbeeld geschetst van een rooster hoe dat er uit kan zien. De rontgenstra-ling gaat door dit preparaat heen, in horizontale, vertikale en diagonale richting. De vraag is of we op grond van de uitkomsten dit plaatje weer kunnen reconstrueren. Dit is het vakgebied van de Discrete Tomografie. Een interessante vraag is of er een unieke oplossing is.

Het verhaal van de molens



Deze molenconfiguratie heeft de eigenschap dat op elke rij, kolom en diagonaal een "○" en een "●" voorkomen (of geen van beide).
Er hoeft geen unieke oplossing te bestaan. Kijk naar dit diagram van een "molen". De open en gesloten rondjes tellen horizontaal, vertikaal en diagonaal op tot gelijke waarden. Ofwel de vier pixels kunnen op twee manieren worden ge-plaatst. De molens zijn heel belangrijk in de discrete tomografie. Het zijn de enige (of lees basis-) configuraties die meerdere oplossingen toelaten. Inmiddels is men in staat met computer-programmatuur een dergelijk discreet tomografie probleem op te lossen.



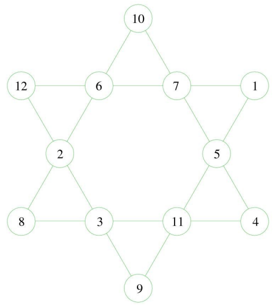
Er blijken inderdaad twee oplossingen te zijn. In het nevenstaande figuur heb ik met rood en geel aangegeven waar verschillen kunnen optreden.

Bij magische vierkanten kunnen we dezelfde techniek toepassen.

1	7	15 + 1	23 – 1	19
13	24 – 1	16	2	10 + 1
17	5 + 1	8	14	21 – 1
9	11	22 – 1	20 + 1	3
25	18	4	6	12

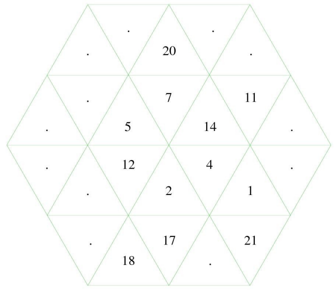
Bij magische vierkanten kunnen we dezelfde techniek toepassen. We kunnen een getal optellen bij 4 getallen in een magisch vierkant en aftrekken van 4 andere getallen zonder dat de sommen worden verstoord. Wel heeft men dan niet meer de getallen 1 t/m n^2.

Andere magische figuren

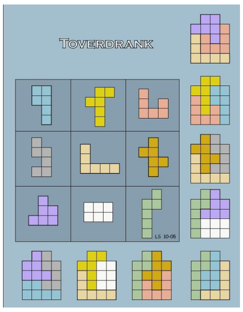


Rechts moeten op de punten nog de ontbrekende getallen worden ingevuld.
Op de linker figuur zijn vele varianten denkbaar, waarbij het aantal hoeken varieert van 6 tot ???

De rechter figuur is tevens een onderdeel van de prijsvraag. Let op dat we in tegenstelling tot magische vierkanten hier niet zo gemakkelijk de getallen met 1 kunnen verhogen, omdat sommige rijen uit 5, en andere rijen uit 7 getallen bestaan.

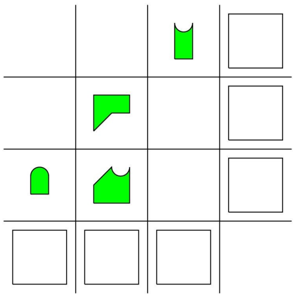


Geomagische vierkanten



In plaats van getallen gaan we plaatjes "optellen", d.w.z. Samenvoegen tot een groter figuur. Let op de figuren tellen horizontaal, vertikaal en diagonaal op tot een "flesje". Idee is afkomstig van **Lee Sallows**.
Het gaat om de 9 figuren in het donkere gebied. Als je steeds drie van deze negen figuren optelt horizontaal, vertikaal of diagonaal dan kun je een figuur maken (in dit geval het "Toverflesje") waarbij deze drie stukken zijn gebruikt.
Dat is het basale idee achter het onderdeel van de prijsvraag over de geomagische vierkanten.
Ik laat eerst een oefenopgave zien waarbij we niet van een geomagisch maar een semi geomagisch vierkant uitgaan.

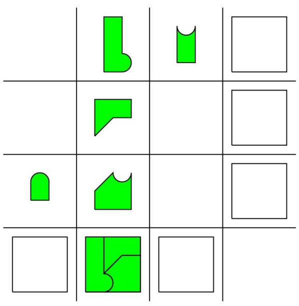
De oefenopgave...



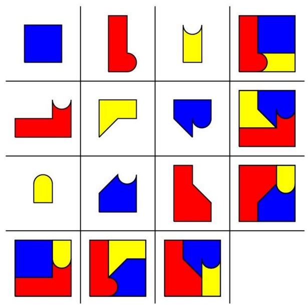
Het gaat om een semi geomagisch vierkant, (dus geen diagonalen)

Op de wetenschapsdag (Een fenomeen in Nederland) heeft Pythagoras met deze opgave gestaan in Leiden en Amsterdam. Ik was perplex door te constateren hoe gemakkelijk kinderen van 8 jaar deze puzzel konden oplossen.

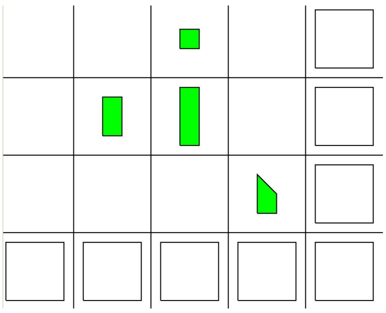
Midden boven moet een figuur worden geplaatst, z.d.d. de figuren in kolom "optellen" tot een vierkant.



Hier is al een stukje toegevoegd. We hadden karton en scharen meegenomen. De kinderen konden de stukjes uitknippen en leggen op lege vierkanten. De bedoeling was de vier resterende (legkaart)stukjes te vinden, en vervolgens tevens de legkaarten in te tekenen.



Opgaven (Prijsvraag)

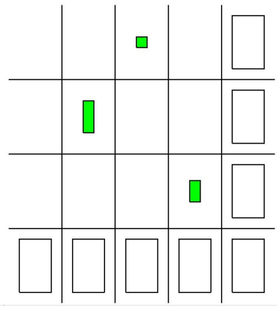


- (🡐) Vul deze specifieke Geomagisch vierkant aan.
- Maak een geomagisch vierkant gebaseerd op een magisch vierkant. (zie volgende pagina)
- Maak naar eigen ideeën een Geomagisch vierkant

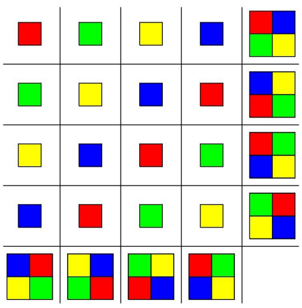
Tip: maak gebruik van ruitjespapier.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Ga uit van een magisch vierkant. Vervang de getallen door figuren bestaande uit blokjes (polyomino's)
Geomagische vierkanten
Voorbeeld opgave uit prijsvraag voor 3 x 3
Tip: maak gebruik van ruitjespapier.
De getallen 1, 2 en 3 zijn vervangen door overeenkomstige figuren. Let op. Er bestaan twee figuren bestaande uit drie blokjes, de getekende en die geplaatst in een hoek-vorm. Daarnaast kan de vorm waarin de polyonimo's moeten worden gelegd nog varieren. Kies bijvoorbeeld een 4 x 4 vierkant, waarin een blokje ontbreekt.

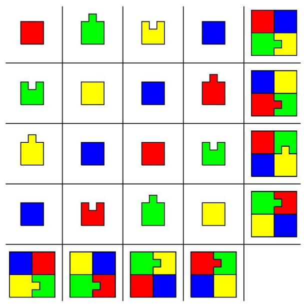


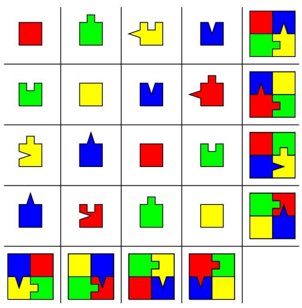
Terug naar het verhaal van de molens



(←) We gaan uit van een heel simpel geo-magisch vierkant.

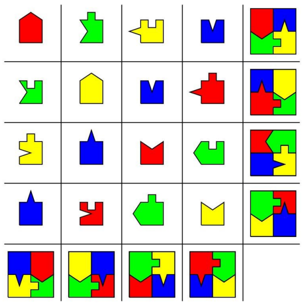
Hier staat een simpel “recht toe recht aan” geomagisch vierkant. Door het idee van de molens toe te passen ontstaat het figuur rechts (→)

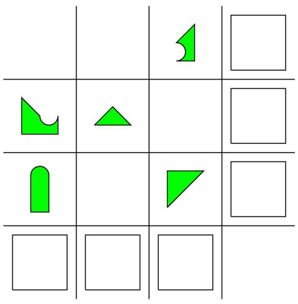




(←)De in- en uit-stulpingen zijn geplaatst in twee blokken van 2 x 2. Je kunt gemakkelijk nagaan dat dit toch weer een molen is.

Let wel, dit geomagisch vierkant is niet meer pan geomagisch!(→)





De NWD-opgave ...

Deze opgave wordt op een apart blad rondgedeeld.

De oplossing...

Wordt pas op de dag van de presentatie toegevoegd.

Referenties

- Deze handout en de presentatie zijn digitaal terug te vinden op: http://www.matcos.nl/prijsvraag
- Hoe maak je magische vierkanten? Werkboek door Arie Breedijk: http://www.lulu.com/items/volume_67/7885000/7885993/1/print/7885993.pdf
- Aanbevelenswaardig: Boek “Magische vierkanten, van Lo Shu tot Sudoku” van Arno van den Essen, Veen Magazines, Diemen, 2005, 238 p., prijs € 17,50, ISBN: 9085710529.
- Op de website van Arno van den Essen is extra informatie geplaatst. Zie: http://www.math.ru.nl/lo_shu_tot_sudoku/extra/index.html
- Discrete tomografie: http://www.kennislink.nl/publicaties/diamanten-of-weefsel-reconstrueren-uit-plaatjes