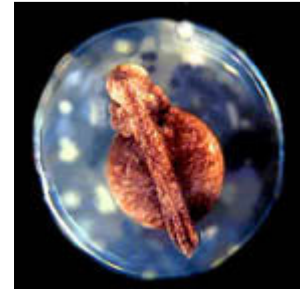


Stadia padden

De leerlingen gaan in april een poel bezoeken om de kikkers en padden die ze bij de overzet hebben ‘gered’ terug te observeren. Ondertussen hebben deze kikkers en padden eieren gelegd in de poel. Deze eieren zijn gaan ontwikkelen. Al naargelang de temperatuur kan dit sneller of trager gaan. In deze groei kan je verschillende stadia onderscheiden. De onderstaande tabel geeft een idee wat met deze stadia bedoeld wordt:

Gosner Stages*

a printable table for staging from
natures-web.org



					
stage 1	stage 5	stage 10	stage 15	stage 17	stage 19
					
stage 20	stage 21	stage 22	stage 23	stage 24	stage 25
					
stage 26	stage 27	stage 28	stage 29	stage 30	stage 31
					
stage 32	stage 33	stage 34	stage 35	stage 36	stage 37
					
stage 38	stage 39	stage 40	stage 41	stage 43	stage 44
	*Stages of developing frogs are based (as much as possible) on K.L. Gosner's anuran embryo staging tables. (Gosner, K.L. 1960. A Simplified Table for Staging Anuran Embryos and Larvae. Herpetologica, 16: 183-190)				
stage 47					

De bovenstaande tabel is bewust eenvoudig gehouden. Hij kan zo gebruikt worden door leerlingen die geen ervaring hebben bij het bepalen van een stadium. Bij de wetenschappelijke benadering gebruikt men een andere terminologie voor deze verschillende stadia. Men onderscheidt 4 stadia en geeft deze aan met de Romeinse cijfers I, II, III en IV. Deze stadia worden nog eens onderverdeeld in een aantal deelstadia. Deze deelstadia worden bepaald door een Arabisch cijfer te koppelen aan het Romeinse cijfer. De verschillende stadia hebben geen enkele relatie met de tijd. Dus stadium I duurt niet evenlang als stadium II, stadium II, duurt niet evenlang als stadium I2.

De bedoeling is dat de leerlingen m.b.v. de eenvoudige tabel een aantal stadia kunnen onderscheiden. We kunnen de kikkers echter niet lang genoeg volgen om een echte evolutie te zien. Vandaar dat we gebruik maken van meetwaarden die Sabine experimenteel vond door kikkers in een laboratorium te volgen. Daarvoor heeft zij de gedetailleerdere wetenschappelijke tabel. Stage en stadium komen bij deze tabellen niet helemaal overeen. Zo komt II13 overeen met stage 15, IV2 met stage 37.

De onderstaande tabel geeft de meetwaarden voor een experiment waarbij 30 bevruchte eitjes van *Bufo bufo* werden uitgezet in water van 20°C en gedurende ongeveer 14 dagen werden gevolgd. *Bufo bufo* is de gewone pad.

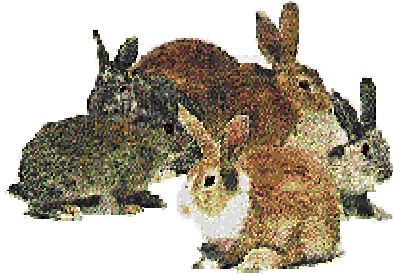
Datum		20°C
vrijdag 17 april 1987	15.15 u	II13
zondag 19 april 1987	19.15 u	III6
maandag 20 april 1987	11.00 u	III7
maandag 20 april 1987	20.00 u	III7
dinsdag 21 april 1987	08.15 u	III8
dinsdag 21 april 1987	14.45 u	III8
dinsdag 21 april 1987	19.30 u	III9
woensdag 22 april 1987	08.00 u	III9
woensdag 22 april 1987	17.00 u	III10
donderdag 23 april 1987	10.15 u	IV1
donderdag 23 april 1987	16.15 u	IV1
vrijdag 24 april 1987	08.15 u	IV1
vrijdag 24 april 1987	16.45 u	IV1
zondag 26 april 1987	19.45 u	IV1
maandag 27 april 1987	08.45 u	IV1
dinsdag 28 april 1987	08.15 u	IV1
dinsdag 28 april 1987	16.15 u	IV1
woensdag 29 april 1987	08.15 u	IV1
woensdag 29 april 1987	17.15 u	IV2
donderdag 30 april 1987	09.00 u	IV2
donderdag 30 april 1987	19.45 u	IV2
vrijdag 01 mei 1987	19.30 u	IV2

1. Voer de bovenstaande tabel in in je GRM.
2. Maak een grafiek van de functie die het stadium van de pad uitdrukt in functie van de tijd.
3. Bepaal met de GRM een bijpassend functievoorschrift.

Inleiding rijen – meetkundige rij

Werktekst 1: De rij van Fibonacci

Leonardo Fibonacci onderzocht (in het jaar 1202) het volgende konijnenprobleem.

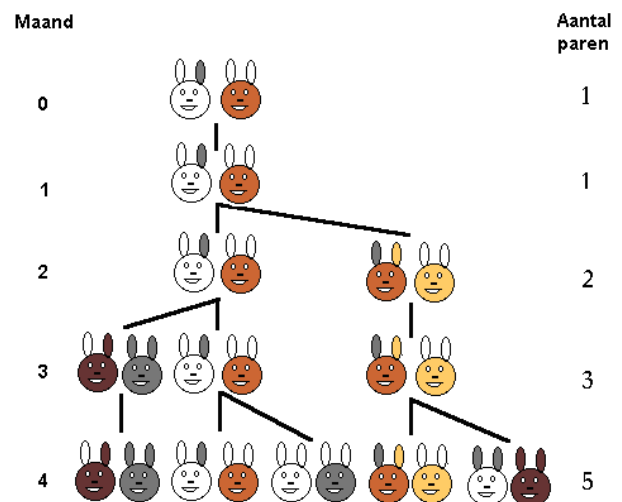


Stel dat een pas geboren konijnenpaar, een vrouwtje en een mannetje, in een veld worden gezet. Konijnen zijn gekend om hun snelle voortplanting wat het spreekwoord ‘kweken als konijnen’ oplevert. Konijnen kunnen succesvol paren als ze één maand oud zijn zodat op het einde van de tweede maand elk vrouwtje een tweede konijnenpaar op de wereld zet. In een goed georganiseerde konijnenkolonie brengt elk konijnenpaar dat oud genoeg is om te paren,

elke maand een nieuw konijnenpaar op de wereld. We veronderstellen hierbij dat onze konijnen niet sterven. Fibonacci boog zich over de volgende vraag: Hoeveel konijnenparen zullen er zijn op het einde van één jaar?

- § Op het einde van de *eerste* maand, paren de konijnen, maar is er nog steeds één paar.
- § Op het einde van de *tweede* maand werpt het vrouwtje een nieuw konijnenpaar. Er zijn nu 2 konijnenparen in het veld.
- § Op het einde van de *derde* maand, werpt het originele vrouwtje een tweede paar. Het tweede vrouwtje dat vorige maand geboren werd, is nu oud genoeg om te paren, maar produceert nog geen nakomelingen. Er zijn nu 3 konijnenparen in het veld.
- § Op het einde van de *vierde* maand, werpt het originele vrouwtje weer een paar. Het vrouwtje dat twee maanden geleden geboren is, werpt ook een paar. Er zijn bijgevolg 5 konijnenparen in het veld.

De bovenstaande informatie is voorgesteld in de figuur:



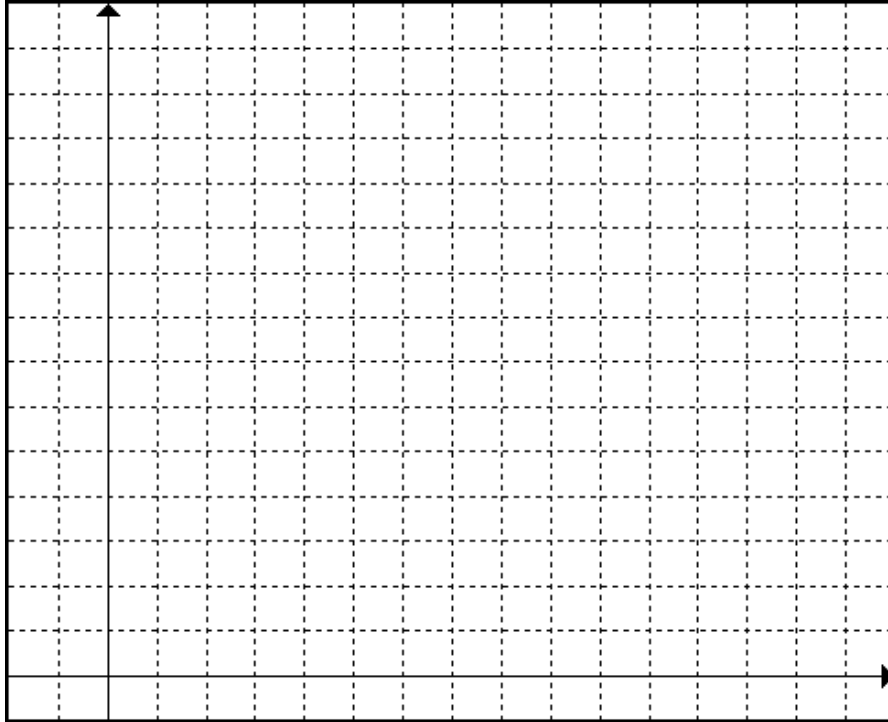
1. Gebruik de figuur om de onderstaande tabel aan te vullen.

Na ... maand	0	1	2	3	4	5	6	7
Aantal konijnenparen	1	1	2					

2. Hoeveel paren zullen er zijn in één jaar?

We kunnen deze gegevens ook voorstellen met behulp van een grafiek, we mogen hierbij niet vergeten dat het aantal konijnenparen telkens vermeerdert met sprongen van 1 naar 2 naar 3 naar 5... Er zijn bijvoorbeeld nooit 1,5 of 2,75 konijnenparen. We kunnen bijgevolg geen continue lijn trekken tussen de verschillende punten als we de grafiek tekenen.

3. Gebruik de tabel van vraag 1 en stel de gegevens voor op het onderstaande rooster.



Opmerking: ·

Het konijnenprobleem is niet erg realistisch, niet waar? In dit probleem mogen blijkbaar broers en zussen paren, wat, genetisch gezien, tot problemen leidt. We kunnen natuurlijk stellen dat elk vrouwtje paart met elk mannetje van een ander paar. Dat elke worp bestaat uit juist twee konijnen en dan nog telkens één vrouwtje en één mannetje is ook niet erg realistisch. Fibonacci deed echter wat wiskundigen vaak doen als zij een moeilijk probleem trachten op te lossen: vereenvoudig het probleem en bestudeer het dan. En... Fibonacci-rijen hebben heel wat interessante en praktische toepassingen.

Een *rij* getallen wordt vaak gebruikt om gegevens voor te stellen die in sprongen veranderen. De rij die het aantal konijnenparen voorstelt is de volgende: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

- § Een dergelijke geordende rij getallen noemen we een rij.
- § De getallen in de rij noemen we de termen van de rij.
- § Om een rij voor te stellen worden speciale notaties gebruikt. De eerste, tweede, derde... term van een rij worden weergegeven door u_1 , u_2 , u_3 ... (u_{12} stelt bijgevolg de term voor die op de 12de positie in de rij staat. De drie puntjes (...) op het einde van de rij geven aan dat de rij zich voortzet op dezelfde manier.
- § Een rij wordt altijd volgens een bepaald patroon gevormd. Bij dit voorbeeld is elke term van de rij de som van de vorige twee termen.

Gebruik van de GRM in deze werktekst:

- § De grafiek kan gemaakt worden via STAT PLOTS, de tabel moet dan ingevoerd worden in lijsten. De verschillende schermjes worden hieronder weergegeven:

```

2ND [ ] CALC TESTS
1:Edit...
2:SortA(
3:SortD(
4:CirList
5:SetUpEditor

```

L1	L2	L3	2
0	1		
1	1		
2	1		
3	1		
4	1		
5	1		
6	1		
7	1		
8	1		
9	1		
10	1		
11	1		
12	1		
13	1		

L2(n)=1

```

5TH PLOTS
1:Plot1...Off
2:Plot2...Off
3:Plot3...Off
4:PlotsOff

```

```

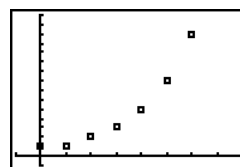
2ND [ ] Plot2 Plot3
Off Off
Type: [ ] [ ] [ ]
Xlist:L1
Ylist:L2
Mark: [ ] +

```

```

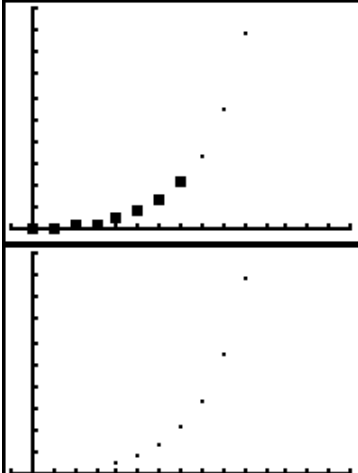
WINDOW
Xmin=-1
Xmax=8
Xscl=1
Ymin=-1
Ymax=15
Yscl=1
Xres=1

```



- § In de vorige grafiek worden enkel de waarden geplot die in de tabel voorkomen. Door middel van de ingebouwde functies met rijen kan men de rij volledig oproepen. We doorlopen de methode:

Druk [MODE] en kies [SEQ]	<pre> SCI ENG FLOAT 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 RADIAN DEGREE FUNC PAR POL SEQ CONNECTED DOT SEQUENTIAL SIMUL REAL a+bi re^θi FULL HORIZ G-T SET CLOCK 80/12/06 3:16PM </pre>
Druk [Y=] en vul het scherm aan. De termen van de rij worden in de rekenmachine als $u(n)$ genoteerd. De letter u is niet de gewone letter U die je intypt met [ALPHA] [U], maar de speciale kleine letter die je linksboven de toets met het cijfer 7 vindt. De letter n geef je in via de toets [X,T,Δ,n]. De instructie $u(n)=u(n-1)+u(n-2)$ laat een term berekenen uit de som van de twee voorgaande termen. De beginvoorwaarde van de Fibonaccirij zijn haar eerste 2 getallen, deze worden in de GRM ingegeven via $u(nMin)=\{1,1\}$	<pre> 2ND [] Plot2 Plot3 nMin=0 u(n)=u(n-1)+u(n-2) u(nMin)=1,1 v(n)= v(nMin)= w(n)= </pre>
Druk [WINDOW] en kies goede instellingen voor de assen. Daar de 'Sequence mode' aangevinkt is, moeten ook instellingen gekozen worden voor n	<pre> WINDOW nMin=0 nMax=15 PlotStart=1 PlotStep=1 Xmin=-1 Xmax=15 Xscl=1 </pre>

	<pre> WINDOW ↑PlotStep=1 Xmin=-1 Xmax=15 Xscl=1 Ymin=-1 Ymax=100 Yscl=10 </pre>
Door [Graph] te drukken, krijg je de grafiek van deze rij. Het bovenste schermafbeeldingje geeft de grafiek verkregen volgens de eerste en tweede procedure. De vierkantjes geven de waarden uit de tabel, de puntjes geven de hele rij. De onderste schermafbeelding geeft de grafiek als [Plot 1] terug op [Off] wordt gezet.	

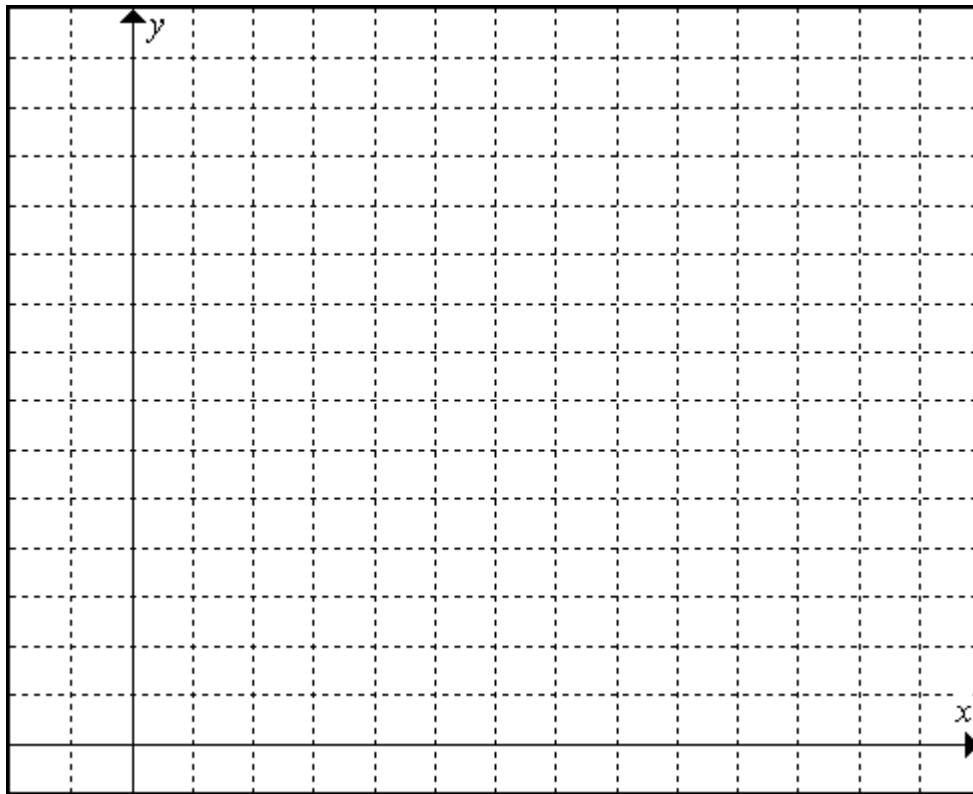
Werktekst 2: Populatiedynamiek

Een paar konijnen heeft gemiddeld acht nesten per jaar, met zes jongen per nest. Konijnen leven gemiddeld vier jaar. Stel je voor dat één paar konijnen wordt uitgezet en dat de natuurlijke vijanden ontbreken, dat konijnen één jaar oud moeten zijn om jongen te krijgen en dat er evenveel mannetjes als wijfjes geboren worden.

1. Bereken het aantal konijnen na 1, 2, 3, 4 en 5 jaar en vul de tabel aan.

Na ... jaar		1	2	3	4	5
Samenstelling van de populatie	1 jarigen	2	48			
	2 jarigen	0	2			
	3 jarigen	0	0			
	4 jarigen	0	0			
	5 jarigen	0	0			
Totaal aantal konijnen		2	50			

2. Zet deze gegevens uit op het onderstaande rooster.



3. Wat zal er met de populatie zonder natuurlijke vijanden na enkele jaren kunnen gebeuren?

We gaan er nu van uit dat er wel natuurlijke vijanden zijn en er slechts twee jongen per jaar overleven.

4. Bereken het aantal konijnen na 1, 2, 3, 4 en 5 jaar en vul de tabel aan.

Na ... jaar		1	2	3	4	5
Samenstelling van de populatie	1 jarigen	2	2			
	2 jarigen	0	2			
	3 jarigen	0	0			
	4 jarigen	0	0			
	5 jarigen	0	0			
Totaal aantal konijnen		2	4			

5. Zet deze gegevens uit op het rooster onder vraag 2 maar gebruik een andere kleur.
 6. Beschrijf de invloed van natuurlijke vijanden op de populatie.

7. Welke andere factoren kunnen de populatie laag houden?

8. Hoeveel jongen overleven per paar als je weet dat de populatie stabiel blijft?

In wat volgt gaan we de rij getallen in elke situatie analyseren en veralgemenen. In het bovenstaande sterven de konijnen na 4 jaar. Dit is niet eenvoudig te veralgemenen m.b.v. de leerstof van rijen. Om een eenvoudig wiskundig model op te stellen zouden we ervoor kunnen kiezen om de konijnen niet te laten sterven of om de konijnen kort na hun productie van 8 nesten te laten sterven. De tweede veronderstelling is iets realistischer. We veronderstellen dus dat de konijnen eerst 1 jaar worden vervolgens produceren en in hun tweede levensjaar sterven. We tellen de konijnen telkens op het einde van het jaar nadat de vorige generatie gestorven is en voor de productie van de volgende generatie.

We beschouwen eerst de situatie waarbij er geen natuurlijke vijanden zijn (geen predatordruk).

9. Geef het aantal konijnen na 1, 2, 3, 4 en 5 jaar rekening houdend met de veronderstelling dat elk konijnenpaar sterft nadat ze 8 nesten van 6 konijnen geproduceerd heeft. En dat we tellen nadat de ouderparen gestorven zijn en dus op het einde van het jaar dat ze gestorven zijn.

10. Vul de onderstaande tabel aan. Verklaar eerst de berekeningen die reeds werden uitgevoerd.

Na ... jaar	Aantal konijnen
1	2
2	$u_2 = \frac{2}{2} \cdot 48 = 48$ $u_2 = \frac{u_1}{2} \cdot 48 = u_1 \cdot 24$
3	$u_3 = \frac{48}{2} \cdot 48 = 1152$ $u_3 = \frac{u_2}{2} \cdot 48 = u_2 \cdot 24$
4	
5	

11. Het totaal aantal konijnen is een rij. Geef het soort rij en het recursieve en expliciete voorschrift van deze rij.

12. Bepaal s_7 . Geef (zo deze er is) de betekenis van deze som in de gegeven context.

13. De derde vraag peilt naar de evolutie van de populatie na enkele jaren. Een wiskundig instrument om de evolutie van een rij na te gaan op lange termijn, is het bepalen van de limiet. Bepaal de limiet van de rij.

14. Los de vragen 9 tot en met 12 op voor de situatie waarbij we veronderstellen dat de konijnen wel natuurlijke vijanden hebben.

Rijen – logistische groei

Werktekst 3: Duiven die kweken als konijnen



In België komen een aantal duivensoorten voor. De *stadsduif* wordt overal in de grote steden aangetroffen en voor vele mensen is dit ‘de duif’. Maar een duif als *de Turkse tortel* komt nu heel veel voor in Europa. Ze komt oorspronkelijk uit China en is via de Balkan West-Europa binnengetrokken. In de jaren 1950 werden er door vogelliefhebbers speciale bustochten ondernomen om deze duif in onze streek te bezichtigen omdat ze zo’n zeldzaamheid was. In ons land nam hun aantal

tussen 1950 en 1970 heel sterk toe. Ondertussen heeft het aantal zich gestabiliseerd. Vroeg in de herfst zijn er zwermen van deze vogels te vinden op gemaaide korenvelden en boerderijen waar graan wordt verwerkt. Men kan iedere maand van het jaar broedende paartjes aantreffen en dit gebeurt zelden verder dan 1 km van menselijke activiteit.

In deze werktekst bestuderen we een wiskundig model voor de groei van een populatie tortelduiven in een bepaald gebied. We houden alleen rekening met de vrouwtjes. Populaties worden door biologen immers behandeld als vrouwtjes die vrouwelijke jongen baren!

We willen het wiskundige model aanvankelijk heel eenvoudig houden. Daarom maken we de volgende veronderstellingen:

- we starten met een populatie van 1000 vrouwelijke tortelduiven;
- elk vrouwtje krijgt na 1 jaar gemiddeld 1,5 vrouwelijk jong;
- kort daarna sterft het vrouwtje;
- er is geen immigratie of emigratie van duiven.

1. Bepaal het aantal tortelduiven na 1, 2, 3 en 4 jaar.

2. Geef een recursievergelijking en beginvoorwaarde voor de grootte van de populatie tortelduiven, waarbij je het aantal tortelduiven na n jaar voorstelt door y_n . Geef ook een expliciet voorschrift voor y_n .

3. Met welk soort groei hebben we hier te maken? En van welk type is de rij die de evolutie van het aantal tortelduiven beschrijft?
4. Bepaal de jaarlijkse toename van de populatie tortelduiven na 1 jaar, na 2 jaar en na 3 jaar.

De jaarlijkse toename, gegeven door $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$, zullen we de (*absolute*) *groeisnelheid* noemen. Dit getal geeft immers weer hoe snel de populatie tortelduiven in het betrokken jaar gegroeid is.

5. Verbind de notatie uit de linkerkolom met het juiste getal uit de rechterkolom.

Δy_0	1687,5
Δy_1	500
Δy_2	1125
Δy_3	750

De *relatieve* groeisnelheid is de verhouding van de groeisnelheid tot de populatiegrootte. De relatieve groeisnelheid is dus gegeven door $\frac{\Delta y_n}{y_n}$.

6. Bepaal de relatieve groeisnelheid van de populatie tortelduiven. Bepaal dus $\frac{\Delta y_n}{y_n}$ voor $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ en $n = 3$.

7. In vraag 6 is je wellicht opgevallen dat de relatieve groeisnelheid constant is. Wat betekent dit? Is ook de absolute groeisnelheid constant?

We veronderstellen nu dat we met b vrouwtjes starten en dat elk vrouwtje na 1 jaar voor g vrouwelijke nakomelingen zorgt en daarna sterft.

8. Geef een recursievergelijking en beginvoorwaarde voor het aantal vrouwtjes y_n na n jaar. Geef ook een expliciet voorschrift.

9. Druk de relatieve groeisnelheid r uit in functie van g en beschrijf de mogelijkheden (stijgen, dalen, versneld stijgen, ...) voor de evolutie van het aantal vrouwtjes. Maak een onderscheid naargelang van de waarde van g (of r).

Werktekst 4: Grenzen aan de groei van de populatie tortelduiven

In werktekst 3 zijn we er van uitgegaan dat het aantal nakomelingen per vrouwtje en bijgevolg ook de relatieve groeisnelheid constant zijn. In werkelijkheid is dat niet zo: wanneer er in een bepaald gebied al veel tortelduiven zijn, groeit de populatie in verhouding niet meer zo snel aan.

1. Hoe zou dat komen?

We zullen nu uitgaan van het volgende verband tussen de relatieve groeisnelheid en de grootte van de populatie.

Populatiegrootte	relatieve groeisnelheid
1000	0,5
1250	0,49
1500	0,48
1750	0,47
...	...

De tabel suggereert dat het verband tussen de groeisnelheid en de populatiegrootte beschreven wordt door een eerstegraadsfunctie.

2. Geef de vergelijking van deze eerstegraadsfunctie en maak een grafiek van het verband tussen de relatieve groeisnelheid (r) en de populatiegrootte (y) (waarbij je de populatiegrootte op de horizontale as uitzet).

In vraag 1 uit werktekst 3 berekende je dat de populatie na 1 jaar uit 1500 duiven bestaat. Om het aantal duiven na 2, 3 en 4 jaar te vinden, vermenigvuldigde je telkens opnieuw met 1,5.

3. Met welke factor moet je het aantal duiven na 1 jaar nu vermenigvuldigen om het aantal duiven na 2 jaar te kennen? Hoeveel duiven zijn er na 2 jaar?

4. Welke factoren gebruik je om het aantal duiven na 3 en na 4 jaar te kennen? En hoeveel duiven zijn er na 3 en 4 jaar?
5. Vergelijk de populatiegrootte na 1, 2, 3 en 4 jaar met de aantallen die je in de vorige werktekst vond.
6. Bij welke populatiegrootte is de relatieve groeisnelheid 0? Hoe evolueert een populatie die exact zo groot is?
7. Wat gebeurt er als het aantal duiven groter is dan het aantal dat je in de vorige vraag vond?
8. Gebruik de definitie van relatieve groeisnelheid en de vergelijking $r = 0,54 - 0,000\,04y$ uit vraag 2 van deze werktekst om y_{n+1} uit te drukken in functie van y_n .

9. Voer de recursievergelijking en beginwaarde in je rekenmachine in en teken de grafiek van het aantal duiven in functie van de tijd.
10. Beschrijf het verloop (stijgen, dalen, versneld stijgen ...) van deze grafiek.
11. Geef een biologische verklaring voor het verloop dat je in de vorige vraag vastgesteld hebt.
12. Geef een wiskundige verklaring voor het verloop dat je in de vorige vraag vastgesteld hebt.

13. Een jonge onderzoeker begint de populatie pas te bestuderen wanneer ze uit 8 000 duiven bestaat en tekent de grafiek van de evolutie van de populatie. Beschrijf zijn grafiek.

Het groeiproces dat we in deze werktekst bestudeerd hebben, is een voorbeeld van *logistische groei*. Dit groeimodel is voor het eerst gebruikt door de Belgische wiskundige Pierre-François Verhulst in de jaren 1830 en 1840 om de groei van de Belgische en de Franse bevolking te beschrijven. Het wordt nu gebruikt om de groei van populaties bacteriën in laboratoria te beschrijven. Het is niet erg duidelijk waar de benaming ‘logistisch’ vandaan komt. Wellicht verwijst het naar de ‘praktische rekenkunde’, die dan in tegenstelling staat tot theoretische overwegingen. Verhulst baseerde zijn logistische model immers op statistische gegevens over de Belgische en Franse bevolking.

In vraag 6 hebben de leerlingen berekend dat de populatie in evenwicht is als ze uit 13 500 duiven bestaat. Verderop kwam het getal 13 500 nogmaals voor, als limietwaarde van de populatie die met 1000 duiven gestart was. Deze evenwichts- en limietwaarde is de *draagkracht* van de omgeving. Het is het maximale aantal individuen dat de omgeving op een duurzame manier kan herbergen.

In vraag 8 hebben we de leerlingen een *recursief* voorschrift laten opstellen voor het aantal vrouwtjes y_n na n jaar. Het is echter niet mogelijk om een *expliciet* voorschrift te geven voor y_n !

Exponentiële en logaritmische functies

Werktekst 1: De waterhyacint

De Kafue is één van de grote rivieren in Zambia, een land in Zuidelijk Afrika. Deze rivier kronkelt doorheen het land. Je komt haar o.a. tegen op ongeveer 15 km na het stadje Kafue, als je van Lusaka naar Chirundu rijdt. In 1996 kon je nog nijlpaarden zien van op de brug over de rivier. In 1999 zag je enkel de waterhyacint die het hele wateroppervlak bedekte. In 2001 hebben ze de rivier aangepakt en werd de waterhyacint verwijderd. Ook het Karibameer had last van dezelfde snel groeiende plant. Het Karibameer is een stuwmeer op de grens tussen Zambia en Zimbabwe. Het meer is 220 km lang en 40 km breed en heeft een oppervlakte van ongeveer 6 000 km².

De mooie waterhyacint werd door een goedbedoelende Europeaan ingevoerd. Nu blijkt het echter een snel groeiende plant te zijn die het meer en de rivieren bedekt en als dusdanig het leven in de Zambiaanse wateren beïnvloedt. Het voorbeeld dat we in deze tekst behandelen gaat over een dergelijke snelgroeiende waterplant.

We veronderstellen dat op 1 januari van dit jaar de plant 30 km² van de oppervlakte van het Karibameer bedekte. De oppervlakte die door de plant bedekt wordt, verdubbelt elk jaar.

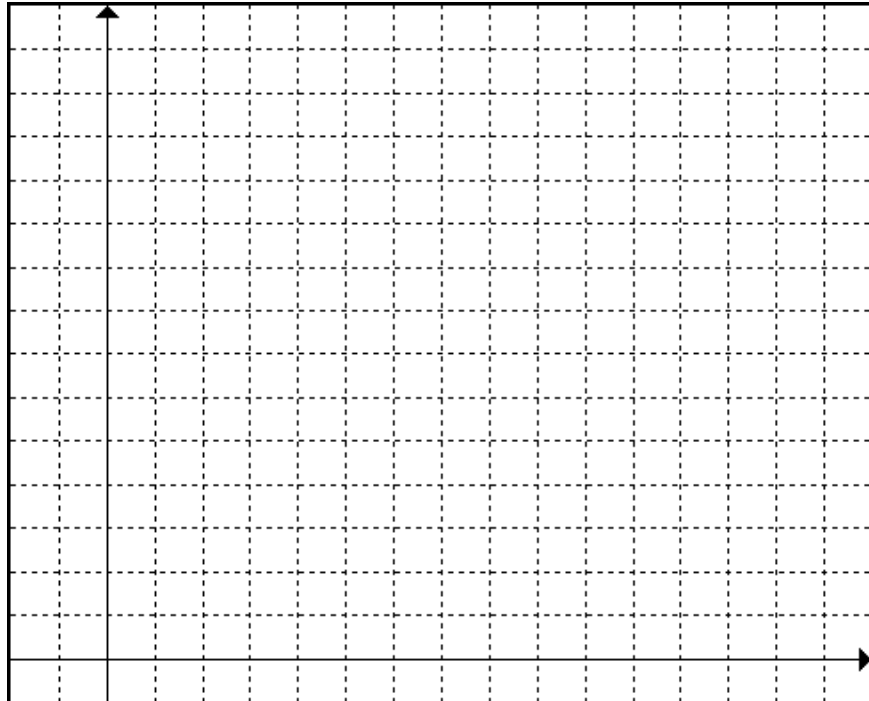


1. Wanneer zal de plant 60 km² van het meer bedekken?
2. Wanneer zal de plant 240 km² van het meer bedekken?
3. Wanneer was er 7,5 km² van het meer bedekt?
4. Na 7 jaar bedekt de plant de *helft* van het meer. Wanneer zal het meer volledig bedekt zijn door de plant als we veronderstellen dat de plant op dezelfde manier blijft verder groeien?

5. Vul de volgende tabel aan: (0 jaar komt overeen met 1 januari van dit jaar)

Na ... jaar	0	1	2	3	4	5	6	7
Oppervlakte in km ²	30	60						

6. Gebruik de gegevens uit de bovenstaande tabel, voer de lijsten in in de GRM en maak een grafiek. Neem de grafiek vervolgens over op het onderstaande rooster.



7. De grafiek stelt de oppervlakte die de plant bedekt voor als functie van de tijd in jaren. Leg uit waarom het zin heeft om de punten die je uit de tabel van vraag 5 op het rooster plaatst te verbinden.

Naast een grafische voorstelling kan de functie ook beschreven worden door een functievoorschrift. In wat volgt trachten we het voorschrift te vinden voor de groei van de water plant.

Op het ogenblik $t=0$ kennen we de oppervlakte A . Deze is 30 km². We schrijven dit als volgt:

$$A(0) = 30 \text{ (lees: De oppervlakte } A \text{ voor } t=0 \text{ is gelijk aan 30)}$$

Op het ogenblik $t=1$ weten we dat de oppervlakte A 60 km² is. We schrijven:

$$A(1) = 60 \text{ (lees: De oppervlakte } A \text{ voor } t=1 \text{ is gelijk aan 60)}$$

8. Vul het volgende schema aan:

$t = 0$	$A(0) = 30$
$t = 1$	$A(1) = 60 = 30 \times 2$
$t = 2$	$A(2) = 120 = (30 \times 2) \times 2 = 30 \times \underline{\hspace{1cm}}$
$t = 3$	$A(3) = 240 = (30 \times \underline{\hspace{1cm}}) \times 2 = 30 \times \underline{\hspace{1cm}}$
$t = 4$	$A(4) =$

Algemeen $A(t) =$

Deze algemene uitdrukking is het functievoorschrift. Het biedt je de mogelijkheid om op een willekeurig ogenblik de oppervlakte van de waterplant te bepalen. Je moet enkel de veranderlijke t vervangen door het gegeven tijdstip. Je vond wellicht het volgende voorschrift:
 $A(t) = 30 \cdot 2^t$

9. Gebruik het functievoorschrift om de oppervlakte te bepalen na 10 jaar.

Daar het Karibameer al bedekt zou zijn met de waterplant na 8 jaar heeft de bovenstaande vraag niet veel zin. Stel echter dat 'lake Malawi' ook problemen zou hebben met dezelfde plant. Lake Malawi is het derde grootste meer van Afrika en is 24 000 km² groot.

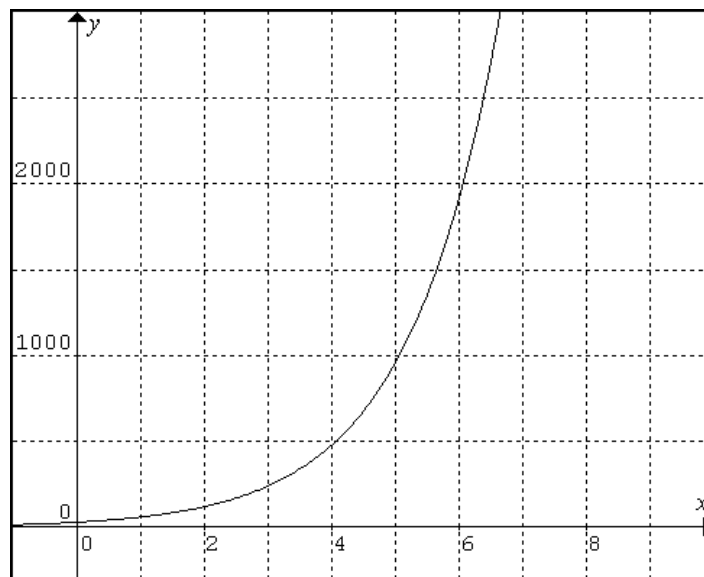
10. Zou lake Malawi na 10 jaar volledig bedekt zijn met de waterplant?

11. We noemen dit soort functie een *exponentiële functie*. Probeer te verduidelijken waarom deze juist een 'exponentiele' functie genoemd wordt.

In het functievoorschrift $A(t) = 30 \cdot 2^t$ staat **30** voor de oppervlakte bij de beginsituatie als $t = 0$ (de oppervlakte van de waterplant in januari van dit jaar.)

De **2** is de groeifactor. De groeifactor geeft aan hoeveel de oppervlakte elk jaar toeneemt. In het voorbeeld van de waterplant wordt de oppervlakte elk jaar 2 maal groter.

We bekijken nog eens de grafiek die bij dit voorschrift hoort.



12. Bepaal in welk jaar er 120 km², 960 km² en 1500 km² van het meer bedekt zal zijn. Je mag om deze vraag op te lossen het functievoorschrift gebruiken, de grafiek en je GRM.

In deze werktekst hebben we eerst een functievoorschrift gezocht om de *oppervlakte te vinden* als *de tijd gegeven* is (zie vraag 8). Dit voorschrift hebben we gebruikt om op een willekeurig ogenblik de corresponderende oppervlakte te vinden. In vraag 9 hebben we t door 10 vervangen en vonden we de bijhorende oppervlakte A.

De functie kunnen we echter niet rechtstreeks gebruiken als we de vraag veranderen – als we *de tijd moeten vinden* als *de oppervlakte gegeven* is. In vraag 12 was telkens de oppervlakte gegeven en het bijhorende tijdstip was gevraagd. We moesten de volgende vergelijkingen oplossen: $120 = 30 \cdot 2^t$, $960 = 30 \cdot 2^t$ en $1500 = 30 \cdot 2^t$ of na vereenvoudiging: $4 = 2^t$, $32 = 2^t$ en $50 = 2^t$. De eerste twee vergelijkingen zijn eenvoudig op te lossen omdat de gezochte exponent t een natuurlijk getal is. De laatste vergelijking ‘komt niet mooi uit’. Toch kan de oplossing benaderend gevonden worden door te redeneren dat t tussen 5 en 6 moet liggen. We kunnen het resultaat ook aflezen van de grafiek of berekenen met de GRM. Feit is dat we op zoek gaan naar een exponent. We zoeken de exponent waartoe we 2 moeten verheffen om 50 te bekomen. De functie die dit soort vraag oplost, noemen we de *logaritmische functie*. Het is de omgekeerde functie van de exponentiële functie.

We schrijven deze functie als volgt ${}^2 \log 50$

Het functievoorschrift $t = {}^2 \log 50$ geeft de tijd horende bij een gegeven oppervlakte.

Schematisch kunnen we exponentiële en logaritmische functies als volgt voorstellen:

In vraag 1 – 11 gebruiken we de exponentiële functie om de oppervlakte te vinden bij een gegeven tijdstip:

GEGEVEN		GEVRAAGD
Tijd	—————→	oppervlakte
	Exponentiële functie	
10 jaar	—————→	30 720 m ²
	$30 \cdot 2^{10}$	

In vraag 12 gebruiken we de logaritmische functie om het tijdstip te vinden bij een gegeven oppervlakte. We zoeken daarenboven een exponent.

GEGEVEN		GEVRAAGD
oppervlakte	—————→	Tijd
	Logaritmische functie	
1500 m ²	—————→	5,64 jaar
	${}^2\log \frac{1500}{30}$	

De tweede uitdrukking ${}^2\log 50$ geeft aan dat de groeifactor voor de waterplant 2 is. ${}^2\log 50$ geeft het ogenblik dat de plant een oppervlakte van 1500 m² $\left(\frac{1500}{30} = 50\right)$ bedekt als de groeifactor van de waterplant 2 is. Daarnaast is het de exponent waartoe je 2 moet verheffen om 50 te bekomen. Dus ${}^2\log 50 = 5,64385619\dots$

Zo ook is ${}^2\log 8 = 3$

context-betekenis: 3 (jaar) is het ogenblik waarop 240 m² van de oppervlakte van het meer bedekt wordt door de plant als de groeifactor 2 is en de oppervlakte die oorspronkelijk bedekt was 30 m² is.

abstracte-betekenis: 3 is de exponent waartoe je 2 moet verheffen om 8 te bekomen

13. Leg uit waarom ${}^3\log 81 = 4$

14. Bepaal $^5 \log 25$

15. Bepaal indien mogelijk de volgende logaritmen:

- $^2 \log 64 =$
- $^2 \log 128 =$
- $^2 \log 1024 =$
- $^2 \log 16 =$
- $^2 \log 1 =$
- $^2 \log 0 =$
- $^2 \log (-7) =$
- $^2 \log \frac{1}{2} =$
- $^2 \log \frac{1}{8} =$
- $^3 \log 9 =$
- $^{10} \log 1000 =$
- $^4 \log \frac{1}{16} =$
- $^{\sqrt{2}} \log 8 =$
- $^3 \log (-9) =$
- $^0 \log 9 =$
- $^1 \log 9 =$
- $^5 \log 5 =$

Algemeen (vul de volgende definitie aan)

De logaritmische functie met grondtal a heeft als voorschrift

$y = {}^a \log x$, hierbij is $a \in$ _____, $x \in$ _____ en $y \in$ _____

Tevens geldt: $y = {}^a \log x \Leftrightarrow$ _____

Opmerking: Op de GRM vind je LOG. Dit is de logaritme met grondtal 10. We schrijven de 10 niet. Deze logaritme wordt de Briggse logaritme genoemd.

De volgende eigenschap laat je toe om een willekeurige logaritme met de GRM te berekenen:

$${}_b \log x = \frac{{}_a \log x}{{}_a \log b} \text{ Als we immers } a = 10, \text{ dan wordt de formule: } {}_b \log x = \frac{\log x}{\log b}.$$

16. Gebruik de bovenstaande eigenschap om ${}_2 \log 50$ te berekenen.

17. Maak de grafiek van de logaritmische functie met grondtal 2 met de GRM.

18. Teken met de GRM de volgende functies: $y = 2^x$ en $y = {}_2 \log x$. Bestudeer het verband tussen deze grafieken.

Exponentiële en lineaire groei

Werktekst 2: Baggeren en algen

In een riviervlakte wordt grind gebaggerd. Zo ontstaat een meer. Bij het begin van de werken heeft dit meer een oppervlakte van 800 m^2 water. Door de baggerwerken wordt het meer elke week 550 m^2 groter. Na het baggeren wil men het meer zo vlug mogelijk voor waterrecreatie gebruiken. Daarom wordt de kwaliteit van het water regelmatig gecontroleerd. Bij het begin van de werken vindt men 5 m^2 van een bepaalde algensoort in het meer. Tijdens de volgende weken verdubbelt deze oppervlakte elke week. Iemand merkt op dat hier iets aan gedaan moet worden. Het meer zal anders vlug volledig bedekt zijn met algen. Maar de beambte van het ministerie van volksgezondheid ziet voorlopig geen gevaar: “Het meer wordt toch elke week 550 m^2 groter.”

Wat denk jij hiervan? Los de onderstaande vragen op om een antwoord te vinden op deze vraag.

- Onderzoek hoe beide oppervlakte groeien. Vul hiervoor de volgende tabel in:

Tijdstip (in weken) na begin baggeren	Oppervlakte meer in m^2	Oppervlakte algen in m^2
0	800	5
1	$800 + 550 =$	$5 \cdot 2 =$
2		
3		
5		
10		
15		
t		

- Noem $f(t)$ de oppervlakte van het meer en $g(t)$ de oppervlakte ingenomen door de algen, t weken na het begin van het baggeren. Geef het voorschrift van $f(t)$ en $g(t)$.

3. Plot de grafiek van beide oppervlakten in functie van de tijd.
4. Na hoeveel weken is het meer vol algen als men blijft baggeren en de algen op dezelfde wijze blijven groeien? Lees dit af van de grafiek uit 3.
5. Wat vind jij het meest opvallende verschil tussen beide grafieken?
6. Wat gebeurt er met de oppervlakte van het meer per week?

We noemen de groei van de oppervlakte van het meer *lineair*. Het woord lineair komt vanuit het latijn 'Linea recta'.

7. Tracht te verklaren waarom dit juist lineaire groei genoemd wordt?

8. De groeisnelheid is de hoeveelheid oppervlakte waarmee het meer per week toeneemt. Wat is de groeisnelheid?
9. Bekijk het functievoorschrift voor $f(t)$. Waar vind je hier de groeisnelheid terug? Waar vind je de oorspronkelijke oppervlakte van het meer terug?

Bij lineaire groei is het functievoorschrift van de vorm $f(x) = ax + b$

Hierbij is b de beginwaarde en a de groeisnelheid. De grafiek is een rechte. b geeft de hoogte aan waarop de grafiek de y -as snijdt en a geeft de helling van de grafiek. Bij gelijke tijdsintervallen zijn ook de (oppervlakte-) toenames gelijk.

10. De groeisnelheid van de oppervlakte van de algen is niet constant. Verklaar.
11. Wat is het verband tussen de oppervlakte na 7 weken en de oppervlakte na 8 weken?

We noemen dit getal de groeifactor over de 8^{ste} week.

Algemeen: groeifactor over de n -de week = $\frac{\text{oppervlakte einde } n\text{-de week}}{\text{oppervlakte begin } n\text{-de week}}$

12. Hoe groot is de groeifactor van de algen over de 3^{de} week? En over de 5^{de} en 7^{de} week? Wat valt op?

We noemen de groei van de oppervlakte van de algen *exponentieel*.

Bij exponentiële groei ontstaat de volgende waarde uit de vorige door vermenigvuldiging met een getal. Dit getal is constant als de tijdsintervallen even groot zijn. Dit getal heet de *groeifactor*.

13. Bekijk het functievoorschrift voor $g(t)$. Tracht te verklaren waarom deze groei *exponentieel* genoemd wordt.

14. In een andere vijver zit een algensoort die per drie weken verzesvoudigd. Groeit deze soort even snel als de eerste?

15. Bedenk een functievoorschrift voor de oppervlakte van een algensoort waarvan er op een tijdstip $t = 0$ 8m² was en de oppervlakte elke week met de helft van de oppervlakte toeneemt.

16. Bedenk een functievoorschrift voor de oppervlakte van een algensoort waarvan er op een tijdstip $t = 0$ 8m² was en de oppervlakte elke week met 25% toeneemt.

17. Met hoeveel procent groeien de algen uit vraag 1 per week?

Bij exponentiële groei is het functievoorschrift $f(x) = b \cdot g^x$

Met b de beginwaarde ($x = 0$) en g de groeifactor over het tijdsinterval

Als de procentuele toename per tijdseenheid $p\%$ is, dan is de groeifactor $1 + \frac{p}{100}$.

Werktekst 3: Bacteriën

‘Bij bacteriën vindt de voortplanting meestal ongeslachtelijk plaats doordat één bacterie zich in tweeën deelt. Dat gebeurt in gunstige omstandigheden bijna om de 20 minuten. Als je die gegevens uitzet in een grafiek, geeft de figuur je een idee van de bevolkingsexplosie die één enkel bacterie kan veroorzaken.’ (Uit Macro/micro in de biologie 4)

1. Bepaal het aantal bacteriën na 20, 40... minuten. En vul de onderstaande tabel aan:

Tijd in minuten	20	40	60	80					
Aantal bacteriën									

2. Voer de bovenstaande waarden in in je GRM en maak een grafiek door de punten te plotten.
3. Bepaal het aantal bacteriën na t minuten en geef dus een functievoorschrift voor het aantal bacteriën in functie van de tijd uitgedrukt in minuten.
4. Pas exponentiële regressie toe op de ingevoerde lijsten en bepaal zo een exponentieel functievoorschrift voor het aantal bacteriën.

5. Heb je in vraag 3 en 4 hetzelfde voorschrift gevonden? Indien niet, los je de volgende vragen op.

5.1. Na 20 minuten zijn er 2 bacteriën. Vul in je voorschrift 20 in voor de onbekende x , wat is je resultaat? Herhaal dit als de tijd 40, 60, 80 minuten is.

Na ... minuten	Zijn er ... bacteriën	Het aantal is ... maal verdubbeld
20	2	1
40	4	2
60		
100		
180		
X		

5.2. Geef nu het juiste voorschrift en vergelijk met het voorschrift van de GRM.

6. Bepaal na hoeveel uur er één miljoen bacteriën zijn. Geef je antwoord correct tot op de minuut.

Exponentiële en logistische groei

Werktekst 4: Over duiven en zeehonden



De wilde duiven van Venetië moeten aan de pil. Er zijn er teveel. Daarom wil de stad de populatie met de helft terugbrengen door de beesten voer te geven, waarin een middel zit dat de voortplanting stopt. Privé personen die de duiven nog zouden voeren, kunnen rekenen op een fikse boete. Enkel voor het befaamde San Marcoplein wordt een uitzondering gemaakt. (Uit 'Het nieuwsblad' enkele jaren geleden)

DENDERMONDE - „Bouw speciale duivenhokken voor de zwerfduiven. Verbied de bewoners de duiven nog te voederen. En vervang de duiveneieren door gipsen exemplaren." Dat is het recept waarmee Gaia de duivenplaag in Dendermonde en Baasrode wil indijken. Milieuambtenaar Tarcy Vander Straeten ziet wel wat in het voorstel omdat er ook elders met

die methode al succes is geboekt. De geplaagde bewoners zelf zijn kritisch: “Men had het probleem veel sneller moeten aanpakken toen het nog veel beperkter was.” “Duiven slagen er zeer goed in om de eigen populatie te controleren afhankelijk van het voedsel dat ze ter beschikking hebben. Indien men de inwoners ervan kan overtuigen om hun voederactiviteiten drastisch te verminderen, zal het aantal duiven sterk afnemen, zelfs zonder dat men bijkomende maatregelen moet nemen.” (Uit 'Het Nieuwsblad' zaterdag 19/11/05)

De bovenstaande artikels geven aan dat de mens de natuur beïnvloedt. Plaats eenzelfde populatie dieren in een stedelijk gebied en in de natuur en je zult merken dat ze op een andere manier evolueert. In deze werktekst bestuderen we de groei van een populatie. De populatiegrootte op tijdstip t stellen we voor door $N(t)$. We veronderstellen dat de relatieve

(ogenblikkelijke) groeisnelheid $\frac{N'(t)}{N(t)}$ constant is en noteren ze met r . Deze veronderstelling

betekent dat de *absolute groeisnelheid* $N'(t)$ recht evenredig is met het *aantal duiven*. Dit is logisch. Als er weinig duiven zijn, kunnen er ook weinig duiven geboren worden en als er veel duiven zijn, wordt er veel gepaard en kunnen er veel duiven geboren worden. “Hoe meer zielen, hoe meer vreugd.” De populatiegrootte groeit in dergelijke omstandigheden exponentieel.

1. De functie die de evolutie van de populatiegrootte beschrijft, is de exponentiële functie met als vergelijking: $N(t) = N_0 e^{rt}$. Verklaar dit!

De grafiek van deze functie wordt in de biologie een *J-vormige* groeicurve genoemd. We zullen nochtans merken dat de grafiek niet altijd lijkt op een *J*.

In wat volgt veronderstellen we dat er 10 (vrouwelijke) duiven in een bepaald gebied zijn op het tijdstip $t = 0$.

- 2

6. In de streek waar we de duiven onderzoeken, is de groeisnelheid 0,5. Bereken wanneer de populatie duiven verdubbeld is. We veronderstellen dat de tijd in het exponentieel model wordt uitgedrukt in jaren.

In ongelimiteerde situaties, d.w.z. wanneer alle individuen zich naar hartelust kunnen voortplanten (geen gebrek aan energie, partners, ...) zal een populatie aan een maximale snelheid groeien. Deze maximale snelheid wordt de *intrinsieke groeisnelheid* genoemd en we noteren ze met r_m . De intrinsieke groeisnelheid is eigen aan de populatie omdat enkel de karakteristieken van het organisme zelf bepalen hoeveel nakomelingen geproduceerd kunnen worden. In het onderstaande tekstje is bijvoorbeeld sprake van de intrinsieke groeisnelheid van een zeehondenpopulatie.

‘Voor het totale internationale waddengebied is de groeisnelheid van de zeehondenpopulatie ruim twaalf procent. [...] De groeisnelheid zit vlakbij de intrinsieke groeisnelheid van dertien procent voor deze diersoort, het kan met andere woorden nauwelijks sneller toenemen.’

Voor een populatie die onbeperkt groeit aan zijn intrinsieke groeisnelheid ontwikkelden we dus het volgende model: $N(t) = N_0 e^{r_m t}$. Onder invloed van allerlei omstandigheden kan dit exponentiële groeimodel danig verstoord worden. Het toedienen van de ‘duivenpil’ gelijktijdig met voedsel zal bijvoorbeeld zorgen voor een vermindering van de groeisnelheid.

‘Uit de praktijk blijkt dat deze manier niet altijd even goed uitwerkt. Er worden onvolkomen jonge dieren uitgebroed die zwaar gehandicapt zijn.’

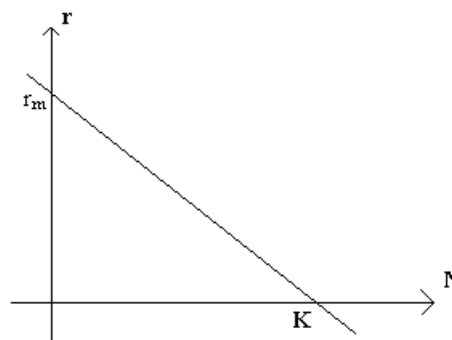
Het niet meer voeren van duiven heeft geen directe invloed op de groeisnelheid van een populatie maar eerder op het aantal duiven dat zich al dan niet in een gebied bevindt.

Werktekst 1: Er kan geen duif meer bij

Het is natuurlijk onrealistisch dat het aantal duiven ongelimiteerd kan aangroeien. Naarmate de populatie groeit, zullen de individuen het in werkelijkheid moeilijker krijgen om genoeg voedsel te vinden voor het levensonderhoud, de lichaamsgroei en de reproductie. Er bestaat een grens aan het aantal individuen van een bepaalde soort dat een gegeven ruimte kan dragen. Ecologen noemen deze grenswaarde de *draagkracht* van de habitat (de streek waar de populatie voorkomt). Het is de maximale populatiegrootte die een bepaald gebied kan dragen over een langere periode. We zullen de draagkracht met K noteren. De draagkracht is een eigenschap van de omgeving en varieert in tijd en ruimte, naargelang de variatie in beschikbare hulpbronnen. In wat volgt zullen we rekening houden met deze draagkracht. We zullen afwisselend met een algemene draagkracht K en intrinsieke groeisnelheid r_m werken en met concrete waarden $K=100$ en $r_m=0,5$ die ons toelaten om berekeningen uit te voeren. We zullen er steeds van uitgaan dat de intrinsieke groeisnelheid $r_m > 0$.

1. Leg uit wat de betekenis is van $K=100$.

Omwillen van de beperkte draagkracht van de omgeving, is het dus niet houdbaar om te veronderstellen dat de relatieve groeisnelheid constant is. Als er weinig duiven zijn, zal de groeisnelheid per duif ongeveer gelijk zijn aan de intrinsieke groeisnelheid. Hoe dichter de populatiegrootte bij de draagkracht K komt, hoe lager de relatieve groeisnelheid. We zoeken dus een formule voor de relatieve groeisnelheid r zo dat r ongeveer r_m wordt als het aantal duiven veel kleiner is dan K en zo dat r ongeveer 0 wordt als het aantal duiven de draagkracht K nadert. De eenvoudigste functie die aan deze voorwaarden voldoet is de lineaire functie hieronder:



2. Bepaal de vergelijking van de bovenstaande rechte, d.w.z. geef het verband tussen de relatieve groeisnelheid r en de populatiegrootte N . Werk met een algemene K en r_m .
3. Wat wordt de vergelijking als $K=100$ en $r_m=0,5$?

4. Controleer dat je de vergelijking die je vond in 2 in de vorm $r = r_m \frac{K - N}{K}$ kan schrijven.

$\frac{K - N}{K}$ is de *ongebruikte mogelijkheid voor groei* van de populatie. In de vorige werktekst veronderstelden we dat $\frac{N'(t)}{N(t)} = r$ waarbij r constant is, dit betekent dat de relatieve groeisnelheid constant is. In deze werktekst hebben we een goede formule gevonden om de grootte van de populatie en de draagkracht in rekening te brengen. De relatieve groeisnelheid is afhankelijk van de grootte van de populatie en de draagkracht van het gebied. We gebruiken het resultaat van vraag 4 en veronderstellen dat

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = r_m \frac{K - N(t)}{K}$$

en laten op deze manier de relatieve groeisnelheid variëren in de tijd. De absolute groeisnelheid wordt dan gegeven door

$$N'(t) = r_m N(t) \frac{K - N(t)}{K}$$

5. Vul de onderstaande tabel in voor $K = 100$ en $r_m = 0,5$.

Aantal duiven	Absolute groeisnelheid (onbegrensde groei)	Ongebruikte mogelijkheid voor groei	Absolute groeisnelheid (begrensde groei)	Relatieve groeisnelheid (begrensde groei)
N	$r_m N$	$\frac{K - N}{K}$	$r_m N \frac{K - N}{K}$	$r_m \frac{K - N}{K}$
1				
25				
50				
75				
99				
100				

- 6.

7. Leg m.b.v. de getallen uit de derde kolom de betekenis uit van de term ‘ongebruikte mogelijkheid voor groei’.
8. Hoe evolueren de absolute en relatieve groeisnelheid bij begrensde groei als het aantal duiven toeneemt? Verklaar dit verloop m.b.v. de getallen in de eerste drie kolommen. Waar vermoed je een maximale groeisnelheid?
9. Hierboven is een grafiek gegeven van de *relatieve* groeisnelheid r in functie van de populatiegrootte N . Schets nu ook een grafiek van de *absolute* groeisnelheid N' in functie van de populatiegrootte N als de intrinsieke groeisnelheid positief is. Verklaar hiermee de vaststellingen uit de tabel.

10. Verklaar waarom deze evolutie van de absolute groeisnelheid klopt met de realiteit.

Algemene sinusfunctie

Werktekst 1: Prooi-roofdier-model.

Een prooi-roofdier-cyclus wordt beschreven door de functies

$$N_1(t) = 200 \sin(0,2\pi t) + 400 \text{ (aantal prooidieren)}$$

$$N_2(t) = 300 \sin(0,2\pi(t-2)) + 500 \text{ (aantal roofdieren)}$$

Hierbij wordt de tijd t uitgedrukt in jaren.

1. Teken de grafieken van het aantal prooidieren en van het aantal roofdieren als functie van de tijd.
2. Bepaal de periode van de cyclus.
3. Bepaal wanneer er 500 prooidieren zijn gedurende één periode.
4. Bepaal hoeveel roofdieren er dan zijn. Indien je vraag 3. niet vond, bepaal je het aantal roofdieren als $t = 3$.
5. Bepaal wanneer er binnen één periode evenveel prooidieren als roofdieren zijn.
6. Bepaal hoelang er binnen één periode meer dan 600 roofdieren zijn.
7. Bepaal rond welke waarden beide populaties zweven volgens dit model.

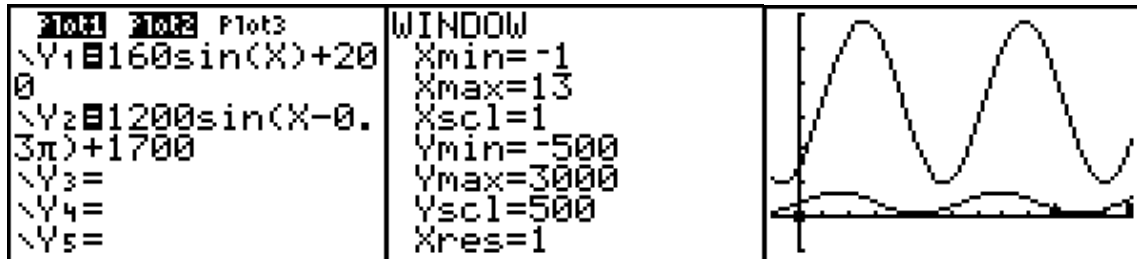
Werkteskt 2: konijnen en vossen

In een bepaald gebied in Wales zijn konijnen een prooi voor het roofdier vos. De populatie kan gevolgd worden aan de hand van de volgende functievoorschriften:

de populatie vossen: $N_1(t) = 160 \sin(t) + 200$

de populatie konijnen: $N_2(t) = 1200 \sin(t - 0,3\pi) + 1700$

Hierbij is telkens $t = 0$ op 01/01/2000



1. Hoeveel konijnen en hoeveel vossen zijn er op 1 januari 2006?
2. Gedurende welke periode tussen 1 januari 2000 en 1 januari 2006 zijn er meer dan 300 vossen?
3. Gedurende welke periode tussen 1 januari 2000 en 1 januari 2006 zijn er minder dan 800 konijnen?

Eerste, tweede en derdegraadsfuncties

Werktekst 1: Ik ben niet te dik, ik ben te klein

In sommige landen vindt men dikke mensen mooi. Het is een teken van vruchtbaarheid en rijkdom. Bij ons is slank zijn eerder een schoonheidsideaal. Heel dik of heel mager zijn, is natuurlijk niet goed voor je gezondheid. Maar wat is het ideale gewicht? Er bestaan vele formules om dit ideale gewicht te berekenen. We bespreken er hier enkele.

We merken vooraf op dat de meeste formules die we hier gebruiken enkel gelden voor volwassenen of jongeren die ouder zijn dan 16 jaar. De verhoudingen tussen gewicht en lengte zijn anders bij kinderen en jongeren die nog volop in hun groeiproces zitten.

Het is logisch dat je je gewicht moet vergelijken met je lengte. De meest eenvoudige formule voor je ideale gewicht is:

$$\text{gewicht (in kg)} = \text{lengte (in cm)} - 100$$

1. Ga na of deze formule voor jou klopt.
2. Vermeld enkele nadelen van deze formule.

Een betere manier om je ideale gewicht te kennen, is gebruik te maken van de *body-mass-index* (BMI):

$$\text{BMI} = \frac{\text{gewicht (in kg)}}{\text{lengte}^2 \text{ (in m}^2\text{)}}$$

Deze index wordt ook *Quételet-index* genoemd, naar de Belg Adolphe Quételet (1796 – 1874), die in 1835 een werk publiceerde over de ‘gemiddelde’ mens.

3. Bereken de BMI van Peter die 170 cm meet en 65 kg weegt.

4. Bereken je eigen BMI.

5. Vergelijk je resultaat met de volgende tabel:

BMI < 18	ondergewicht
$18 \leq \text{BMI} < 25$	normaal gewicht
$25 \leq \text{BMI} < 27$	neiging tot overgewicht
$27 \leq \text{BMI} < 30$	overgewicht
$30 \leq \text{BMI} < 40$	zwaarlijvigheid (obesitas)
$40 \leq \text{BMI}$	ernstige zwaarlijvigheid

Een te lage of te hoge BMI-waarde is slecht voor je gezondheid. Omdat je niets kan veranderen aan je lichaamslengte, moet je in dat geval zorgen dat je gewicht toeneemt of afneemt.

Noem je (constante) lichaamslengte k , je veranderlijke gewicht x en de BMI y . De formule wordt dan:

$$y = \frac{x}{k^2}.$$

6. Welk soort functie is dit? Hoe ziet de grafiek er dus uit?

7. Peter (uit vraag 3) wil weten wat zijn minimum en maximum ‘normaal’ gewicht is. Bepaal deze minimum- en maximumgrens grafisch.

8. Je kunt deze grenzen ook algebraïsch bepalen door vergelijkingen op te lossen. Doe dit en controleer je resultaten met de antwoorden bij vraag 7.

9. Wanneer is iemand die dezelfde lengte heeft als jij te mager (ondergewicht)? Schrijf de ongelijkheid op die hierbij hoort en los die algebraïsch op.

10. Wanneer is iemand met dezelfde lengte als jij ‘ernstig zwaarlijvig’ (zie tabel BMI)? Los ook die ongelijkheid algebraïsch op.

11. Vragen 9 en 10 kan je ook grafisch oplossen. Hoe doe je dit?

We schrijven de formule voor BMI in een vorm die lijkt op de eerste formule (zie boven vraag 1), zodat we nadien de twee formules kunnen vergelijken.

12. Herschrijf de formule voor BMI in een vorm die het gewicht uitdrukt in functie van de lengte.

13. Welk soort functie krijg je nu als je BMI constant zou blijven en je lengte varieert?

14. Laat je grafisch rekenapparaat of computer op éénzelfde assenstelsel de grafieken plotten die horen bij een BMI van 18 en van 25. Zorg dat je de grafieken mooi in beeld krijgt en dat de waarden op de x -as (lengte) en y -as (gewicht) realistisch gekozen zijn.

15. Ga op de eerste grafiek op het punt met x -coördinaat 1,65 staan. Wat is de bijbehorende y -coördinaat en wat is hiervan de betekenis?
16. Neem dan het punt op de tweede grafiek met x -coördinaat 1,65. Wat is nu de bijbehorende y -waarde en betekenis?
17. Wat stelt het gebied tussen deze krommen voor?
18. Laat je grafisch rekenapparaat of computer op éénzelfde assenstelsel de grafieken plotten die horen bij een BMI van 18, 25, 27, 30 en 40 (de grenswaarden uit de tabel).
19. Deze grafieken verdelen het xy -vlak in stroken. Geef een interpretatie voor elke strook.
- We willen nu de eerste formule (gewicht = lengte – 100) en de tweede formule (gewicht = BMI · lengte²) met elkaar vergelijken via hun grafieken.
20. De eenheid voor lengte in de eerste formule is centimeter, terwijl je in de BMI-formule rekent met meter. Pas het voorschrift van de eerste formule aan zodat de lengte x ook hier in meter wordt uitgedrukt.
21. Voeg de grafiek van die functie (eerste formule) toe aan de twee grafieken die horen bij een BMI van 18 en 25 (tweede formule).

22. Voor welke lengtes geven de eerste en tweede formule een vergelijkbaar resultaat ('ideale' gewicht uit eerste formule = 'normaal' gewicht voor tweede formule)? Bepaal deze grenzen grafisch.

23. Reken deze grenswaarden algebraïsch na.

24. Je ziet dat de rechte (eerste formule) sterk aanleunt bij de tweede parabool (tweede formule, BMI van 25). Geef hiervoor een interpretatie.

In de eerste formule was het gewicht (y) een *eerstegraadsuitdrukking* van de lengte (x): $y = 100x - 100$. Bij de tweede formule was het gewicht, bij vaste BMI, evenredig met het *kwadraat* van de lengte: $y = \text{BMI} \cdot x^2$. Toch zijn mensen geen tweedimensionale figuren! Je zou verwachten dat het gewicht evenredig is met een volume, een *derde* macht dus. We onderzoeken nu waarom bij de berekening van een 'gezond' gewicht geen derde macht voorkomt.

25. Peter meet 1,60 m en weegt 64 kg. Bereken zijn BMI.

Boris is veel groter: hij meet 2 m. Hij is dus 25% groter dan Peter of anders gezegd: als je de lengte van Peter vermenigvuldigt met 1,25 dan verkrijg je de lengte van Boris. Veronderstel nu dat Boris 'dezelfde vorm' heeft als ('gelijkvormig' is met) Peter. Dan verwacht je dat ook zijn 'breedte' en 'diepte' ('dikte') met 1,25 vermenigvuldigd worden.

26. Bereken dan het gewicht van Boris, als je weet dat gewicht evenredig is met volume.

27. Dit lijkt veel. Bereken de BMI van Boris.

Zoals uit je berekeningen blijkt, situeert Peter zich op de grens van een 'normaal' gewicht, maar Boris lijdt aan 'zwaarlijvigheid'.

Als je groeit en toch een 'gezond' gewicht wil houden, mag je 'breedte' en 'diepte' ('dikte') dus niet met hetzelfde percentage toenemen. Of anders geformuleerd: mensen met een zelfde BMI zijn niet gelijkvormig!

Statistiek

Werktekst: Lengte en schoenmaat

Om te onderzoeken of er een verband bestaat tussen de lengte en de schoenmaat van personen heb je gegevens nodig.

1. Denk je dat er een verband is tussen de lengte en de schoenmaat?

Hieronder vind je de lengte en de schoenmaat van 10 jongens. De gegevens komen van een (oude) militaire keuring.

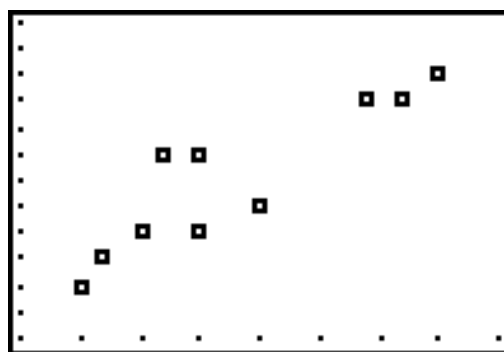
Lengte	165	167	170	172	175	175	180	189	192	195
Schoenmaat	37	38	39	42	39	42	40	44	44	45

2. Voer deze gegevens in in je grafisch rekentoestel (bijvoorbeeld in L₁ en L₂) en laat je rekentoestel een spreidingsdiagram tekenen. (Vergeet niet de gewone functies op je GRM uit te zetten Y=.)

De verschillende punten op het spreidingsdiagram vormen een puntenwolk. Puntenwolken hebben een globale vorm. Op basis hiervan kan je eerste besluiten trekken over een mogelijke samenhang.

De punten uit de bovenstaande set gegevens, liggen duidelijk zeer dicht bij een rechte. Vandaar dat we spreken van *lineaire samenhang*.

3. Schets op het spreidingsdiagram de rechte die volgens jou het verband het beste weergeeft.

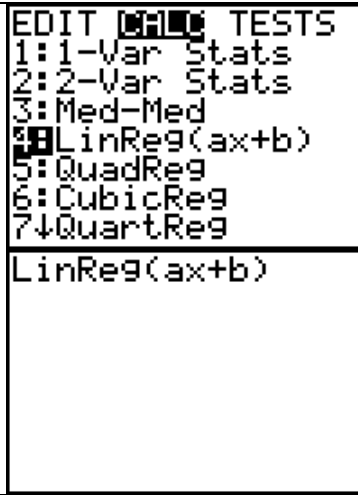


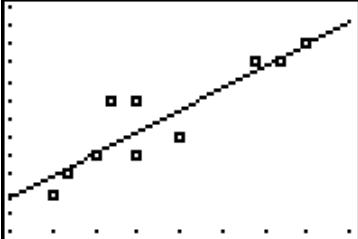
Als de rechte stijgend is, spreken we van een *positief lineair verband*. Bij een *negatief lineair verband* hoort bijgevolg een dalende rechte.

4. Wat is hier de richting van de puntenwolk? Welk soort verband is er? Leg in woorden uit wat de betekenis is van dit verband voor de dataset van de schoenmaten.

5. De richtingscoëfficiënt van de rechte is een getal dat een maat is voor de richting van de rechte. Bepaal de richtingscoëfficiënt van de rechte die jij tekende. De eenheid op de horizontale as is 5 cm, op de verticale as 1. Wat betekent deze richtingscoëfficiënt voor het verband tussen de lengte en de schoenmaat van de kandidaat-soldaten?
6. Geef de vergelijking van de rechte die jij tekende.
7. Wat is een ‘normale’ schoenmaat voor iemand met jouw lengte?
8. Vergelijk je rechte met die van andere leerlingen. Heeft iedereen dezelfde rechte? Voorspel nu de schoenmaat voor iemand met lengte 172 cm. Voorspelt iedereen dezelfde schoenmaat?

Je rekenmachine kan ook zo’n rechte bepalen (we maken ons voorlopig geen zorgen over de manier waarop de rekenmachine de rechte bepaalt). Ze wordt de *regressierechte* genoemd. Het gaat als volgt:

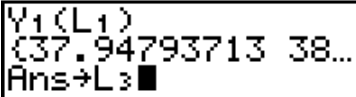
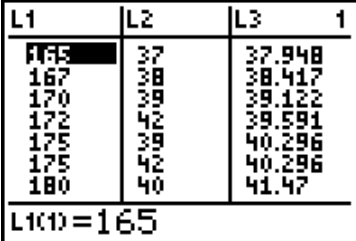
Druk [STAT] en ga via de pijltjestoets naar het [CALC] menu Ga m.b.v. de pijltjestoetsen naar [4: LinReg(ax+b)] en druk [ENTER]	 EDIT TESTS 1:1-Var Stats 2:2-Var Stats 3:Med-Med 4:LinReg(ax+b) 5:QuadReg 6:CubicReg 7:QuartReg LinReg(ax+b)
--	---

Druk [2nd L₁] en [2nd L₂] Druk [VARS] en beweeg de cursor naar [Y-VARS] Kies [1: Function] door op [ENTER] te drukken Kies [1: Y₁] en druk [ENTER]	<pre>LinReg(ax+b) L1, L2,Y1</pre>
Druk nogmaals [ENTER] om de lineaire functie te vinden die het meest overeenstemt met de waarden in L₁ en L₂. Deze wordt tevens opgeslagen in de functie Y₁	<pre>LinReg y=ax+b a=.2347740668 b=-.78978389</pre> <pre>Y1 Plot2 Plot3 \Y1 .23477406679 764X+ -.789783889 98 \Y2= \Y3= \Y4= \Y5=</pre>
Druk op [GRAPH] om de grafiek te zien, tezamen met de waarden	

9. Gebruik nu de regressierechte van je rekentoestel om vraag 7 en 8 te beantwoorden. Zat je eigen voorspelling dicht bij de resultaten van je rekentoestel?

We kunnen bij elke lengte van de gegeven data de schoenmaat voorspellen m.b.v. de regressievergelijking. Dit gaat eenvoudig met je rekentoestel.

Maak de lijst [Y₁(L₁)] en druk [ENTER]	<pre>Y1(L1) (37.94793713 38...</pre>
---	--------------------------------------

Sla deze lijst op in [L ₃]	
Via [STAT], [1:Edit] vind je de lijsten met de lengte, de schoenmaten en de voorspelde schoenmaten via de regressierechte	

10. Bereken nu bij elke lengte het verschil tussen de gegeven schoenmaat en de voorspelde schoenmaat. Dit gaat ook eenvoudig met je rekentoestel door de lijst [L₂-L₃] te maken.

Men noemt dit verschil het *residu*.

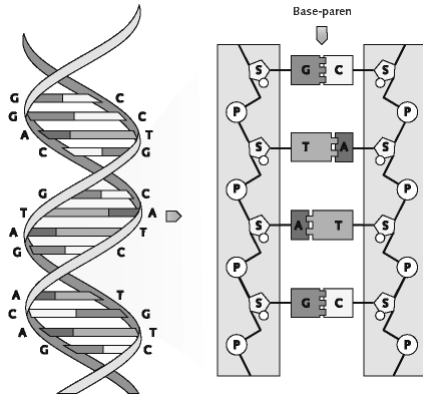
11. Wat betekent het dat een residu positief/negatief is?

Je rekentoestel berekent bij elke regressie automatisch de residu's. Ze worden bewaard in de lijst [RESID]. Je kunt deze lijst oproepen via [2nd][LIST][NAMES]. Het zijn de residu's die aangeven in hoeverre het model afwijkt van de realiteit.

Telproblemen en boomdiagrammen

Werktekst 1: Genetica en tellen

DNA-onderzoek kent allerlei toepassingsgebieden. In de medische wereld gebruikt men DNA-onderzoek o.a. om genetische afwijkingen op te sporen. In de juridische wereld kan men via DNA-onderzoek informatie over de dader van een misdaad of het slachtoffer opsporen of kan men vaderschap aantonen.



DNA (*Deoxyribo-Nucleic-Acid*) is een molecule die ons genetisch materiaal bevat. Ze heeft de vorm van een dubbele spiraal. Elke spiraal is een keten, opgebouwd uit suikers (*desoxyribose*) en fosfaten. Tussen de ketens van het DNA bestaan dwarsverbindingen. Je kunt de ketens vergelijken met de spanten van een ladder en de dwarsverbindingen met de sporten. Elke dwarsverbinding bestaat uit twee basen. Er zijn vier verschillende basen: Cytosine (C), Guanine (G), Thymine (T) en Adenine (A).

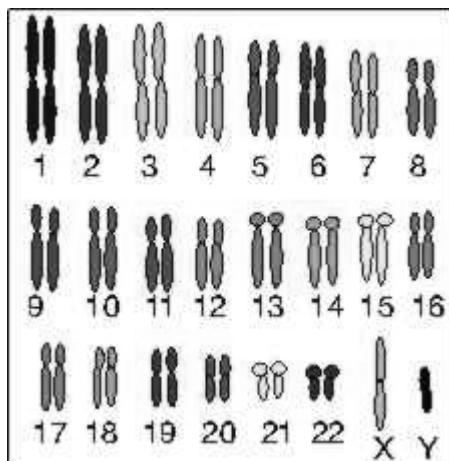
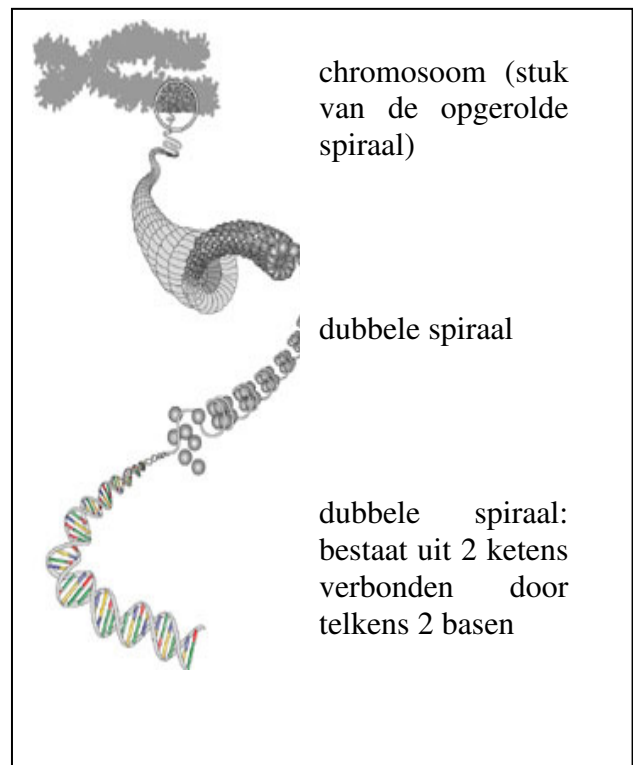
1. De twee basen die de dwarsverbinding maken zijn niet willekeurig, enkel de volgende verbindingen zijn mogelijk: C met G en T met A. Stel dat op een stuk (*streng*) van de ene keten de basen in de volgorde ACCACGTTGGCAA voorkomen, bepaal dan de volgorde van de basen op de andere keten.

Unieke erfelijke eigenschappen ontstaan o.a. door verschillen in de volgorde van de basen A, G, C en T. We spreken van een DNA-code, hierbij is de code AAG verschillend van de code AGA. De opeenvolgende basen van het DNA worden per drie gegroepeerd. In de biologie spreekt men van een tripletcode. Dit krijgt ook nog andere namen zoals codogen.

2. Hoeveel combinaties van drie opeenvolgende basen zijn er mogelijk?

De dubbele spiraal van het DNA bestaat uit wel 3 miljard basen. Deze 3 miljard basen bevinden zich op 46 aparte stukken van het DNA, de chromosomen. De chromosomen komen in onze cellen in paren voor, we spreken van 23 paren homologe (gelijk-aardige) chromosomen. De chromosomenparen worden genummerd van 1 tot 22. Het 23^{ste} paar is het chromosomenpaar dat het geslacht bepaalt (XX zijn vrouwen, XY zijn mannen).

Wat gebeurt er nu bij de voortplanting? Tijdens een proces dat we *meiose* noemen, wijken de homologe chromosomen uiteen en worden ze tegelijk willekeurig gesorteerd. Men spreekt hier van *mixing*.



In de zaadcellen en eicellen (*gameten* genaamd) komen de chromosomen niet meer in paren voor. Elke gameet bevat slechts 23 chromosomen en deze komen dus op een willekeurige manier uit de 23 paren chromosomen. Laten we in deze context even van het 'linkse' chromosoom en het 'rechtse' chromosoom spreken. In een gameet kunnen de 'linkse' chromosomen van de paren met nummers 1, 5, 10 en 20 voorkomen, dan weten we dat voor de andere nummers de 'rechtse' chromosomen in deze gameet voorkomen. Als een eikel door een zaadcel bevrucht wordt, beschikt de nieuwe cel opnieuw over 23 homologe chromosomenparen.

3. Op hoeveel verschillende manieren kan een willekeurig assortiment van 23 chromosomen in een gameet gevormd worden?

4. Je weet nu dat elke gameet één van de 8 miljoen combinaties van chromosomen vertegenwoordigt. Via eikel en zaadcel geeft elke ouder één mogelijke combinatie door aan hun kind. Hoeveel combinaties van chromosomenparen kunnen er bijgevolg door één ouderpaar gevormd worden?

De vorige vraag geeft duidelijk aan hoe uniek elke mens wel is. Via de *genen* wordt deze uniciteit verder bepaald. Een bepaald stuk van het DNA dat genetische informatie bevat voor één kenmerk, noemen we een *gen*. De *genen* liggen op de chromosomen en bepalen onze kenmerken. Je hebt het gen voor de oogkleur, de lichaamsbouw, de vorm van de neus, de vorm van het oor... Een homologe chromosomenpaar bevat dezelfde set van genen. Bijvoorbeeld eerst een gen dat codeert voor de haarkleur, vervolgens één dat codeert voor de stem, ... Echter, het *gen* voor de haarkleur (bijvoorbeeld) kan in verschillende variaties voorkomen, dit noemen we *allelen*. Het *allel* op het ene homologe chromosoom kan bijvoorbeeld voor blond haar zorgen, terwijl het *allel* voor de haarkleur op het andere homologe chromosoom voor zwart haar zorgt. De persoon die deze 2 allelen in zich heeft zal zwart haar hebben. We noemen het kenmerk 'zwart haar' *dominant* en het kenmerk 'blond haar' *recessief*. Het *dominante* kenmerk overheerst het *recessieve* kenmerk 'blond haar' en hoewel de persoon inwendig *allelen* voor beide kenmerken bezit, vertoont hij uitwendig alleen dit *dominante* kenmerk.

5. Ga bij je medeleerlingen de volgende eigenschappen na: de haarkleur (blond, zwart, hoogblond, bruin...), de kleur van de ogen (blauw, grijs, groen, ...), de aanhechting van de oorlellen (los, vast) en de bloedgroep. Ga deze kenmerken ook eens na bij je vader, moeder, broer en/of zus.

Je zult heel wat verschillen merken. Misschien zie je binnen de familie gelijkenissen. Sommige eigenschappen erven we inderdaad van onze ouders, grootouders of voorouders. In wat volgt gaan we na hoe deze overerving gebeurt. We beschouwen vereenvoudigde voorbeelden en werken met kenmerken die erfelijk kunnen zijn.

In 1865 publiceerde Gregor Mendel, een monnik uit een Augustijner klooster in het Pruisische Brno, een artikel in het obscure tijdschrift 'Verhandlungen des naturforschenden Vereines in Brünn'. Het artikel beschreef de resultaten van een reeks experimenten met erwtenplanten. Mendel ontdekte bovendien dat de overerving van eigenschappen via bepaalde wetmatigheden gebeurt. Hij vond dat tijdens de voortplanting de allelen die op een chromosomenpaar voorkomen gescheiden worden. Een kind krijgt dus één allel van elke ouder via zaad- en eicel (de *gameten*).

We beschouwen het kenmerk 'losse of vaste oorlellen'. Dit kenmerk (*gen*) vinden we terug op een chromosomenpaar. We spreken van een allel *L* voor losse oorlellen en een allel *l* voor vaste oorlellen. Het kenmerk voor losse oorlellen is dominant. Daarom wordt het allel met een hoofdletter genoteerd. Het kenmerk voor vaste oorlellen is recessief en wordt met een kleine letter genoteerd. Op de foto hiernaast zie je een 'losse oorlel'.



6. Geef alle mogelijke herhalingsvariaties en herhalingscombinaties van 2 elementen uit $\{L, l\}$.

Het *genotype* van een bepaald kenmerk zijn de allelen die op het chromosomenpaar voorkomen m.b.t. dit kenmerk. In vraag 6 zocht je dus alle mogelijke genotypen voor het kenmerk 'vaste oorlellen'. De volgorde van de allelen speelt voor het genotype geen rol. Het *fenotype* is de uiterlijke verschijningsvorm van het kenmerk (in dit geval losse of vaste oorlellen). Elk kenmerk wordt dus bepaald door twee allelen, die hetzelfde kunnen zijn of verschillend. Bij twee identieke allelen zeggen we dat het individu *homozygoot* is voor het kenmerk, bij verschillende allelen is het individu *heterozygoot*.

7. We veronderstellen een ouderpaar waarbij beide ouders homozygoot zijn voor het kenmerk vaste of losse oorlellen. Moeder heeft vaste oorlellen en vader losse. Wat zijn hun genotypen en fenotypen?

Mendel sprak van de *P-generatie* (*Parentes*) met nakomelingen in de *F1-generatie* (*Filius*), die op hun beurt nakomelingen en bijgevolg een *F2-generatie* vormen.

8. Geef de allelen die in eicel en zaadcel terecht komen. Geef de mogelijke geno- en fenotypes in de F_1 -generatie.

9. Zijn de kinderen uit de F_1 -generatie homozygoot of heterozygoot?

Mendel formuleerde het bovenstaande in zijn eerste wet: *Bij kruising van twee homozygoten die in één eigenschap verschillen (hier de hechting van de oorlellen), ontstaan nakomelingen die allemaal hetzelfde genotype en fenotype hebben.*

10. Wanneer de F_1 -generatie zich op zijn beurt gaat voortplanten, geeft opnieuw elke ouder één allel voor het kenmerk losse/vaste oorlellen door aan het kind. Geef de mogelijke geno- en fenotypes voor de kinderen in de F_2 -generatie.

Om vragen zoals 8 en 10 op te lossen, wordt in de biologie een Punnett-schema gebruikt.

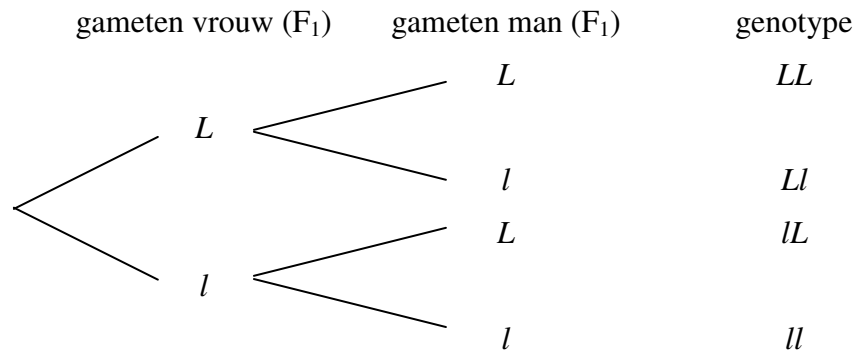
vrouw/man	<i>L</i>	<i>L</i>
<i>l</i>	<i>Ll</i>	<i>Ll</i>
<i>l</i>	<i>Ll</i>	<i>Ll</i>

tabel 1

vrouw/man	<i>L</i>	<i>l</i>
<i>L</i>	<i>LL</i>	<i>Ll</i>
<i>l</i>	<i>Ll</i>	<i>ll</i>

tabel 2

Een schema dat we in wiskunde voor dergelijke problemen gebruiken, is een boomdiagram. Bekijk hieronder het boomdiagram voor het Punnett-schema. Op de knooppunten bevinden zich telkens de allelen die zich in de gameten van de vrouw of de man bevinden.



We merken dat de genotypen van het ouderpaar uit de P-generatie terug voorkomen bij de kleinkinderen in de F_2 -generatie. Mendel formuleerde dit o.a. in zijn tweede wet.

11. Bij de mens komt brachydactylie voor. Het is een dominante erfelijke afwijking waarbij alle vingers en tenen slechts twee kootjes bevatten. We beschouwen een koppel waarbij de vrouw normale vingers (drie kootjes) heeft en de man vingers heeft met slechts twee kootjes. Hij is voor dit kenmerk heterozygoot. (Dit is trouwens normaal omdat het om een dominante afwijking gaat, die toch vrij zeldzaam is.) Stel het Punnett-schema op en maak een boomdiagram. Gebruik B (voor brachydactylie) en b (voor normaal) als symbolen.

12. Albinisme (d.w.z. het niet hebben van pigmentatie waardoor huid en haren volledig wit zijn) is het gevolg van een recessieve erf factor. Stel dat een albino-ouder zich voortplant met een normale ouder. Kan dan het kind normaal zijn? Ondersteun je redenering met het Punnett-schema en/of het boomdiagram. Gebruik P (voor pigmentatie) en p (voor albinisme) als symbolen.
13. Om verschillende variaties van bloemen op de markt te krijgen, worden deze gekruist. Zo leverde een kruising van sleutelbloemen met een rode en witte kleur, enkel roze bloemen op in de F_1 -generatie. We hebben hier dus geen dominant kenmerk en spreken van *co-dominantie*. Kies gepaste symbolen. Geef de genotypen voor de F_1 -generatie, leid hieruit de genotypen en fenotypes van de F_2 -generatie af. Ondersteun je redenering met een boomdiagram.

In de vorige werktekst werd Mendel, grondlegger van de genetica, al vermeld. In de tweede werktekst bekijken we de kruising die aan de basis ligt van zijn derde wet: *Twee kenmerken, gelegen op twee verschillende chromosomen, erven over op onafhankelijke wijze.*

Werktekst 2: Mendeliaanse genetica

Mendel deed proeven op erwtenplanten. Een typische proef bestond erin twee planten met verschillende karakteristieken (b.v. paarse en witte bloemen) te kruisen en na te gaan hoe de eerste generatie nakomelingen eruit ziet. Wanneer slechts één kenmerk gevolgd wordt (in het voorbeeld: bloemkleur), spreekt men van een *monohybride* kruising. Bij *dihybride* kruisingen worden 2 kenmerken gevolgd (bv. gele of groene en gladde of gerimpelde erwten). De kenmerken die Mendel bekeek, hadden een eenvoudige genetische basis: het ging steeds over eigenschappen beïnvloed door één gen, waarvoor slechts twee allelen bestaan, waarvan één steeds volledig dominant is over het andere. Dergelijke kenmerken zijn uiterst zeldzaam. Dat neemt niet weg dat de basisprincipes van de Mendeliaanse genetica nuttig blijven.

Mendel kruiste o.a. een homozygote erwtenplant met gele ronde zaden, met een homozygote plant met groene gerimpelde zaden en volgde zo de evolutie van 2 kenmerken. Hij constateerde dat de F_1 -generatie enkel uit gele ronde erwten bestond.

1. Wat kan je uit de resultaten voor de F_1 -generatie afleiden met betrekking tot dominantie?

Voor de F_2 -generatie telde hij 315 gele en ronde erwten, 101 gele en gerimpelde erwten, 108 groene en ronde erwten, 32 groene en gerimpelde erwten.

2. Gebruik de letters G , g , R en r om op een gepaste wijze de verschillende kenmerken voor te stellen. Geef de genotypen voor de P- en F_1 -generatie (je krijgt een combinatie met vier letters). Stel vervolgens een boomdiagram op voor de F_2 -generatie. Bedenk dat elke 'ouder' voor elk kenmerk telkens één allel doorgeeft.

3. Hoeveel eindtakken heeft het boomdiagram?
4. Hoeveel verschillende genotypen constateer je?
5. Hoeveel verschillende fenotypen constateer je? Klopt dit met de resultaten van Mendel's proef?
6. Bepaal de verhouding van de verschillende fenotypen in de F_2 -generatie. Klopt deze verhouding met Mendel's proef?
7. Stel dat een man heterozygoot is voor de kenmerken rechtshandigheid en pigmentatie. Zijn partner is linkshandig en albino. Zowel rechtshandigheid als pigmentatie zijn dominant. Beide kenmerken liggen op verschillende chromosomen. Maak een boomdiagram en leid hieruit de verschillende genotypen en fenotypen af voor de F_1 -generatie.
8. Bepaal de verhouding van de verschillende fenotypes in de F_2 -generatie.

Kansbomen

Werktekst 3: Genetica en kansbomen

We veronderstellen een grootouderpaar waarbij de grootmoeder vaste oorlellen (*ll*) heeft en de grootvader losse (*LL*).

1. Wat is de kans dat zij een zoon/dochter ter wereld brachten met losse oorlellen?
2. Wat is de kans dat een kleinkind van het grootouderpaar drager is van het allel voor vaste oorlellen?
3. Wat is de kans dat dit grootouderpaar kleinkinderen heeft met vaste oorlellen?
4. Wat is de verhouding van kleinkinderen met losse oorlellen t.o.v. kleinkinderen met vaste oorlellen?

We bekijken het kenmerk voor albinisme en nemen als symbolen P voor normaal pigment (dominant) en p voor albino of geen pigment. Hannes en zijn ouders zijn geen albino's, één grootouder wel, alle andere grootouders zijn geen drager van het albino-allel.

5. Bepaal de genotypen van de familie.

6. Hoe groot is de kans dat Hannes drager is van het albino-allel?

7. Stel dat Hannes trouwt met Mitte, beide zijn ze geen albino maar wel drager van het albino-allel. Hoeveel procent kans hebben ze dat hun kind geen albino is?

Een kruising van sleutelbloemen met een rode en witte kleur levert enkel roze bloemen op in de F_1 -generatie.

8. Bepaal de kans op rode bloemen in de F_2 -generatie.

9. Bepaal de verhouding rode/roze/witte bloemen.

De voorbeelden van de oorlellen en de sleutelbloemen illustreren de tweede wet van Mendel: *Bij een onderlinge kruising van hybriden uit een eerste monohybride kruising van homozygote ouders, splitst de uniforme F_1 -generatie zich weer in de F_2 -generatie volgens de ouder-fenotypen. Dit gebeurt in volgende verhoudingen: 3/1 in geval van dominantie en 1/2/1 wanneer er een intermediaire bestaat.*

In de situatie die Mendel beschouwt zijn de ouders in de F_1 -generatie heterozygoot (Bb). Van de gameten die bij de meiose gevormd worden, bevatten er 50% het allel B en 50% het allel b . Deze gameten worden dan lukraak bij elkaar gebracht. Als een eicel (drager van B of b) bevrucht wordt, is er 50% kans dat dit door een zaadcel met allel B gebeurt en 50% kans dat dit door een zaadcel met allel b gebeurt.

Meestal zijn allelen niet gelijk verdeeld in een populatie. De situatie die Mendel bekijkt, is dus uitzonderlijk. In de volgende werktekst houden we hier rekening mee.

Werktekst 4: Populatiegenetica

In wat volgt bestuderen we een populatie hamsters waarvan 80% van alle gameten drager is van het dominante allel B voor een zwarte pels. Dus is 20% drager van het allel b voor een grijze pels.

1. Stel een kansboom op voor de volgende generatie en bepaal hoeveel procent genotype BB , Bb en bb heeft.
2. Hoeveel procent van de hamsters heeft bijgevolg een zwarte pels?
3. Hoeveel procent van de gameten van deze generatie is drager van het B-allel?
4. Zijn de hamsters met grijze pels met uitsterven bedreigd?

Blijkbaar blijven de percentages van de allelen in de gehele populatie dezelfde tijdens de volgende generatie. Dit is wat de wet van Hardy-Weinberg zegt: *De genenfrequenties en de genotypenfrequenties blijven constant van de ene generatie op de volgende, onder bepaalde voorwaarden.*

In het voorbeeld van de hamsters is het dominante allel ook het meest voorkomende allel in de gehele populatie. Kan dit veralgemeend worden?

Sommige baby's worden geboren met meer dan tien vingers of tenen, we spreken van veelvingerigheid. Het allel dat veelvingerigheid bepaalt, is dominant over het 'normale' allel. In de Verenigde Staten wordt 1 op 400 baby's geboren met deze afwijking.

5. Bepaal de genotypen van de baby's die geboren worden met en zonder de afwijking, gebruik de letter v als symbool.

6. Bepaal hoeveel percent van de baby's geboren wordt met tien vingers en tenen.

7. Bepaal welk allel het meeste voorkomt in de Verenigde Staten.

De 'dominantie' van een allel zegt bijgevolg niets over het allel dat het meest voorkomt in de populatie.

8. Stel dat p en q de kansen zijn van een allelenpaar A en a in een populatie. Welk verband bestaat er bijgevolg tussen p en q ?

9. Bepaal de kansen van de mogelijke genotypen van de volgende generatie.

10. In een populatie komt gespleten gehemelte voor bij één op de 2500 personen. Een gespleten gehemelte is een recessief kenmerk. Bereken de kansen van voorkomen van de mogelijke genotypen in een populatie.

11. Hoeveel van de 2500 personen zijn drager van het allel voor gespleten gehemelte?

Voorwaardelijke kans

Werktekst 5: De genetica van ons bloed

Ieder kent allicht de vier bloedgroepen A, B, O, AB. Het is niet onbelangrijk om je bloedgroep te kennen. Soms kan iemands leven gered worden door een bloedtransfusie. Maar kan iedereen zomaar aan iedereen bloed geven?

De bloedgroepen worden bepaald door *antigenen*. Dit zijn eiwitten op de buitenkant van de rode bloedcellen. Iemand met bloedgroep A heeft antigen A op de rode bloedcel en antistof B in het bloedserum. Iemand met bloedgroep B heeft antigen B op de rode bloedcel en antistof A in het bloedserum. Iemand met bloedgroep O heeft geen antigenen op de rode bloedcellen en antistoffen A en B in het bloedserum en iemand met bloedgroep AB heeft antigenen A en B op de rode bloedcellen en geen antistoffen in het bloedserum.

Bloedgroep	antigen	antistof
A	A	B
B	B	A
O	/	A en B
AB	A en B	/

Wanneer iemand bloed krijgt dat vreemde antigenen bevat, dan wordt het afweersysteem geactiveerd en komt de productie van *antistoffen* op gang die het bloed met de lichaamsvreemde antigenen afbreken. Iemand met bloedgroep O heeft geen antigenen voor A noch voor B. Het lichaam zal dus bloed van bloedgroep A, B, of AB als lichaamsvreemd beschouwen. Het gevolg is dat het bloed gaat klonteren. Wie bloedgroep A heeft, zal bloed met bloedgroep B als lichaamsvreemd ervaren doordat het antistoffen bevat voor B.

1. Vul de onderstaande tabel aan door met X aan te geven dat een bloedtransfusie mag uitgevoerd worden. De bloedgroepen van de donor staan in de eerste kolom.

donor/ontvanger	A	B	O	AB
A				
B				
O				
AB				

Deze 4 bloedgroepen zijn de fenotypen en worden voorgesteld door A, B, O en AB. We kunnen deze letters bijgevolg niet meer gebruiken om de allelen voor te stellen. In de biologie gebruikt men de volgende symbolen: I_A codeert voor de A-bloedgroep, I_B codeert voor de B-bloedgroep en i codeert voor geen van beide. De twee eerst genoemde allelen zijn dominant over het i -allel. Tegenover elkaar zijn ze co-dominant.

- 2

4. Is het mogelijk dat een kind bloedgroep O heeft als beide ouders bloedgroep A hebben?

Een zwangere vrouw kan een kind dragen met een verschillende bloedgroep dan zij zelf heeft. We bekijken een moeder met bloedgroep O en een kind met bloedgroep A. Het kind krijgt dus van de moeder antistoffen tegen A. Als deze antistoffen het bloed van het kind na de bevalling afbreken, veroorzaakt dit geelheid. Meestal is deze geelheid niet ernstig, soms is behandeling onder een blauwe lamp nodig en zeer zelden is een behandeling nodig waarbij het kind nieuw bloed krijgt.

5. De antistoffen van de moeder kunnen tijdens de zwangerschap via de moederkoek naar het kind gaan. Omdat dit niet schadelijk is, wordt de bloedgroep van de vader niet noodzakelijk gecontroleerd. Bepaal de mogelijke bloedgroepen van de vader in het bovenstaande voorbeeld (moeder O en kind A). Bepaal in elke situatie de kans dat het kind bloedgroep A heeft met deze moeder en vader.

De beide grootvaders van Hannes hebben bloedgroep O, de beide grootmoeders hebben bloedgroep AB. In de volgende vragen zoeken we de kans dat Hannes bloedgroep A heeft.

6. Welke bloedgroepen kunnen de ouders van Hannes hebben? Bepaal de kans per mogelijk ouderpaar.

7. Bepaal per ouderpaar uit de vorige vraag de mogelijke genotypen voor de bloedgroepen van hun nakomelingen. Bepaal hieruit de kans dat Hannes bloedgroep A heeft.

8. Als Hannes bloedgroep A heeft, wat is dan de kans dat de vader en moeder van Hannes een verschillende bloedgroep hebben?

Bloedgroepen worden steeds weergegeven door A+, O-, ... De + en de - slaan op de resusfactor. De resusfactor is een ander soort bloedgroep (D), maar in de praktijk wordt D nooit vermeld. Iemand met een positieve resusfactor heeft antigen D op de rode bloedcellen.

Bij bloedtransfusies moet men ook op de resusfactor letten. Als men resusfactorpositief bloed toedient aan iemand die resusfactornegatief is, worden antistoffen gemaakt. Het antigen D wordt immers als lichaamsvreemd ervaren. De eigenschap resusfactorpositief/resusfactornegatief wordt bepaald door slechts 2 allelen (zoals bij de losse of vaste oorlellen), namelijk R (Rh⁺) en r (Rh⁻). Resusfactorpositief is dominant over resusfactornegatief.

Van de Belgische bevolking heeft men vastgesteld dat 42% bloedgroep A heeft, 10% bloedgroep B, 3% bloedgroep AB en 45% bloedgroep O. Verder is ook geweten dat van deze bloedgroepen respectievelijk 86%, 85%, 87% en 84% resusfactorpositief is.

In een voorlichtingsfolder van de dienst Gynaecologie staat: *Van alle zwangeren is 85% resusfactorpositief. Er zijn dan geen gevolgen voor de zwangerschap. Bij 15% is de resusfactor negatief.* In de volgende reeks vragen, gaan we op zoek naar deze percentages.

9. Stel een kansboom op met de bloedgroepen en de resusfactor.

10. Hoeveel van de 10,1 miljoen Belgen heeft bloedgroep B?

11. Hoeveel Belgen hebben bloedgroep B⁻?

12. Wat is de kans dat een willekeurige Belg O⁻ is?

13. Wat is de kans dat een willekeurige Belg resusfactornegatief heeft?

In de volgende reeks vragen gaan we op zoek naar het percentage van de Belgische bevolking dat drager is van het resusnegatief allel.

14. Geef de mogelijke genotypen voor het kenmerk 'resusfactor'.

15. Welke kans vonden we in vraag 13?

16. Bepaal nu de kansen voor de andere genotypen.

Wanneer een zwangere vrouw resusfactornegatief is en haar partner resusfactorpositief, dan kan hun kind resusfactorpositief bloed hebben. Het bloed van het kind kan in het bloed van de moeder terecht komen. Dit gebeurt soms tijdens de zwangerschap, maar vaak tijdens de bevalling. De moeder zal in dit geval antistoffen aanmaken. Bij een volgende zwangerschap bestaat de kans dat de antistoffen van de moeder het bloed van het kind vernietigen. Daarom wordt het bloed van een resusfactornegatieve vrouw die bevallen is van een resusfactorpositief kind gecontroleerd op de aanwezigheid op resusfactorantistoffen. Na de bevalling van een resusfactorpositief kind krijgt de moeder anti-D toegediend. Dit medicijn voorkomt dat er resusfactorantistoffen in het bloed gaan circuleren en een volgende zwangerschap onveilig maken.

In de volgende reeks vragen gaan we op zoek naar de kans op een resusfactornegatieve moeder die zwanger is van een resusfactorpositief kind.

17. Geef de mogelijke genotypen van vader en moeder. Bepaal vervolgens de genotypen van hun eventuele kinderen met de bijbehorende kansen.

18. Bepaal nu de kans op een resusfactornegatieve moeder die zwanger is van een resusfactorpositief kind.

In de vorige werktekst leerden we al dat de dominantie van een allel niets zegt over de aanwezigheid van het allel in een populatie. Bij de bloedgroepen constateren we dat bloedgroep O de meest voorkomende bloedgroep is terwijl het allel voor bloedgroep O een recessief allel is. In wat volgt zoeken we hiervoor een verklaring.

Bij het ABO-bloedgroepensysteem kan men de wet van Hardy-Weinberg als volgt uitbreiden: $p + q + r = 1$ met p de kans voor het allel I_A , q de kans voor het allel I_B en r de kans voor het allel i .

19. Toon aan dat $p^2 + q^2 + r^2 + 2pq + 2pr + 2qr = 1$.

20. Wat betekenen de verschillende termen in de som uit vraag 19?

21. Verklaar waarom we weten dat $r^2 = 0,45$ en $2pq = 0,03$.

22. Waarom kennen we de andere termen van de som uit vraag 19 (nog) niet?

23. Bepaal $p + q$ en $p \cdot q$.

24. Bepaal p en q .

25. Wat kan je besluiten over de verdeling van de allelen bij de Belgische bevolking? Wat is het meest voorkomende allel?