Simpele spiralen en sublieme slakken

Sander Kranenbarg

Wageningen Universiteit, Experimentele Zoölogie

doelstellingen

- fascinatie voor de biologie
  - complexiteit
  - eenvoud
- belang van wiskunde om biologie te begrijpen

doelstellingen

- fascinatie voor de biologie
  - complexiteit
  - eenvoud
- belang van wiskunde om biologie te begrijpen

vragen die we zullen bespreken

- wat is een spiraal?
  - definitie
  - introductie van de spiraal van Archimedes
  - introductie van de logaritmische spiraal
- kan de logaritmische spiraal een schelp beschrijven?
  - van twee-dimensionaal naar drie-dimensionaal
  - reparametrisering
  - beschrijving van de schelpopening
- waarom komt de logaritmische spiraal zoveel voor?
  - groeisnelheid
  - groeikarakteristiek van de schelpopening
- kunnen we ook exotische schelpvormen beschrijven met een logaritmische spiraal?
  - rotatie

vragen die we zullen bespreken

- wat is een spiraal?
  - definitie
  - introductie van de spiraal van Archimedes
  - introductie van de logaritmische spiraal
- kan de logaritmische spiraal een schelp beschrijven?
  - van twee-dimensionaal naar drie-dimensionaal
  - reparametrisering
  - beschrijving van de schelpopening
- waarom komt de logaritmische spiraal zoveel voor?
  - groeisnelheid
  - groeikarakteristiek van de schelpopening
- kunnen we ook exotische schelpvormen beschrijven met een logaritmische spiraal?
  - rotatie

vragen die we zullen bespreken

- wat is een spiraal?
  - definitie
  - introductie van de spiraal van Archimedes
  - introductie van de logaritmische spiraal
- kan de logaritmische spiraal een schelp beschrijven?
  - van twee-dimensionaal naar drie-dimensionaal
  - reparametrisering
  - beschrijving van de schelpopening
- waarom komt de logaritmische spiraal zoveel voor?
  - groeisnelheid
  - groeikarakteristiek van de schelpopening
- kunnen we ook exotische schelpvormen beschrijven met een logaritmische spiraal?
  - rotatie

vragen die we zullen bespreken

- wat is een spiraal?
  - definitie
  - introductie van de spiraal van Archimedes
  - introductie van de logaritmische spiraal
- kan de logaritmische spiraal een schelp beschrijven?
  - van twee-dimensionaal naar drie-dimensionaal
  - reparametrisering
  - beschrijving van de schelpopening
- waarom komt de logaritmische spiraal zoveel voor?
  - groeisnelheid
  - groeikarakteristiek van de schelpopening
- kunnen we ook exotische schelpvormen beschrijven met een logaritmische spiraal?
  - rotatie

wat is een spiraal?

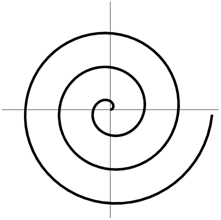
- een spiraal is een curve waarvan - beginnend in de oorsprong - de kromtestraal continu toeneemt als je verder van de oorsprong komt
- helices zijn dus geen spiralen!
- twee belangrijke typen spiralen

wat is een spiraal?

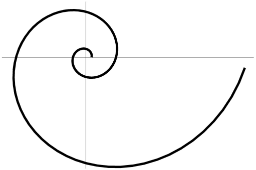
- een spiraal is een curve waarvan - beginnend in de oorsprong - de kromtestraal continu toeneemt als je verder van de oorsprong komt
- helices zijn dus geen spiralen!
- twee belangrijke typen spiralen

wat is een spiraal?

- een spiraal is een curve waarvan - beginnend in de oorsprong - de kromtestraal continu toeneemt als je verder van de oorsprong komt
- helices zijn dus geen spiralen!
- twee belangrijke typen spiralen

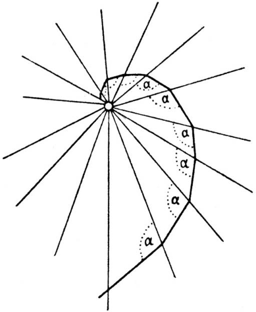


(a) Archimedes



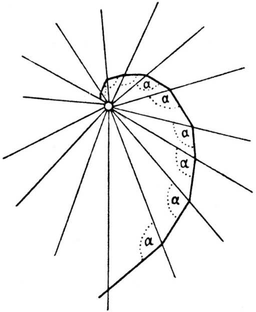
(b) logaritmisch

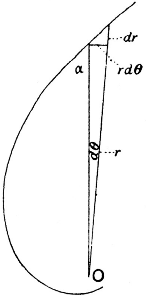
formule voor de logaritmische spiraal



$$\tan\alpha = \frac{r\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}r} \qquad r = \mathrm{e}^{\vartheta\cot\alpha} = \mathrm{e}^{\vartheta/m} \qquad \Rightarrow \qquad \log r \propto \vartheta$$

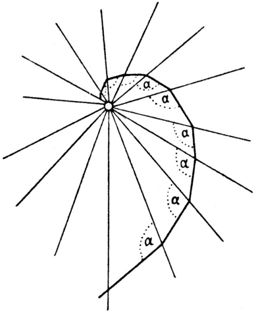
formule voor de logaritmische spiraal

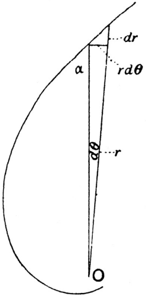




$$\tan\alpha = \frac{r\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}r} \qquad r = \mathrm{e}^{\vartheta\cot\alpha} = \mathrm{e}^{\vartheta/m} \qquad \Rightarrow \qquad \log r \propto \vartheta$$

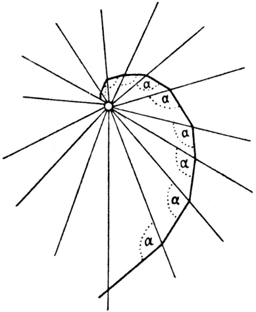
formule voor de logaritmische spiraal

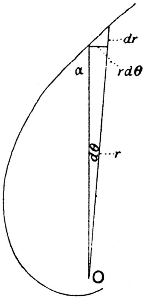




$$\tan\alpha = \frac{r\,\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}r} \qquad r = \mathrm{e}^{\vartheta\cot\alpha} = \mathrm{e}^{\vartheta/m} \qquad \Rightarrow \qquad \log r \propto \vartheta$$

formule voor de logaritmische spiraal

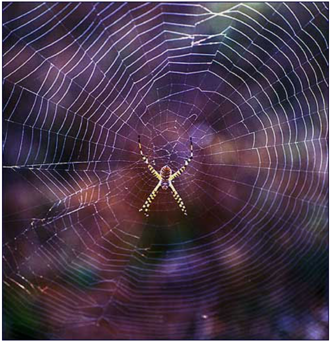


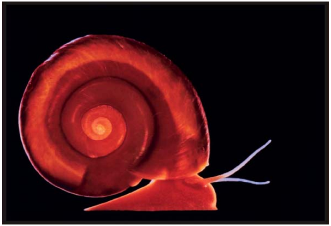


$$\tan\alpha = \frac{r\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}r} \qquad r = \mathrm{e}^{\vartheta\cot\alpha} = \mathrm{e}^{\vartheta/m} \qquad \Rightarrow \qquad \log r \propto \vartheta$$

mogelijke lesideeën

- introduceer de logaritmische spiraal tijdens lessen over e-machten en poolcoördinaten
- meet hoek α en afstand tussen opeenvolgende windingen in (foto's van) natuurlijke objecten





de logaritmische spiraal in drie dimensies

- de derde dimensie

$$z = lr$$

- positie-vector

$$\mathbf{p}_c(\vartheta) = r_c(\vartheta)\cos\vartheta\ \mathbf{i} + r_c(\vartheta)\sin\vartheta\ \mathbf{j} + z_c(\vartheta)\ \mathbf{k}$$

waarbij

$$r_c(\vartheta) = \mathrm{e}^{\vartheta/m}$$

$$z_c(\vartheta) = l\ \mathrm{e}^{\vartheta/m}$$

de logaritmische spiraal in drie dimensies

- de derde dimensie

$$z = lr$$

- positie-vector

$$\mathbf{p}_c(\vartheta) = r_c(\vartheta)\cos\vartheta\ \mathbf{i} + r_c(\vartheta)\sin\vartheta\ \mathbf{j} + z_c(\vartheta)\ \mathbf{k}$$

waarbij

$$r_c(\vartheta) = \mathrm{e}^{\vartheta/m}$$

$$z_c(\vartheta) = l\ \mathrm{e}^{\vartheta/m}$$

de logaritmische spiraal in drie dimensies

- de derde dimensie

$$z = lr$$

- positie-vector

$$\mathbf{p}_c(\vartheta) = r_c(\vartheta)\cos\vartheta\ \mathbf{i} + r_c(\vartheta)\sin\vartheta\ \mathbf{j} + z_c(\vartheta)\ \mathbf{k}$$

waarbij

$$r_c(\vartheta) = \mathrm{e}^{\vartheta/m}$$
$$z_c(\vartheta) = l\ \mathrm{e}^{\vartheta/m}$$

logaritmische spiraal in drie dimensies – een voorbeeld

$\alpha = 83\,^\circ$ and $l = 2$

reparametrisering van de logaritmische spiraal

- lengte van de curve

$$s = \int \left| \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}\vartheta} \right| \mathrm{d}\vartheta = \mathrm{e}^{\vartheta/m} \sqrt{1+m^2+l^2}$$

- ϑ als functie van s

$$\vartheta = m \ln \left(\frac{s}{\sqrt{1+m^2+l^2}} \right)$$

- reparametrisering

$$\mathbf{p}_c(s) = r_c(s) \cos\vartheta \, \mathbf{i} + r_c(s) \sin\vartheta \, \mathbf{j} + z_c(s) \, \mathbf{k}$$

waarbij

$$r_c(s) = \mathrm{e}^{\vartheta/m} = \frac{s}{\sqrt{1+m^2+l^2}}$$

$$z_c(s) = l \, \mathrm{e}^{\vartheta/m} = \frac{s \, l}{\sqrt{1+m^2+l^2}}$$

reparametrisering van de logaritmische spiraal

- lengte van de curve

$$s = \int \left| \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}\vartheta} \right| \, \mathrm{d}\vartheta = \mathrm{e}^{\vartheta/m} \sqrt{1 + m^2 + l^2}$$

- ϑ als functie van s

$$\vartheta = m \ln \left(\frac{s}{\sqrt{1 + m^2 + l^2}} \right)$$

- reparametrisering

$$\mathbf{p}_c(s) = r_c(s) \cos\vartheta \; \mathbf{i} + r_c(s) \sin\vartheta \; \mathbf{j} + z_c(s) \; \mathbf{k}$$

waarbij

$$r_c(s) = \mathrm{e}^{\vartheta/m} = \frac{s}{\sqrt{1 + m^2 + l^2}}$$

$$z_c(s) = l \; \mathrm{e}^{\vartheta/m} = \frac{s \; l}{\sqrt{1 + m^2 + l^2}}$$

reparametrisering van de logaritmische spiraal

- lengte van de curve

$$s = \int \left| \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}\vartheta} \right| \, \mathrm{d}\vartheta = \mathrm{e}^{\vartheta/m} \sqrt{1+m^2+l^2}$$

- ϑ als functie van s

$$\vartheta = m \ln \left(\frac{s}{\sqrt{1+m^2+l^2}} \right)$$

- reparametrisering

$$\mathbf{p}_c(s) = r_c(s) \cos\vartheta \; \mathbf{i} + r_c(s) \sin\vartheta \; \mathbf{j} + z_c(s) \; \mathbf{k}$$

waarbij

$$r_c(s) = \mathrm{e}^{\vartheta/m} = \frac{s}{\sqrt{1+m^2+l^2}}$$

$$z_c(s) = l \; \mathrm{e}^{\vartheta/m} = \frac{s \; l}{\sqrt{1+m^2+l^2}}$$

reparametrisering van de logaritmische spiraal

- lengte van de curve

$$s = \int \left| \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}\vartheta} \right| \, \mathrm{d}\vartheta = \mathrm{e}^{\vartheta/m} \, \sqrt{1 + m^2 + l^2}$$

- ϑ als functie van s

$$\vartheta = m \ln \left(\frac{s}{\sqrt{1 + m^2 + l^2}} \right)$$

- reparametrisering

$$\mathbf{p}_c(s) = r_c(s) \cos \vartheta \; \mathbf{i} + r_c(s) \sin \vartheta \; \mathbf{j} + z_c(s) \; \mathbf{k}$$

waarbij

$$r_c(s) = \mathrm{e}^{\vartheta/m} \quad = \frac{s}{\sqrt{1 + m^2 + l^2}}$$

$$z_c(s) = l \; \mathrm{e}^{\vartheta/m} = \frac{s \; l}{\sqrt{1 + m^2 + l^2}}$$

opening van de schelp

- positievector van de opening

$$\mathbf{p}_g(s,\varphi) = \mathbf{p}_c(s) + r_g(s)\cos\varphi\ \mathbf{N} + r_g(s)\sin\varphi\ \mathbf{B}$$

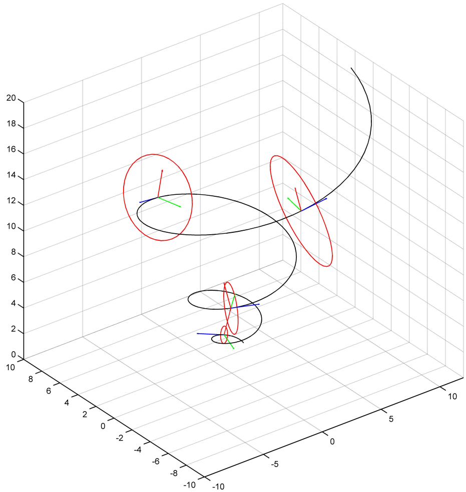
  waarbij

$$r_g(s) = k\ r_c(s)$$

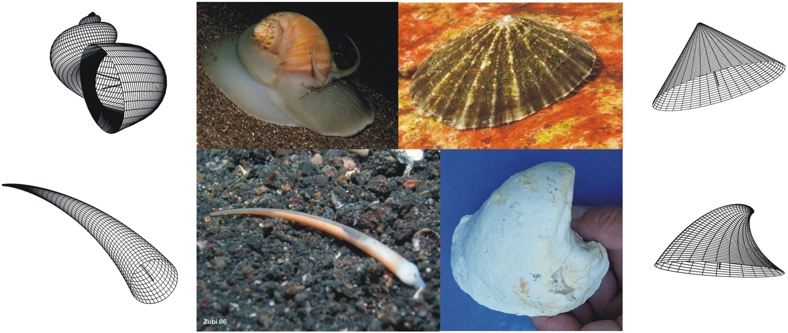
- de raaklijn ($\mathbf{T}$), hoofdnormaal ($\mathbf{N}$) en binormaal ($\mathbf{B}$) eenheidsvectoren zijn

$$\mathbf{T} = \mathrm{d}\mathbf{p}_c/\mathrm{d}s \qquad \mathbf{N} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}/\mathrm{d}s}{|\mathrm{d}\mathbf{T}/\mathrm{d}s|} \qquad \mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N}$$

de logaritmische spiraal en de schelpopening



voorbeelden van echte en gesimuleerde schelpen



groei van de schelp 1

- groeisnelheid (*Engels*: growth velocity)

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_g}{\mathrm{d}s} = (1 - \kappa(s) r_g(s) \cos\varphi)\ \mathbf{e}_n + \frac{\mathrm{d}r_g}{\mathrm{d}s}\ \mathbf{e}_r + \tau(s) r_g(s)\ \mathbf{e}_t$$

- curvatuur en torsie
- voor de logaritmische spiraal geldt

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_g}{\mathrm{d}s} = (1 - a\cos\varphi)\ \mathbf{e}_n + b\ \mathbf{e}_r + c\ \mathbf{e}_t$$

- groeisnelheid is constant en onafhankelijk van s

groei van de schelp 1

- groeisnelheid (*Engels*: growth velocity)

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_g}{\mathrm{d}s} = (1 - \kappa(s) r_g(s) \cos\varphi)\ \mathbf{e}_n + \frac{\mathrm{d}r_g}{\mathrm{d}s}\ \mathbf{e}_r + \tau(s) r_g(s)\ \mathbf{e}_t$$

- curvatuur en torsie
- voor de logaritmische spiraal geldt

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_g}{\mathrm{d}s} = (1 - a\cos\varphi)\ \mathbf{e}_n + b\ \mathbf{e}_r + c\ \mathbf{e}_t$$

- groeisnelheid is constant en onafhankelijk van s

groei van de schelp 1

- groeisnelheid (*Engels*: growth velocity)

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_g}{\mathrm{d}s} = (1 - \kappa(s) r_g(s) \cos\varphi)\ \mathbf{e}_n + \frac{\mathrm{d}r_g}{\mathrm{d}s}\ \mathbf{e}_r + \tau(s) r_g(s)\ \mathbf{e}_t$$

- curvatuur en torsie
- voor de logaritmische spiraal geldt

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_g}{\mathrm{d}s} = (1 - a\cos\varphi)\ \mathbf{e}_n + b\ \mathbf{e}_r + c\ \mathbf{e}_t$$

- groeisnelheid is constant en onafhankelijk van s

groei van de schelp 1

- groeisnelheid (*Engels*: growth velocity)

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_g}{\mathrm{d}s} = (1 - \kappa(s) r_g(s) \cos\varphi)\ \mathbf{e}_n + \frac{\mathrm{d}r_g}{\mathrm{d}s}\ \mathbf{e}_r + \tau(s) r_g(s)\ \mathbf{e}_t$$

- curvatuur en torsie
- voor de logaritmische spiraal geldt

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_g}{\mathrm{d}s} = (1 - a\cos\varphi)\ \mathbf{e}_n + b\ \mathbf{e}_r + c\ \mathbf{e}_t$$

- groeisnelheid is constant en onafhankelijk van s

groei van de schelp 1

- groeisnelheid (*Engels*: growth velocity)

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_g}{\mathrm{d}s} = (1 - \kappa(s) r_g(s) \cos\varphi)\ \mathbf{e}_n + \frac{\mathrm{d}r_g}{\mathrm{d}s}\ \mathbf{e}_r + \tau(s) r_g(s)\ \mathbf{e}_t$$

- curvatuur en torsie
- voor de logaritmische spiraal geldt

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_g}{\mathrm{d}s} = (1 - a\cos\varphi)\ \mathbf{e}_n + b\ \mathbf{e}_r + c\ \mathbf{e}_t$$

- groeisnelheid is constant en onafhankelijk van s

groei van de schelp 2

- absolute groeisnelheid (*Engels*: growth speed)

$$\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_g}{\mathrm{d}s}\right| = \sqrt{(1 - a\cos\varphi)^2 + b^2 + c^2}$$

- groeikarakteristiek van de opening (*Engels*: aperture map)

groei van de schelp 2

- absolute groeisnelheid (*Engels*: growth speed)

$$\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_g}{\mathrm{d}s}\right| = \sqrt{(1 - a\cos\varphi)^2 + b^2 + c^2}$$

- groeikarakteristiek van de opening (*Engels*: aperture map)

groei van de schelp 2

- absolute groeisnelheid (*Engels*: growth speed)

$$\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_g}{\mathrm{d}s}\right| = \sqrt{(1 - a\cos\varphi)^2 + b^2 + c^2}$$

- groeikarakteristiek van de opening (*Engels*: aperture map)

reconstructie van de groei

$$\mathbf{p}_g(s+h,\varphi) = \mathbf{p}_g(s,\varphi) + \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_g}{\mathrm{d}s}h + O(h^2)$$

reconstructie van de groei

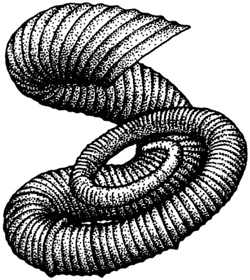
$$\mathbf{p}_g(s+h,\varphi) = \mathbf{p}_g(s,\varphi) + \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_g}{\mathrm{d}s} h + O(h^2)$$

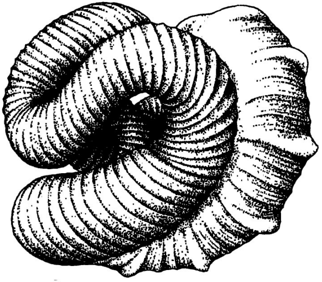
reconstructie van de groei

$$\mathbf{p}_g(s+h,\varphi) = \mathbf{p}_g(s,\varphi) + \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_g}{\mathrm{d}s}h + O(h^2)$$

sublieme slakken

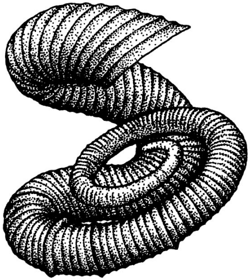
- groeikarakteristiek blijft constant
- maar het dier draait in zijn schelp

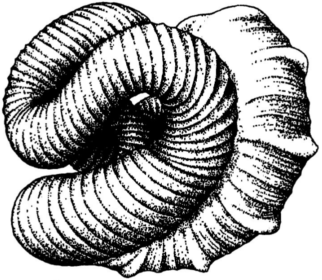




sublieme slakken

- groeikarakteristiek blijft constant
- maar het dier draait in zijn schelp





simulatie van een roterende slak

antwoorden op de vragen

- wat is een spiraal?
  - een spiraal is een curve waarvan - beginnend in de oorsprong - de kromtestraal continu toeneemt als je verder van de oorsprong komt
- kan de logaritmische spiraal een schelp beschrijven?
  - ja, met drie parameters (k, l, m) kun je een zeer grote diversiteit creëeren
- waarom komt de logaritmische spiraal zoveel voor?
  - de groeisnelheid in de schelpopening is constant tijdens het groeiproces
  - '...and this simplest of laws is that which Nature tends to follow.'
- kunnen we ook exotische schelpvormen beschrijven met een logaritmische spiraal?
  - ja, door het dier te laten roteren terwijl de groeisnelheid constant blijft

antwoorden op de vragen

- wat is een spiraal?
  - een spiraal is een curve waarvan - beginnend in de oorsprong - de kromtestraal continu toeneemt als je verder van de oorsprong komt
- kan de logaritmische spiraal een schelp beschrijven?
  - ja, met drie parameters (k, l, m) kun je een zeer grote diversiteit creëeren
- waarom komt de logaritmische spiraal zoveel voor?
  - de groeisnelheid in de schelpopening is constant tijdens het groeiproces
  - '. . . and this simplest of laws is that which Nature tends to follow.'
- kunnen we ook exotische schelpvormen beschrijven met een logaritmische spiraal?
  - ja, door het dier te laten roteren terwijl de groeisnelheid constant blijft

antwoorden op de vragen

- wat is een spiraal?
  - een spiraal is een curve waarvan - beginnend in de oorsprong - de kromtestraal continu toeneemt als je verder van de oorsprong komt
- kan de logaritmische spiraal een schelp beschrijven?
  - ja, met drie parameters (k, l, m) kun je een zeer grote diversiteit creëeren
- waarom komt de logaritmische spiraal zoveel voor?
  - de groeisnelheid in de schelpopening is constant tijdens het groeiproces
  - '...and this simplest of laws is that which Nature tends to follow.'
- kunnen we ook exotische schelpvormen beschrijven met een logaritmische spiraal?
  - ja, door het dier te laten roteren terwijl de groeisnelheid constant blijft

antwoorden op de vragen

- wat is een spiraal?
  - een spiraal is een curve waarvan - beginnend in de oorsprong - de kromtestraal continu toeneemt als je verder van de oorsprong komt
- kan de logaritmische spiraal een schelp beschrijven?
  - ja, met drie parameters (k, l, m) kun je een zeer grote diversiteit creëeren
- waarom komt de logaritmische spiraal zoveel voor?
  - de groeisnelheid in de schelpopening is constant tijdens het groeiproces
  - '...and this simplest of laws is that which Nature tends to follow.'
- kunnen we ook exotische schelpvormen beschrijven met een logaritmische spiraal?
  - ja, door het dier te laten roteren terwijl de groeisnelheid constant blijft

hoe roteer je een positie-vector?

1. transleer positie-vector $\mathbf{p}_g(s,\varphi)$

$$\mathbf{p}_g^T(s,\varphi) = \mathbf{p}_g(s,\varphi) - \mathbf{p}_c(s_r)$$

2. roteer de getransleerde positie-vector $\mathbf{p}_g^T(s,\varphi)$

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_g^{T\prime}(s,\varphi) = {} & (1-\cos\psi)\left(\mathbf{T}(s_r)\cdot\mathbf{p}_g^T(s,\varphi)\right)\mathbf{T}(s_r) \\ & + \cos\psi\ \mathbf{p}_g^T(s,\varphi) + \sin\psi\ \left(\mathbf{T}(s_r)\times\mathbf{p}_g^T(s,\varphi)\right)\end{aligned}$$

3. transleer de geroteerde positie-vector $\mathbf{p}_g^{T\prime}(s,\varphi)$ terug

$$\mathbf{p}_g^{\prime}(s,\varphi) = \mathbf{p}_g^{T\prime}(s,\varphi) + \mathbf{p}_c(s_r)$$

hoe roteer je een positie-vector?

1. transleer positie-vector $\mathbf{p}_g(s,\varphi)$

$$\mathbf{p}_g^T(s,\varphi) = \mathbf{p}_g(s,\varphi) - \mathbf{p}_c(s_r)$$

2. roteer de getransleerde positie-vector $\mathbf{p}_g^T(s,\varphi)$

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_g^{T\prime}(s,\varphi) = {} & (1-\cos\psi)\left(\mathbf{T}(s_r)\cdot\mathbf{p}_g^T(s,\varphi)\right)\mathbf{T}(s_r) \\ & + \cos\psi\ \mathbf{p}_g^T(s,\varphi) + \sin\psi\ \left(\mathbf{T}(s_r)\times\mathbf{p}_g^T(s,\varphi)\right)\end{aligned}$$

3. transleer de geroteerde positie-vector $\mathbf{p}_g^{T\prime}(s,\varphi)$ terug

$$\mathbf{p}_g'(s,\varphi) = \mathbf{p}_g^{T\prime}(s,\varphi) + \mathbf{p}_c(s_r)$$

hoe roteer je een positie-vector?

1. transleer positie-vector $\mathbf{p}_g(s,\varphi)$

$$\mathbf{p}_g^T(s,\varphi) = \mathbf{p}_g(s,\varphi) - \mathbf{p}_c(s_r)$$

2. roteer de getransleerde positie-vector $\mathbf{p}_g^T(s,\varphi)$

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_g^{T'}(s,\varphi) = {}& (1-\cos\psi)\left(\mathbf{T}(s_r)\cdot\mathbf{p}_g^T(s,\varphi)\right)\mathbf{T}(s_r) \\ & + \cos\psi\ \mathbf{p}_g^T(s,\varphi) + \sin\psi\ \left(\mathbf{T}(s_r)\times\mathbf{p}_g^T(s,\varphi)\right)\end{aligned}$$

3. transleer de geroteerde positie-vector $\mathbf{p}_g^{T'}(s,\varphi)$ terug

$$\mathbf{p}_g'(s,\varphi) = \mathbf{p}_g^{T'}(s,\varphi) + \mathbf{p}_c(s_r)$$