Wiskunde D: Modellen en Dynamische Systemen

Ferdinand Verhulst
Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht

NWD, februari 2009

Waar gaat het over?

- Filosofie van de tekst
  • modelleren (vergelijkingen opstellen)
  • analyse van het model (benodigde wiskunde) • voorproefje van wetenschappelijk redeneren

- Voorbeeld: wat is een model?

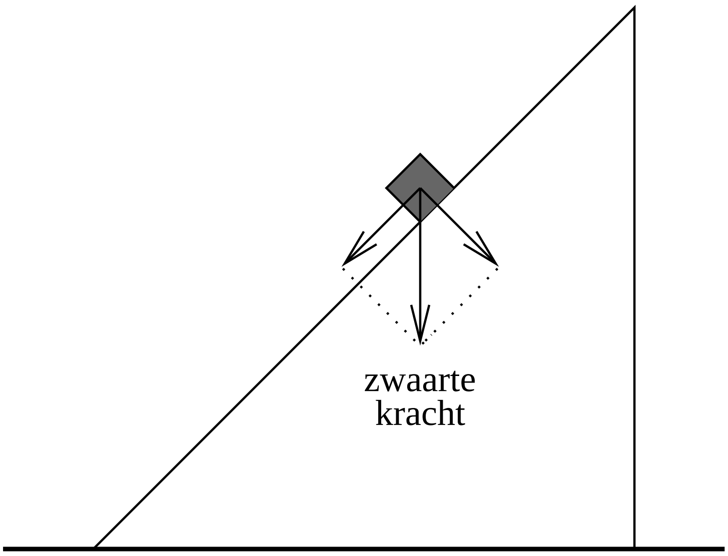
- Inhoud tekst

- Voorbeeld: een balletje opgooien

Modelleren

Wat gaat er door je heen?

Het fysische model



De olifant wordt voorgesteld door een vierkantje, de helling door een rechte lijn.

Het wiskundige model

$F = ma$ met begin- en randvoorwaarden.

Dat plaatje is typerend voor modelleren. Je hebt de helling die natuurlijk kuilen en hobbels heeft, voorgesteld door een rechte lijn. De olifant met zijn imposante lijf is vervangen door een massapunt, voorgesteld door een vierkantje. De pijlen geven de richting van de krachten aan die werken. Die kracht is de zwaartekracht en we kunnen vergelijkingen opstellen waarin die een hoofdrol speelt. Met behulp van die vergelijkingen kunnen we de verplaatsing van het massapunt (olifant) berekenen en voorspellen.

Modelleren betekent dus vereenvoudigen en wel zoveel vereenvoudigen dat we het verschijnsel bijna niet meer herkennen. Wel hebben we het essentiële van de beweging van de olifant hiermee beschreven.

Het trompetteren, de geuren van het oerwoud, de planten en kuilen op de helling laten we allemaal weg in onze modellering.

Inhoud tekst

1. Modelleren van de werkelijkheid
2. Discrete dynamische modellen
3. Discrete economische modellen
4. Meer opgaven
5. Continue dynamische systemen
6. Een balletje opgooien

Samenvatting filosofie:

Modellen maken en wiskunde leren
(discreet en continu)

met behulp van de gebieden
- populatiegroei
- macro-economie, conjunctuur
- eenvoudige mechanica **(moet!)**

Technische hulpmiddelen:
- Grafische rekenmachine

(meer techniek is uit den boze, dus geen doorrekenen van griepepidemieën, klimaatmodellen en dergelijke: ”er zit veel wiskunde in, maar die komt er niet uit”).

Populatiedynamica
Bekende vergelijking

$$N_{n+1} = rN_n$$

met N_n de bevolkingsgrootte, r de groeifactor ($r > 1$ groei, $0 < r < 1$ uitsterven).
Variant: populatiegrootte reguleren (herten of wilde zwijnen) of gewoon "vangen om het gewin" (visvangst enzovoorts).

Model 1: vangen naar wat je aantreft

$$N_{n+1} = rN_n - bN_n,\ b > 0.$$

Dan is er geen evenwicht, als $0 < r - b < 1$ dan sterft de populatie uit, als $r - b > 1$ dan groeit de populatie.

Model 2: vangen volgens quota

$$N_{n+1} = rN_n - q, \ q > 0.$$

Als er een optimale populatiegrootte N_* is, kun je q geschikt kiezen:
het eerste jaar, als $N_0 < N_*$ niets vangen, als N_* bereikt is

$$q = (r-1)N_*.$$

Wat is de beste strategie? (denk aan de kabeljouw bij New-Foundland).

Sommetje
Op de Veluwe kunnen in de zomer ongeveer 1000 herten leven, in de winter 700. Als $r = 3/2$ hoeveel moeten er dan in het najaar afgeschoten worden als in september de populatie 950 is?
Discussie: we hebben r niet gebruikt en we moeten bedenken dat r de groeifactor per jaar is. In de winter is er meer sterfte, dus ...

Een balletje opgooien, model 1

- Verticaal bewegen, hoogte $h(t)$
- $h(t) \geq 0$
- geen wrijving
- alleen werking zwaartekracht
- dicht bij het aardoppervlak
- massa constant

$$\begin{aligned} F &= ma \\ -mg &= ma \\ -mg &= m\frac{d^2h}{dt^2}, \end{aligned}$$

zodat

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -g$$

en de snelheid

$$\frac{dh}{dt} = v_0 - gt,$$

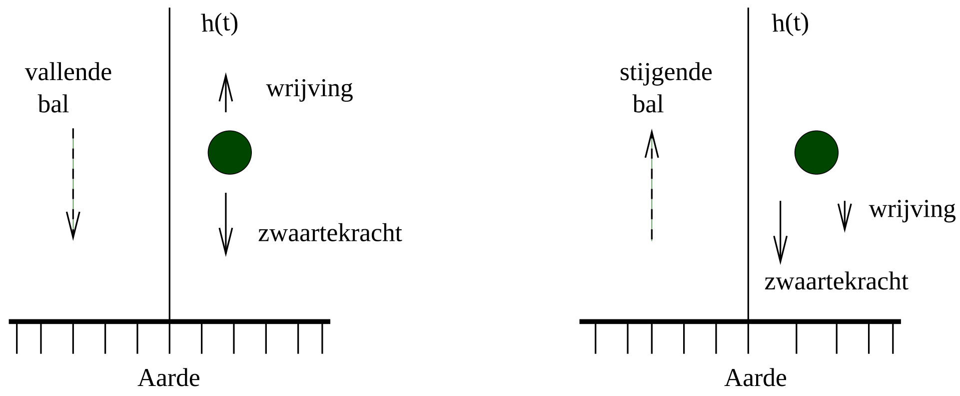
de hoogte

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Is bij opgooien de tijd van stijgen en dalen dezelfde?

Kan de snelheid constant zijn?

Een balletje opgooien, model 2



Vallende bal met wrijving door de atmosfeer.

Bewegingsvergelijking ($F = ma$):

$$-mg - c\frac{dh}{dt} = m\frac{d^2h}{dt^2}$$

Evenwicht tussen zwaartekracht en wrijvingskracht:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{mg}{c}$$

de constante grenssnelheid

Aspecten die aan de orde komen:
oplossing van de vergelijking met wrijving
de vliegtijd van een bal bij wrijving
benadering door reeksontwikkeling
benadering met de methode van Newton
(differentievergelijkingen!)
stuiteren (differentievergelijkingen met chaos)
vallen in water: zinken

Vragen:
stel je staat op de grond, $h_0 = 0$, en je gooit een bal op met snelheid v_0.
Hoe hoog komt de bal?
Wat is de vliegtijd van de bal?
Symmetrie bij stijgen en dalen?

Gedrag in model 1

Na tijd t_m is de bal op zijn hoogst voor $h = h_m$. Daar is de snelheid 0, dus

$$\frac{dh}{dt} = v_0 - gt,\ t_m = \frac{v_0}{g}$$

en $h_m = \frac{v_0^2}{2g}$.

De valtijd is ook $\frac{v_0}{g}$ en de vliegtijd dus $\frac{2v_0}{g}$.

Gedrag in model 2 (met wrijving)

De vergelijking was

$$-mg - c\frac{dh}{dt} = m\frac{d^2h}{dt^2}.$$

Een keer integreren levert

$$m\frac{dh}{dt} = mv_0 - mgt - ch(t).$$

Hierbij is aangenomen dat $h(0) = 0$ (opgooien vanaf de grond). Dit is een veel lastiger differentiaalvergelijking. De oplossing is

$$h(t) = -(\frac{mv_0}{c} + g\frac{m^2}{c^2})e^{-\frac{c}{m}t} + \frac{mv_0}{c} + g\frac{m^2}{c^2} - g\frac{m}{c}t.$$

Oei!

De grenssnelheid is wel eenvoudig te zien, de vliegtijd niet.

Symmetrie van stijgen en dalen?

Model 2: de vliegtijd T

Bij het opgooien is voor $t = 0$, $h = 0$. Je weet, de bal valt terug, dus als je stelt

$$h(T) = 0,$$

dan moet er een tweede wortel $T > 0$ zijn van de vergelijking

$$-(\frac{mv_0}{c}+g\frac{m^2}{c^2})e^{-\frac{c}{m}T}+\frac{mv_0}{c}+g\frac{m^2}{c^2}-g\frac{m}{c}T = 0.$$

We zien nog steeds dat $T = 0$ voldoet. De mechanica voorspelt dat er ook een positieve wortel voor T bestaat. Voorspelt de wiskunde dat ook?

Als dat niet zo zou zijn, was er iets mis met ons model. Deel eerst door m en dan door de coëfficiënt van de e-macht:

$$e^{-\frac{c}{m}T} = 1 - \frac{gc}{v_0c + gm}T.$$

Dan ziet de vergelijking voor de vliegtijd T er uit als

$$e^{-aT} = 1 - bT,$$

met $a = \frac{c}{m} > 0$ en $b = \frac{gc}{v_0c+gm} > 0$.

De vliegtijd T, oplossingsmethoden

• De grafische methode: zet e^{-aT} en $1 - bT$ in een grafiek uit en zoek de snijpunten.

• Benadering van de vliegtijd door benadering van de functies in de vergelijking:
als a heel groot is door veel wrijving en kleine massa (vallend veertje of sprinkhaan), dan is $e^{-aT} \approx 0$ en dus $T \approx 1/b = \frac{v_0 c + gm}{gc}$.
Als de wrijving klein is, is natuurlijk $T = \frac{2v_0}{g}$ een goede eerste benadering.

• Benaderingsmethode van Newton door raaklijnen constructie.

Vallen in water: zinken

Niet alleen mogen we de wrijving niet verwaarlozen, er werkt nog een kracht: de opwaartse kracht f_A van Archimedes. De bewegingsvergelijking wordt

$$m\frac{d^2h}{dt^2} = -gm + f_A - c\frac{dh}{dt}.$$

Bedenk: bij zinken werkt f_A naar boven, net als de wrijving, maar dh/dt is negatief.
De constante zinksnelheid volgt uit

$$-gm + f_A - c\frac{dh}{dt} = 0,$$

zodat

$$\frac{dh}{dt} = -g\frac{m}{c} + \frac{f_A}{c}.$$

NB 1 dm^3 lucht weegt op Aarde iets meer dan 1 gram, hetzelfde volume water 1 kg.

Sommetje 1: zinksnelheid van een mens in de oceaan.
Bijv. gewicht 75 kg, volume 70 dm^3, $c = 0.9$.
Levert ongeveer 5.6 m/sec, dat is 20 km/uur.

Sommetje 2: neem eens twee gelijke ballonnen en blaas er een vol met lucht.
Welke ballon weegt het meest?
Als ze van gelijke hoogte vallen, welke is het eerst beneden?

Websites met de volledige tekst

www.epsilon-uitgaven.nl

www.math.uu.nl/people/verhulst