Problemen oplossen én uitleggen

Docentenhandleiding

4 februari 2009

BEST-Utrecht

Universiteit Utrecht

HOGESCHOOL UTRECHT

www.best-utrecht.nl

Problemen oplossen én uitleggen

Docentenhandleiding

Inleiding voor docenten

Het doel van deze wiskunde D module is om leerlingen zich bewust te laten worden van de denkstappen die genomen worden bij het aanpakken van problemen. De bedoeling is enerzijds dat leerlingen handiger worden in het aanpakken van problemen en zicht krijgen op het proces dat ze daarbij doorlopen, anderzijds dat ze structureel hulp aan een medeleerling kunnen bieden zonder direct het antwoord weg te geven.

Om dit te bereiken gaan de leerlingen allereerst zelf aan de slag met een aantal opgaven. Deze opgaven vereisen geen hoge wiskundige voorkennis maar zijn wel geselecteerd op een bepaalde complexiteit wat betreft probleemaanpak. Van belang is het proces bij het oplossen van het probleem en het daarop reflecteren. Dit levert vaardigheden op die leerlingen kunnen gebruiken bij andere probleemsituaties. De vier fasen van Polya worden gebruikt voor de theoretische achtergrond.

Daarnaast gaan leerlingen zelf op zoek naar wiskundige raadsels/problemen om aan elkaar voor te leggen. De leerling kruipt hier in de huid van 'leraar', waarbij ook gebruik zal worden gemaakt van de zogenaamde hulpladder. Om van elkaar te leren, gaan ze aan de slag in een rollenspel en geven leerlingen elkaar gericht feedback op wat ze observeren. Het project wordt afgerond met presentaties over een eigen gekozen probleem. Leerlingen doen dit in tweetallen. Deze afsluiting vindt plaats op de Hogeschool Utrecht.

Planning

Het project loopt over een periode van 6 weken, waarbij we uitgaan van 3 lessen per week. In de eerste week kan een docent van de Hogeschool Utrecht de aftrap geven in de eerste les op de school zelf.

Week	Onderwerp	Huiswerk
1	Raadsels en problemen oplossen	Probleem 1 t/m 4 en dossieropdracht A
2	Theorie over probleemaanpak	Probleem 5 t/m 8;
3	De hulpladder	Probleem 9 t/m 13 en dossieropdracht B
4	Feedback geven en krijgen	Zelf een geschikt probleem uitzoeken voor de presentatie
5	Lesvoorbereiding	Probleem 14 t/m 21 en dossieropdracht C
6	Afsluitende middag op HU	

Aanbevolen literatuur

Goed achtergrondmateriaal is de reader *Probleemoplossen 1* van het APS, zie; http://www.aps.nl/APSsite/Publicaties/Probleem+oplossen+I.htm?par:Trefwoord=probleemoplossen. Dit kost 4,54 euro.

Verder is het boek *How to solve it* van Polya heel geschikt (in het Nederlands: *Heuristiek en wiskunde*), zie bijv. http://www.bol.com/nl/p/boeken-engels/how-to-solve-it/1001004001058277/index.htm

Informatie

Voor meer informatie kunt u contact opnemen met

Quintijn Puite, Instituut Archimedes, Faculteit Educatie, Hogeschool Utrecht
Padualaan 97, Utrecht
quintijn.puite@hu.nl of 06-10015490

De module is voor een groot deel gebaseerd op Cursusmateriaal *Onderzoek jaar 1*, HU en is verder ontwikkeld vanuit het bètasteunpunt Utrecht (BEST-Utrecht) in samenwerking met

Frank van den Heuvel
Meridiaan College 't Hooghe Landt
Amersfoort

Agaath Mauritz-de Jong
Het Nieuwe Lyceum
Bilthoven

Mogelijk beoordelingsmodel

Dossieropdracht A			
a	3 leuke raadsels	3	
	rangschikking	1	
	uitleg/antwoorden	2	
b	voorgelegd aan derde	2	
	beschrijving	2	
		10	
Dossieropdracht B			
a	opdracht 10	1	
	opdracht 11	1	
	opdracht 12	1	
b	uitwerking volgens Polya	3	
c	opdracht 13(a)	1	
	opdracht 13(b)	1	
	eigen raadsel (opdracht 13(c))	2	
		10	
Dossieropdracht C			
a	uitwerking eigen probleem	4	
b	leerdoelen	2	
c	schema	4	
		10	
Presentatie			
	uitleggen van het probleem	2	
	hulpladder tijdens zelfwerkzaamheid	3	
	uitleggen van de oplossing	2	
	het geven van feedback	1	
	houding/presentatie/bordgebruik	2	
		10	

Problemen oplossen én uitleggen

Leerlingmateriaal

Inleiding

Wiskunde is overal om ons heen. Als je een alledaags probleem tegenkomt waarbij je logisch moet nadenken, ben je vaak met niets anders dan wiskunde bezig. En ook de meeste raadsels zitten vol met verborgen wiskunde.

In deze wiskunde D module werk je in het begin met je klasgenoten samen aan zulk soort wiskundige problemen. Daarbij letten we er niet alleen op hoe je te werk zou kunnen gaan met het probleemoplossen, maar kijken we ook hoe je anderen met het oplossen van problemen kan helpen.

Uiteindelijk gaat iedereen zelf op zoek naar zijn of haar favoriete raadsel. De slotbijeenkomst wordt georganiseerd op Hogeschool Utrecht samen met een andere wiskunde D havo4 klas. Je zult dan zelf je wiskundig raadsel opgeven aan de rest van de groep. Daarbij help jij de andere deelnemers alsof jij de leraar bent (zonder de oplossing te verklappen natuurlijk!), en tenslotte bespreek jij jouw opgave na met de groep. Na afloop krijg je feedback over hoe je het deed als “leraar”.

Beoordeling: op grond van wekelijks inleverwerk en de presentatie.

Studiebelasting: 40 SLU

Literatuur/bronnen

- Tijdschrift Pythagoras (www.pythagoras.nu/mmmcms/public)
- Kangoeroewedstrijd (www.math.kun.nl/kangoeroe)
- Wiskunde Olympiade (www.wiskundeolympiade.nl)
- Vierkant voor Wiskunde (www.vierkantvoorwiskunde.nl)

Week 1: Raadsels en problemen oplossen

Het gaat niet alleen om het oplossen, maar ook om het nadenken over het oplossen.

- Les 1: Inleiding. Opdracht 1. Verschillende manieren van aanpak.
- Les 2: Het schaakbordprobleem: opdracht 2. Een open probleem, want je weet nog niet of het wel gaat lukken; zoeken naar een oplossing en tegelijk zoeken naar een bewijs dat het niet kan. Hilberts tiende probleem.
- Les 3: Huisjes: opdracht 3. Voor elkaar een huisjesopdracht maken. Óf je ziet een oplossing, óf je moet *bewijzen* dat er geen oplossing is.
- Om over na te denken voor les 4: opdracht 4.

Dossieropdracht A

(bij aanvang van les 4 inleveren op papier; telt mee in beoordeling)
a) Verzamel in en buiten de les (bijv. op internet of in het tijdschrift Pythagoras) een drietal leuke wiskundige raadseltjes. Maak er een handig overzicht van. Rangschik ze van makkelijk naar moeilijk. Schrijf er ook een uitleg en antwoord/oplossing bij.
b) Probeer één van de raadseltjes uit op één van je ouders, je zus, broer, een vriend of vriendin. Beschrijf hoe het ging: lukte het hem/haar om het raadseltje op te lossen, op welke momenten vond hij/zij het leuk of minder leuk, gaf jij hulp en zo ja, hoe?

Week 2: Theorie over probleemaanpak (Polya)

- Les 4: Bespreken opdracht 4. Het wijnflessenprobleem, opdracht 5. Blikwisseling: Ga je lastig met breuken rekenen of kun je er ook op een andere manier naar kijken?

- Huiswerk voor les 5: het hekkenprobleem, opdracht 6(a).

- Les 5: Het hekkenprobleem, opdracht 6. Theorie over probleemaanpak (4 fases van Polya).

- Les 6 (beamer): Het getallenmysterie, opdrachten 7 en 8. Algoritmen (vindregels) en heuristieken (zoekregels). Bespreken van strategieën.

Huiswerk voor les 7

(in tweetallen; je docent zorgt voor een aantal wiskundeboeken (of kopietjes) uit voorgaande jaren)
Kijk nog eens terug in een wiskundeboek uit de tweede of derde. (Als je dat niet meer hebt, staat er vast wel een exemplaar bij jou op school in de mediatheek.) Probeer twee opgaven te vinden waar leerlingen echt een probleem moeten oplossen. Dus opgaven waarbij ze niet met een regeltje direct het antwoord kunnen vinden. Kopieer ze en neem ze mee voor de volgende les. Bedenk hoe je leerlingen die nu in die klas zitten zou kunnen helpen met die opgaven. We bespreken dit de volgende les.

De vier fases volgens Polya

1. Het probleem begrijpen: Wat is het probleem? Wat is er gegeven? Wat wordt er precies gevraagd? Wat is een handige notatie?

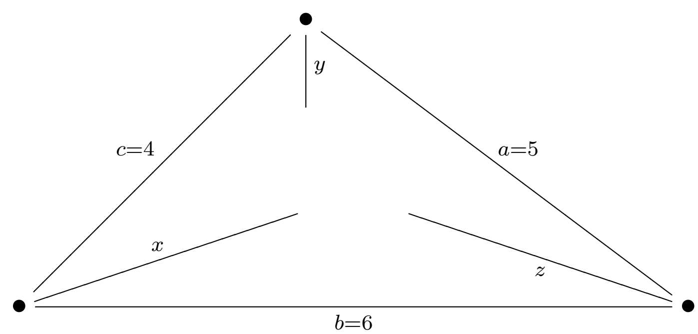
2. Een plan maken: Wat kun je doen? Ken je een soortgelijk probleem?

3. Een plan uitvoeren: Doe het!

4. Terugblikken: Wat deed ik precies? Kon je niet van bepaalde vermoedens loskomen (fixering)? Kon je de zaak vanuit een andere invalshoek bekijken (blikwisseling)? Controleer of je berekeningen kloppen. Kijk of je kunt generaliseren. Wat heb je geleerd?

Voorbeeld 2 kolommen

Opgave
Een kudde schapen wordt regelmatig verplaatst tussen stal, heide en bron. De weg naar de heide is 6 meter breed, de weg naar de bron 5 meter en de weg naar de stal 4 meter. Op een driesprong ontmoeten deze wegen elkaar. Elke weg kan met twee scharnierende hekken worden afgesloten.
Hoe groot moet elk van de drie hekken zijn, zodat elk tweetal hekken één weg kan afsluiten? Los het probleem ook op voor een willekeurige driesprong (als de wegen a meter, b meter en c meter breed zijn).



WAT IS HET PROBLEEM?	De breedtes van de wegen zijn gegeven, in eerste instantie 4, 5 en 6 meter. Daarbij moeten wij bedenken hoe groot de hekken moeten zijn. Het is waarschijnlijk de bedoeling dat de twee hekken aan weerskanten van een weg in totaal precies even breed zijn als de weg. Maar misschien mogen ze ook wel overlappen; dat is niet duidelijk uit de probleemstelling. Als er maar geen gaatje overblijft zodat een schaap kan ontsnappen.
Wat is er gegeven? (notatie)	De breedtes van de verschillende wegen. Laten we deze in het algemeen a, b en c noemen.
Wat wil je weten? (notatie)	Hoe groot de hekken moeten zijn. Laten we hier de volgende notatie voor gebruiken: x voor het hek tegenover weg a; y voor het hek tegenover weg b; en z voor het hek tegenover weg c (zie ook de figuur).
Even wat proberen	We maken eerst maar eens een tekening van de situatie in het geval de breedtes 4, 5 en 6 meter zijn. Als we $x = 1$ kiezen, dan moet wel $y = 3$ (want dat samen 4 dus dan kan weg c worden afgesloten) en dus $z = 2$ (samen 5, goed voor afsluiten van weg a). Maar nu sluiten hek x en z samen niet weg b af; er zit nog een gat van 3 meter.
Nog wat proberen	Als we hek x een decimeter groter maken, dan wordt y een decimeter kleiner en dan wordt z juist weer een decimeter groter. Dus dan wordt het gat van 3 meter maar liefst 2 decimeter kleiner.
Ontdekkinkje	Als we datzelfde geintje uithalen met een andere afstand dan een decimeter werkt het ook.
Oplossing van het voorbeeld	We gaan onze eerste poging aanpassen door bij x de helft van dat gat van 3 meter erbij op te tellen en kijken of het dan wel werkt. We nemen dus $x = 2\frac{1}{2}$, dan moet wel $y = 1\frac{1}{2}$ (samen 4), dan moet wel $z = 3\frac{1}{2}$ (samen 5). En inderdaad: nu is $2\frac{1}{2}$ en $3\frac{1}{2}$ precies groot genoeg om samen de weg van breedte 6 af te sluiten

WAT KUN JE GAAN DOEN?	Vanuit x berekenen we y en daarna ook z. En dan kijken we of $x + z$ wel precies de derde weg afsluit. Als het niet meteen lukt, kunnen we het ook eerst met een voorbeeld doen.
DOE HET! Eerst maar een voorbeeldje	Om weg $c = 4$ af te sluiten moet gelden dat $y = 4 - x$. Om vervolgens weg $a = 5$ af te sluiten moet dan gelden dat $z = 5 - y = 5 - (4 - x) = 5 - 4 + x = 1 + x$. Maar sluiten x en z nu wel weg $b = 6$ af? Dan moet $1 + x \stackrel{!}{=} 6 - x$. Dus moet $2x = 5$, dus $x = 2\frac{1}{2}$. En de rest kunnen we dan wel uitrekenen; we vinden het antwoord dat we al door proberen hadden gevonden.
Nu voor algemene a, b en c	We doen maar gewoon dezelfde stappen als in het voorbeeld. Om weg c af te sluiten moet gelden dat $y = c - x$. Om vervolgens weg a af te sluiten moet dan gelden dat $z = a - y = a - (c - x) = a - c + x$. Maar sluiten x en z nu wel weg b af? Dan moet $a - c + x \stackrel{!}{=} b - x$. Dus moet $2x = b - a + c = -a + b + c$, dus $x = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$.
En y en z?	Hierboven staat al dat $y = c - x$, dus $y = c - (-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c) = c + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$. En voor z weten we al dat $z = a - y$, dus $z = a - (\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c) = a - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$.
TERUGBLIKKEN Klopt het wel?	Laten we maar eens kijken wat we krijgen als we $a = 5$, $b = 6$, $c = 4$ invullen. Dan geldt dat $-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c = -\frac{1}{2}\cdot 5+\frac{1}{2}\cdot 6+\frac{1}{2}\cdot 4 = -2\frac{1}{2}+3+2 = 2\frac{1}{2}$. Dat klopt met wat we eerder hadden gevonden!
Kunnen we dat nog anders schrijven?	Ja, een net iets gemakkelijker vorm is $x = \frac{-a+b+c}{2}$, $y = \frac{a-b+c}{2}$, $z = \frac{a+b-c}{2}$.
Wat zegt de formule voor x eigenlijk in termen van de 'input'?	Je moet de breedtes van de wegen aan weerszijden van het hek bij elkaar op tellen en daar de breedte van het tegenoverliggende hek van aftrekken, en dan nog eens delen door 2.
Is het toeval dat die formules zo op elkaar lijken?	Nee; uitgaande van de formule voor x hebben we net gezien hoe je het hek berekent aan de hand van de 'aanliggende' wegen en de 'overliggende' weg. Die formules voor y en z zijn dus gewoon precies hetzelfde!
Kunnen we het nu voor elke driesprong?	Ja, dat wel, vul die a, b en c maar in. Maar als bijvoorbeeld $a = 3$, $b = 5$ en $c = 9$ is het geen echte driesprong; dat kan natuurlijk niet want $3 + 5 = 8 < 9$.
En zie je dat nog terug dan?	Ja, als we nu het z berekenen komt daar uit: $z = \frac{a+b-c}{2} = \frac{3+5-9}{2} = -\frac{1}{2}$, maar dat zou wel een beetje raar zijn, een hek van $-\frac{1}{2}$ meter breed.
Zijn we nu helemaal tevreden?	Ja, we hebben het probleem helemaal opgelost; uitgaande van willekeurige breedtes kunnen we nu de groottes van de hekken berekenen.
Of kunnen we nog generaliseren?	Ja, dat kan op zich wel. We zouden nog kunnen kijken hoe het met een viersprong zit. Of zelfs een vijfsprong!

Week 3: De hulpladder

Hoe je elkaar kunt helpen bij het oplossen van moeilijke problemen.

- Les 7: Presentaties per koppel over manieren van hulp bieden n.a.v. het huiswerk.
- Les 8: Probleem: waar is dat hokje gebleven, opdracht 9. Verder: Hoe geeft je docent je hulp? De theorie van de hulpladder.
- Les 9: Drie keer een casus om te oefenen in het beantwoorden van vragen van leerlingen. In drietallen in carrousel: A is leerling en denkt dat $10 - (x + 2)$ hetzelfde is als $12 - x$. B is in de rol van leraar en probeert A tot ander inzicht te laten komen. C observeert o.a. hoe B helpt. Daarna draaien alle rollen eentje door, en wordt een leerling geholpen die denkt dat $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ gelijk is aan $\frac{1}{5}$. In de derde ronde gaat de 'leraar' in op het misverstand van de 'leerling' dat haakjes uitwerken in $(a + b)^2$ leidt tot $a^2 + b^2$.

Dossieropdracht B

(bij aanvang van les 10 inleveren op papier; telt mee in beoordeling)
a) Maak de opdrachten 10, 11, 12 en werk ze uit.
b) Kies één van deze drie opdrachten (10, 11 of 12) uit om volledig uit te werken volgens de theorie van Polya. Maak dus twee kolommen en beschrijf stapsgewijs in de linkerkolom wat je rechts aan het doen bent. De fases van Polya vind je bij week 2.
c) Maak opdracht 13. Met het door jou verzonnen raadsel bij opdracht 13(c) gaan we in les 10 en 11 aan de slag!

De hulpladder

Nr.	Doel	Leraarshandeling	Vragen
1	Verwachting wekken	Niets doen, vragend aankijken	“Ja?” “En. . . ?”
2	Leerling wordt bewust van zijn leertaak	Vragen naar wat leerling moet doen	“Wat wil je weten?” “Wat moet je doen?”
3	Leerling wordt bewust gemaakt van zijn leertaak	Leertaak formuleren	“We moeten . . . ” “In de opgave staat dat je . . . ”
4	Ophalen van voorkennis	Vragen naar voorkennis	“Wat weet je al?” “Waar doet dit probleem je aan denken?”
5	Ophalen van voorkennis	Voorkennis formuleren	“Je weet al dat . . . ” “We hebben eerder gehad dat . . . ”
6	Spiegelen; introspectie	Helpen bij bewustwording	“Je zei net dat . . . ” “Je wilde . . . ”
7	Doorvragen	Helpen bij begripsvorming, positief kritische houding aannemen	“Ja?” “Waarom?” “Hoe weet je dat?” “Ben je daar zeker van?” “Is dat zo?”
8	Terugblikken; retrospectie	Helpen bij het zicht krijgen op wat de leerling heeft gedaan	“Wat hebben we nu gedaan?” “Wat heb je nu bereikt”
9	Hint geven	Gerichte aanwijzing geven	“Hebben we er wat aan als . . . ” “Zou je een hulplijn kunnen tekenen?” “Als je deze punten nu eens verbindt.”
10	Uitleggen maar niet helpen	Voordoen	

Week 4: Feedback geven en krijgen

Over feedback geven, feedback krijgen en de feedbackregels.

- Les 10: Theorie van feedback geven en krijgen; de feedbackregels.
- Les 11: Carrousel in drietallen: A legt zijn raadsel voor aan B, B probeert hem op te lossen. C observeert het gesprek tussen A en B en geeft na afloop feedback.

Huiswerk voor les 12

(in tweetallen)
Zoek een geschikt probleem om een activerende presentatie over te houden. Bronnen voor een geschikt probleem:

- Tijdschrift Pythagoras (www.pythagoras.nu/mmmcms/public)
- Kangoeroewedstrijd (www.math.kun.nl/kangoeroe)
- Wiskunde Olympiade (www.wiskundeolympiade.nl)
- Vierkant voor Wiskunde (www.vierkantvoorwiskunde.nl)
- praktische opdrachten in schoolboeken

We gaan volgende week in de les aan de voorbereiding van de presentatie werken; zorg dat je dus van te voren je probleem uitgekozen hebt. Overleg met je docent of het probleem geschikt is.

Feedback geven

0	Sfeer van vertrouwen	"Wil je mijn reactie op ...?"
1a	Neutrale en concrete observaties (geen interpretaties)	"Ik zie, neem waar, hoor ..."
1b	Ruimte voor reacties	"Herken je dat? Klopt dat?
2a	Subjectief, een persoonlijk beleven van de feedbackgever	"Dit komt op mij over als..."
2b	Ruimte voor reacties	"Bedoel je het zo over te komen?"

Feedback ontvangen

1	Luisteren naar feedback: ga niet in de verdediging;
2	Ingaan op feedback: vraag door om toelichting, alternatieven, ideeën, enz.
3	Vertalen van feedback: bedenk wat je concreet met de feedback gaat doen.

Feedbackkaartje

Feedback
Van:
Voor:
Over: 1. Manier van presenteren 2. Hulp aan klasgenoten (hulpladder!)
Wat ging goed?
Waar een volgende keer op letten?
Vragen:

Week 5: Lesvoorbereiding

- Les 12: Oefenen met resterende opdrachten 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21. Presentatietechnieken.
- Les 13: In tweetallen werken aan dossieropdracht C.
- Les 14: In tweetallen werken aan dossieropdracht C.

Dossieropdracht C

(bij aanvang van les 15 inleveren op papier; telt mee in beoordeling)
Je gaat in tweetallen een les geven aan je groepsgenoten van maximaal 15 minuten. In die les presenteer je een probleem dat je groepsgenoten moeten oplossen. Je helpt ook je groepsgenoten bij de oplossing van het probleem.
a) Werk het probleem goed uit op papier.
b) Stel één of meer leerdoelen op voor je groepsgenoten. Wat moeten ze na afloop van je lesje kennen en wat moeten ze kunnen?
c) Maak een schema, waarin je vertelt wat je precies gaat doen, wat je groepsgenoten precies gaan doen en hoe lang alles gaat duren. Schrijf alles uitgebreid op: wat ga je precies zeggen, tekenen, voordoen? Wat is precies de bedoeling dat je groepsgenoten gaan doen? Hoe ga je hen daarbij helpen (zie de hulpladder). Het volgende schema kan hierbij handig zijn:

Tijdsduur	Wat doe ik	Wat doen “de leerlingen”
1 minuut	Ik introduceer het onderwerp op de volgende manier: ...	

Week 6: Afsluiting

- Les 15: Afronden voorbereiding presentaties.
- Les 16: Uitloop.

In deze week zullen leerlingen van verschillende scholen elkaar afwisselend in de docentrol en de leerlingrol problemen voorleggen. Elke presentatie duurt 15 minuten (waaronder zelfwerkzaamheid door de groep!) en na afloop is er 5 minuten tijd voor een korte feedbackronde. De feedbackformulieren worden na afloop gekopieerd, zodat zowel de feedbackgever als de feedback-krijger de beschikking heeft over een formulier. De presentaties tellen mee bij de beoordeling, naast de dossieropdrachten A, B en C.

Deze gemeenschappelijke afsluiting zal worden gehouden op de Hogeschool Utrecht, Faculteit Educatie, Instituut Archimedes, Padualaan 97, Utrecht.

- Presentaties door de leerlingen in grotere groep op de Hogeschool Utrecht.
- Werken aan problemen van elkaar.
- Elkaar feedback geven met feedbackkaartje.

Tot slot

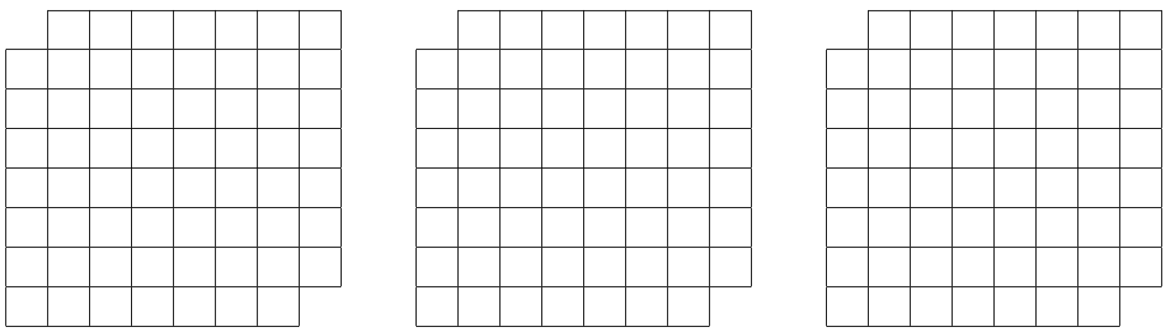
Heb je plezier gekregen in het oplossen van zulk soort wiskundige problemen?

- In maart/april is elk jaar de Kangoeroewedstrijd.
- Eind januari is weer de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade.

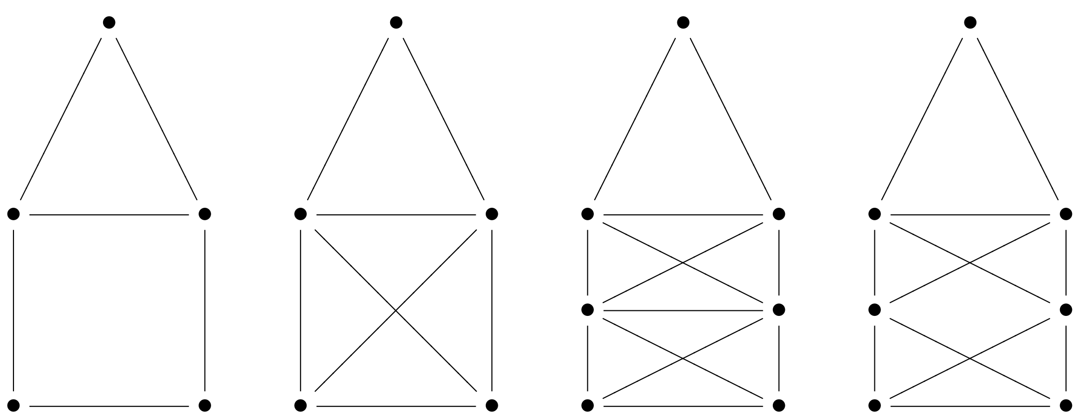
Onderzoeksproblemen

Opdracht 1 ***Pijpleidingen***
Dertien steden moeten onderling met directe pijpleidingen worden verbonden. Hoeveel pijpleidingen moeten er worden aangelegd?

Opdracht 2 ***Schaakbord***
Dit bord bestaat uit $8 \times 8 - 2 = 62$ *hokjes. Is er een manier om het bord volledig te bedekken met 31 dominosteentjes (die elk afmetingen* 2×1 *hebben)?*



Opdracht 3 ***Huisje***
Onderzoek van elk huisje of het met een doorlopende potloodlijn volledig te tekenen is.



Opdracht 4 ***Kop/munt***
Je krijgt 10 muntstukken voor je te liggen; de helft 'kop' en de andere helft 'munt'. Helaas kun je ze niet zien, want je hebt een blinddoek voor. Verdeel de munten nu in twee stapeltjes, zodanig dat beide stapeltjes evenveel 'kop' bevatten.

Opdracht 5 ***Flessen wijn***
Twee identieke flessen wijn zitten allebei precies halfvol, de linker met witte wijn, de rechter

met rode wijn. Met een maatglaasje giet je een bepaalde hoeveelheid rode wijn bij de witte wijn. Na goed roeren wordt van dit mengsel een gelijke hoeveelheid teruggegoten. De vraag is nu: Zit er tenslotte meer rode wijn bij de witte dan witte bij de rode, of is het juist zo dat er meer witte wijn bij de rode zit dan rode bij de witte?

Opdracht 6 ***Hekkenprobleem***
Een kudde schapen wordt regelmatig verplaatst tussen stal, heide en bron. De weg naar de heide is 6 meter breed, de weg naar de bron 5 meter en de weg naar de stal 4 meter. Op een driesprong ontmoeten deze wegen elkaar. Elke weg kan met twee scharnierende hekken worden afgesloten.

(a) Hoe groot moet elk van de drie hekken zijn, zodat elk tweetal hekken één weg kan afsluiten?

(b) Als de wegen 2,40 meter, 3,60 meter en 5,20 meter zij, hoe groot moeten de hekken dan zijn?

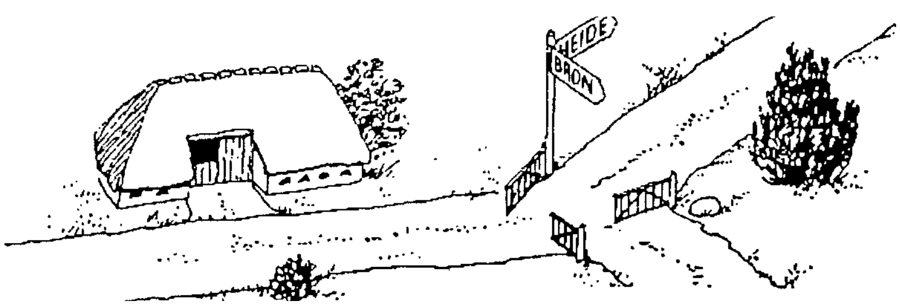
(c) Los het probleem ook op als de wegen a meter, b meter en c meter breed zijn.

(d) Nu voor een viersprong. Hoe groot moeten de hekken zijn als er vier wegen samenkomen met breedtes 3, 4, 5 en 4 meter? En met breedtes 3, 4, 5 en 6 meter? En voor willekeurige breedtes?

(e) Nu voor een vijfsprong. Hoe groot moeten de hekken zijn als er vijf wegen samenkomen met breedtes 3, 4, 5, 6 en 7 meter? En voor willekeurige breedtes?

(f) Hoe zou het met een zesprong zitten?

(g) Los het probleem ook op voor een n-hoekig verkeersplein, waarbij de wegen willekeurige breedten hebben.



Opdracht 7 ***Getallenmysterie 1***
Kies een getal tussen de 0 en 99. Trek de som van de cijfers ervan af. Kijk in de geheime-code-tabel welke letter hierbij hoort en houd die geheim.

Voorbeeld: je kiest 25. De som van de cijfers is dan $2 + 5 = 7$. *Als je dat ervan aftrekt kom je uit op 18. Kijk nu in de tabel welke letter hierbij staat.*

Doe dit nu dus ook voor het door jou gekozen getal. Je docent kijkt je diep in de ogen en weet feilloos welke letter je in gedachten hebt...

00:Q	01:L	02:K	03:A	04:B	05:R	06:K	07:W	08:A	09:Q	10:A	11:P	12:Z
13:C	14:P	15:M	16:Z	17:D	18:Q	19:M	20:V	21:B	22:P	23:Z	24:L	25:V
26:D	27:Q	28:N	29:X	30:E	31:S	32:N	33:P	34:C	35:S	36:Q	37:M	38:U
39:F	40:R	41:P	42:V	43:F	44:P	45:Q	46:T	47:F	48:T	49:P	50:N	51:T
52:G	53:T	54:Q	55:P	56:G	57:V	58:R	59:S	60:G	61:U	62:R	63:Q	64:S
65:H	66:P	67:R	68:S	69:H	70:X	71:S	72:Q	73:H	74:V	75:S	76:U	77:P
78:J	79:V	80:S	81:Q	82:J	83:Y	84:T	85:P	86:K	87:W	88:P	89:V	90:P
91:K	92:W	93:T	94:P	95:K	96:Z	97:V	98:W	99:P				

Doe dit nu ook voor een tweede getal. Gebruik daarvoor onderstaande tabel. Op welke letter ben je nu uitgekomen?

00:F	01:P	02:A	03:R	04:S	05:G	06:C	07:X	08:Q	09:F	10:H	11:A	12:E
13:G	14:N	15:B	16:Q	17:T	18:F	19:D	20:Z	21:P	22:A	23:G	24:K	25:Q
26:K	27:F	28:D	29:P	30:U	31:C	32:E	33:A	34:N	35:B	36:F	37:M	38:P
39:L	40:G	41:E	42:K	43:V	44:A	45:F	46:C	47:M	48:C	49:Q	50:P	51:F
52:M	53:Z	54:F	55:A	56:W	57:U	58:N	59:D	60:J	61:D	62:R	63:F	64:G
65:N	66:A	67:G	68:H	69:X	70:S	71:M	72:F	73:H	74:E	75:P	76:Q	77:A
78:Q	79:X	80:K	81:F	82:Y	83:T	84:P	85:G	86:E	87:F	88:A	89:R	90:T
91:R	92:S	93:L	94:C	95:Z	96:R	97:Q	98:H	99:A				

Ook nu weet je docent weer precies welke letter je in gedachten hebt. Hoe is dat mogelijk?

Opdracht 8 ***Getallenmysterie 2***

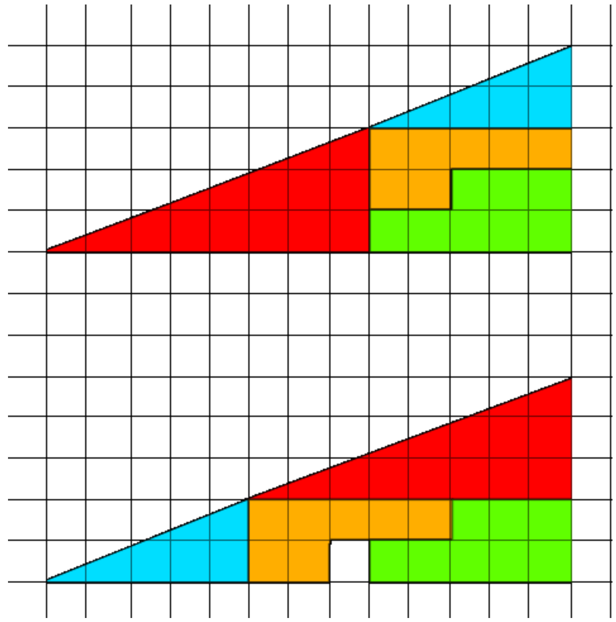
Kies nu een getal tussen de 10 en 99. Bereken het eerste min het tweede cijfer (dat kan een negatief getal opleveren) en tel de uitkomst bij het getal op. Kijk ook nu weer in de geheime-code-tabel welke letter hierbij hoort en houd die geheim.

Voorbeeld: je kiest 25. Het verschil van de cijfers is dan $2 - 5 = -3$. *Als je dat er bij optelt kom je uit op 22. Kijk nu in de tabel welke letter hierbij staat.*

Doe dit nu dus ook voor het door jou gekozen getal. Wat valt je op in beide tabellen?

Opdracht 9 ***Missende hokje***

Je ziet een afbeelding van twee figuren. Beide figuren zijn opgebouwd uit verschillende puzzelstukken A, B, C en D. Waar komt dat extra hokje vandaan?



Opdracht 10 ***Heel veel enen***
Het getal M bestaat uit 2007 enen achter elkaar geschreven, $M = \underbrace{111\ldots111}_{2007\times}$. Wat is de som van de cijfers van het getal dat je krijgt als je M vermenigvuldigt met 2007?

Opdracht 11 ***Gemiddelde snelheid***
Op de weg van A naar C ligt B precies in het midden. De afstand van A naar C is 200 km. Een auto rijdt van A naar B met een snelheid van 120 km per uur en vervolgens van B naar C met een snelheid van 80 km per uur. Hoe snel rijdt de auto gemiddeld?

Opdracht 12 ***Zuinige auto***
Jan heeft een auto die 1 op 12 rijdt. Dat betekent: op elke liter benzine rijdt hij 12 km. Ali beweert dat zijn auto 25% zuiniger rijdt. Eén op hoeveel rijdt zijn auto dan?

Opdracht 13 ***Leeftijd***
(a) Piet is 2 jaar ouder dan Truus en Truus is weer 2 jaar ouder dan Sanne. Samen zijn ze 45 jaar. Hou oud zijn ze?

(b) Twee jaar geleden was mijn 12 jaar oudere broer precies twee keer zo oud als ik nu ben. Hoe oud ben ik?

(c) Bedenk zelf één of meer raadsels met leeftijden. Schrijf ze op. Probeer je eigen raadsel(s) op te lossen. Ruil één van jouw raadsels met een andere leerling. Los het raadsel op. Bespreek samen elkaars raadsels én de oplossingsmethoden.

Opdracht 14 ***Klimgetallen***
Een klimgetal is een getal zoals 2478 waarin elk cijfer groter is dan zijn voorganger. Hoeveel klimgetallen van lengte vier zijn er bestaande uit de cijfers 1,2,3,4,5,6,7,8,9?

Opdracht 15 ***Magisch vierkant***

In een magisch vierkant zijn de drie rijsommen, de drie kolomsommen en de twee diagonaalsommen aan elkaar gelijk. (Een rijsom *is de som van de getallen op een rij, etc.) Van het hier afgebeelde* 3×3*-magisch vierkant zijn drie getallen ingevuld. Welk getal moet er staan op de plaats van het vraagteken?*

		7
?		
	10	3

Opdracht 16 ***Hond***
Jan laat zijn hond uit. Hij is nog 1 km van huis. Terwijl hij met een snelheid van 5 km per uur maar huis loopt, holt de hond met een snelheid van 15 km per uur naar huis, dan weer terug naar z'n baasje (die inmiddels een stuk dichter bij huis is), dan weer naar huis, dan weer terug, en zo als maar verder. Hoeveel km legt de hond uiteindelijk af?

Opdracht 17 ***Geen haar op m'n hoofd...***
Amsterdam heeft 750 duizend inwoners. Ieder mens heeft hooguit 100.000 haren op het hoofd. Bewijs dat er in Amsterdam zeker 8 mensen zijn met hetzelfde aantal haren op hun hoofd.

Opdracht 18 ***Verjaardagen***
Bewijs dat er dit jaar in een groepje van 15 mensen er altijd twee jongens of twee meisjes op dezelfde dag van de week jarig zijn (bijv. twee jongens op dinsdag of twee meisjes op zaterdag).

Opdracht 19 ***Paartjes***
Laat gegeven zijn 51 verschillende getallen uit $\{1, \ldots, 100\}$.

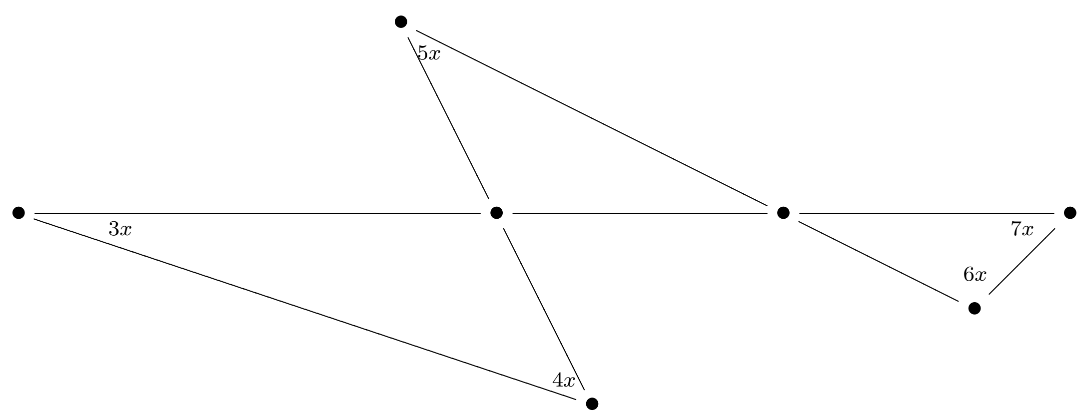
- *Bewijs dat er een tweetal is met som 101.*
- *Bewijs dat er twee buurgetallen zijn (zoals 28 en 29).*
- *Bewijs dat er een tweetal is met verschil 50.*

Opdracht 20 ***Koord***

Een lang koord van 40000 km zit om de aarde heen op de evenaar. Je voegt 1 meter koord toe. Daardoor kun je het koord overal een stukje van de grond tillen. Hoever?

Opdracht 21 ***Driehoeken***

In de figuur is een aantal hoeken in termen van x gegeven. Hoeveel graden is de waarde van x?



Uitwerkingen

Opdracht 1 ***Pijpleidingen***
Deze opgave is een inkomertje en kan in principe ook in de brugklas of tweede klas worden gedaan.

Klein beginnen, bijvoorbeeld 4 steden. Tekening maken en tellen. Je antwoord checken voor $n = 4$*. Tabel maken, patroon herkennen. Dat kan zijn (vanuit klein beginnen): voor elke extra stad die erbij komt, heb je steeds een leiding meer nodig, dus* $1 + 2 + 3 + \cdots + 12$*, en dat is samen 78.*
Of: elk van die 13 steden is verbonden met 12 andere, dus 13×12*. Dat is 156, maar alles twee keer geteld, dus* $\frac{156}{2} = 78$*.*

Als we ons de 13 steden voorstellen als een convexe 13-hoek, kunnen we ons afvragen hoeveel (inwendige) snijpunten van pijpleidingen er zijn (ervanuit gaande dat er geen drie leidingen door één punt gaan). Aangezien elk snijpunt het snijpunt is van twee pijpleidingen (diagonalen van de veelhoek) die weer bepaald worden door vier hoekpunten, is het antwoord $\binom{13}{4}$*. Ook over het aantal gebieden waarin het vlak wordt opgedeeld, valt op dergelijke manier iets te zeggen.*

Opdracht 2 ***Schaakbord***
Opmerking: het bord is expres niet als een schaakbord gekleurd. Dat is namelijk 'part of the problem'.

Mogelijke aanpak: Gewoon proberen en kijken of het lukt. Zo niet, nog 'ns proberen. Wat blijkt: je blijft maar vastlopen. Dus ons vermoeden zou kunnen worden dat het niet kan. Maar nu lijkt het een hopeloos probleem, want er zijn wel heel veel manier om het bord bijna te vullen; hoe bewijs *je nu dat er nooit een manier is waarop het* wel *lukt?*

Hint: kijk eens of je wat opvalt in de hokjes die open blijven. Durf nog een paar keer meer te proberen!

Andere strategieën: klein beginnen (neem 'ns een $4 \times 4 - 2$ *bord in plaats van een* $8 \times 8 - 2$ *bord). Of variëren met het gegeven (wat als je twee andere hokjes van het* 8×8 *bord had weggelaten?)*

Een oplossing: kleur het bord met een schaakbordpatroon zodanig dat de twee weggelaten hokjes wit zijn. Dan zijn er in totaal 32 zwarte hokjes en maar 30 witte. Elk dominosteentje bedekt echter een wit en een zwart hokje, dus je kunt er daar maximaal maar 30 van kwijt en dus niet 31. Merk op: als je het bord bedekt met 30 dominosteentjes, houd je altijd twee zwarte hokjes over.

Dit probleem is wellicht een beetje frustrerend voor leerlingen, omdat de oplossing is dat er geen oplossing is. Op zich maakt dat het ook wel weer interessant: je kunt blijkbaar een *wiskundig probleem oplossen door te bewijzen dat er geen oplossing is. Dat komt best wel vaker voor in de wiskunde.*

De oplossing van een tweedegraadsvergelijking met negatieve discriminant is dat er geen oplossing is. En in iets groter verband: de 'oplossing' van de vergelijking $x^n + y^n = z^n$ *(met* $n \geq 3$ *een geheel getal en* x, y, z *positieve gehele getallen) is dat er niet zulke oplossingen zijn; de welbekende Stelling van Fermat die hij in 1637 in een kantlijn had opgeschreven. Men heeft meer dan 350 jaar lang geprobeerd deze stelling te bewijzen en het is Andrew Wiles geweest die hier in 1994 in geslaagd is, na er 7 jaar aan te hebben gewerkt.*

Een ander voorbeeld is Hilberts tiende probleem. In 1900 prensenteerde David Hilbert 23 wiskundige problemen, waarvan hij dacht dat ze de komende eeuw zouden worden opgelost. Het tiende probleem ging over de zogenaamde Diophantische vergelijkingen, die als extra bijzonderheid hebben dat er alleen naar geheeltallige oplossingen gezocht wordt. Voor het oplossen hiervan kun je algoritmes verzinnen, die je kunt uitvoeren op een Turing-machine, een 'algemene computer'. Hilbert dacht dat er in de twintigste eeuw wel een algoritme gevonden zou worden. Er is echter in 1970 bewezen dat er onmogelijk zo'n algemeen algoritme kan zijn. De oplossing van Hilberts tiende probleem is dus dat er geen oplossing is!

Een ander mooi voorbeeld van kleuringen vinden we in het boekje Mijn Mooiste Mathe *van Leon van den Broek (zie ook Pythagoras, jrg 44, nr. 5 (2005)): is het mogelijk een rechthoek van* 16×9 *vakjes te onderverdelen in 24 stenen van* 1×6.

Om dit probleem op te lossen, kleuren we het 16×9 *bord als volgt:*

a	b	c	d	e	f	a	b	c
b	c	d	e	f	a	b	c	d
c	d	e	f	a	b	c	d	e
d	e	f	a	b	c	d	e	f
e	f	a	b	c	d	e	f	a
f	a	b	c	d	e	f	a	b
a	b	c	d	e	f	a	b	c
b	c	d	e	f	a	b	c	d
c	d	e	f	a	b	c	d	e
d	e	f	a	b	c	d	e	f
e	f	a	b	c	d	e	f	a
f	a	b	c	d	e	f	a	b
a	b	c	d	e	f	**a**	**b**	**c**
b	c	d	e	f	a	**b**	**c**	**d**
c	d	e	f	a	b	**c**	**d**	**e**
d	e	f	a	b	c	**d**	**e**	**f**

Aangezien elke 1×6 *steen, hoe je hem ook neerlegt, alle 6 de kleuren bedekt, zouden die kleuren hier in evenwicht moeten zijn: 24 vakjes van elke kleur. Nu kunnen we gewoon* *kleuren gaan tellen en zien dat het niet klopt. Een snelle manier van kleuren tellen is de linker* 16×6 *opvullen met* 1×6 *stenen. Hetzelfde kunnen we doen met het rechter* 12×3 *gedeelte (stenen liggen over dwars nu). In het niet vet gedrukte gedeelte komt elke kleur dus 22 keer voor. In het wel vet gedrukte gedeelte komen kleur* ***a*** *en* ***f*** *te weinig voor en kleur* ***c*** *en* ***d*** *juist teveel. Dus komen niet alle kleuren evenveel voor en daarom is het onmogelijk het bord te bedekken met* 1×6 *stenen.*

Generalisatie: met $1 \times n$ *stenen kun je alleen maar flauwe rechthoeken leggen: de lengte of breedte van die rechthoek moet een n-voud zijn.*

Opdracht 3 ***Huisje***

Bij het eerste huisje lukt dat wel; begin maar in de ene dakgoot. Merk op dat je altijd in de andere dakgoot eindigt. We zien hier een voorbeeld van het volgende: als *het tekenen lukt van een beginpunt* B *naar een eindpunt* $E \neq B$, dan *heeft elk ander punt even graad (elke inkomende zijde is gepaard met een uitgaande zijde) en dan hebben* B *en* E *om diezelfde reden juist oneven graad. Als het lukt met* $E = B$, *dan hebben alle punten zelfs even graad.*

Zo zien we meteen waar we moeten beginnen, wil het bij het tweede huisje lukken. Het lukt ook echt.

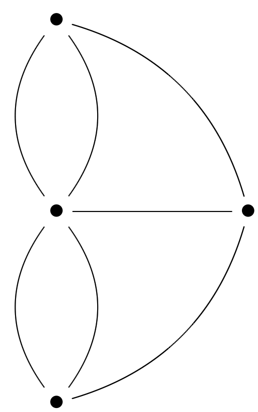
Het derde huisje heeft 4 punten van oneven graad. Maar als het tekenen lukt, dan zijn er 0 of 2 punten met oneven graad zoals we zojuist hebben beredeneerd. Dus het tekenen lukt hier zeker niet.

Het vierde huisje heeft weer netjes twee punten van oneven graad en het blijkt hier ook te lukken.

Achtergrond: Met wat ingewikkelder theorie kunnen we ook de omkering van deze stelling bewijzen: als er 0 of 2 punten zijn van oneven graad, dan is er ook daadwerkelijk een zogenaamd Eulerpad: een pad (of circuit, als $E = B$*) dat elke zijde precies één keer bevat.*

Dit is het zogenaamde Koningsberger bruggenprobleem. (citaat:) Kon Immanuel Kant, de beroemde filosoof die dagelijks klokke vier een wandelingetje ging maken, alle bruggen van de stad precies n keer aandoen? De intuïtie zei van niet, maar het was de Zwitser Leonhard Euler (15 april 1707 - 18 september 1783) die het wiskundige bewijs leverde dat zulks onmogelijk was en daarmee een van de grondleggers van de grafentheorie werd, ofwel de wiskunde die zich bezighoudt met knooppunten en verbindingen daartussen. (ander citaat:) In het kader daarvan past ook het beroemde Koningsberger bruggen probleem. Het ging daarbij om het kunnen doorlopen van een bepaalde route over de bruggen over de rivier de Pregel in de stad Koningsbergen, zonder een brug twee keer te passeren. Euler bewees dat dit onmogelijk was. Hiernaast zie je de bij dit probleem horende graaf. Wellicht kun je

Euler's bewijs zelf vinden (let op het aantal wegen dat in elk knooppunt bij elkaar komt).



Opdracht 4 ***Kop/munt***
Opmerking: Je mag muntstukken omdraaien, maar je kunt niets zien of voelen.

Dit lijkt in eerste instantie onmogelijk. Hier kun je dagen over na denken. Hij is het leukst aan het eind van de les voor het weekend.

Verdeel ze gewoon in twee even grote stapeltjes van 5 muntstukken, en draai dan van een van beide stapeltjes alle munten om. Dat werkt! Immers, stel we hebben links k kop, dan hebben we links daarnaast $5-k$ munt. Maar er waren in totaal 5 kop (en 5 munt), dus rechts hebben we dan juist $5-k$ kop en $5-(5-k)=k$ munt, wat na omdraaien overgaat in $5-k$ munt en k kop, precies zoals links.

In feite is dit een variant op het probleem met de flessen wijn: wat er niet meer in de ene fles zit, moet wel in de andere fles zitten (zie opdracht 5).

Opdracht 5 ***Flessen wijn***
Precies evenveel! Wat er immers ontbreekt aan witte wijn in de linker fles, is enerzijds precies wat er aan witte wijn in de andere fles zit, maar anderzijds ook wat er aan rode wijn nog in deze fles zit.

Een rekenvoorbeeld maakt het veel ingewikkelder, maar laat wel zien dat het klopt. Je hebt bijvoorbeeld flessen die vol zitten met 1 liter wijn (900 cc) en een maatglaasje van 100 cc. Dan is eerst de verdeling (900 wit, 900 rood). Dan (900 wit + 100 rood, 800 rood). Wegens het goede roeren zal het maatschapje nu 90 wit en 10 rood bevatten, dus na overhevelen (810 wit + 90 rood, 90 wit + 810 rood).

Opdracht 6 ***Hekkenprobleem***
Al experimenterend komen leerlingen wellicht op het goede antwoord. Het interessante is dat er voor oneven n altijd precies één oplossing is, en dat er voor even n de ene keer geen

oplossing is en de andere keer oneindig veel. De algemene gevallen zijn wellicht te hoog gegrepen, maar de concrete gevallen zijn een leuke uitdaging.

(c) Hier de formele oplossing: Voor $n = 3$ noemen we de breedtes a, b en c en de groottes van de hekken x, y en z. Dan leidt dit probleem tot het stelsel

$$y + z = a \qquad z + x = b \qquad x + y = c.$$

We zullen laten zien dat dit stelsel een unieke oplossing heeft. Uit optellen volgt $2(x+y+z) = a+b+c$. Definieer $s = \frac{a+b+c}{2}$ als de halve som van de wegbreedtes, dan moet dus $x+y+z = s$, dus $x = s-(y+z) = s-a = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{-a+b+c}{2}$. Net zulke formules vinden we voor $y = s-b = \frac{a-b+c}{2}$ en $z = s-c = \frac{a+b-c}{2}$. Merk op: Omdat (wegens de driehoeksongelijkheid) geldt dat $b+c > a$ (etc.) weten we nu ook zeker dat $x > 0$ (etc.), dus we vinden een positieve grootte van de hekken.

(a) Concreet: $a = 6$, $b = 5$, $c = 4$, dan $s = 7,50$, dus neem $x = s-a = 1,50$, $y = 2,50$ en $z = 3,50$.

(b) Als $a = 2,40$, $b = 3,60$ en $c = 5,20$, dan $s = 5,60$ dus neem dan $x = s-a = 3,20$, $y = 2$, $z = 0,40$.

(d)/(f)/(g) Voor even n is een noodzakelijk voorwaarde voor een oplossing dat de som van de breedtes der even straten even groot is als die van de oneven straten (klap alle hekken om). Als dat zo is, dan is één hek willekeurig te kiezen, en dan ligt de rest daarmee vast. Voorbeeld: $(3,4,5,4) = (1+2, 2+2, 2+3, 3+1)$ maar ook $(3,4,5,4) = (\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}+3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}+\frac{1}{2})$. Met breedtes 3, 4, 5 en 6 meter gaat dus niet lukken want als we ze de ene kant op klappen zouden ze $3+5 = 8$ zijn en als we ze omklappen zouden ze $4+6 = 10$ zijn.

(e) Voor n oneven $\neq 3$ krijgen we iets analoogs ($x_1 + x_2 = a_1$; $x_2 + x_3 = a_2$; $\ldots$; $x_n + x_1 = a_n$). Hieruit volgt $2\sum x_i = \sum a_i$, dus definieer weer $s = \frac{1}{2}\sum a_i$. Nu volgt

$$x_1 = s - (x_2 + x_3) - (x_4 + x_5) - \cdots - (x_{n-1} + x_n) = s - a_2 - \cdots - a_{n-1} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_i,$$

en voor de andere x_j soortgelijke formules. Concreet voor $n = 5$ zijn de vergelijkingen: $x_1 + x_2 = a_1$; $x_2 + x_3 = a_2$; $x_3 + x_4 = a_3$; $x_4 + x_5 = a_4$; $x_5 + x_1 = a_5$ met oplossingen $x_1 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) - (x_2 + x_3) - (x_4 + x_5) = s - a_2 - a_4$ etc. Met $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $a_3 = 5$, $a_4 = 6$ en $a_5 = 7$ komen we op $s = 12,50$ en $x_1 = 12,50 - 4 - 6 = 2,50$; $x_2 = 12,50 - 5 - 7 = 0,50$; $x_3 = 12,50 - 6 - 3 = 3,50$; $x_4 = 12,50 - 7 - 4 = 1,50$ en $x_5 = 12,50 - 3 - 5 = 4,50$.

Opdracht 7 *Getallenmysterie 1*

Er komt steeds de Q uit en in de tweede tabel de F. Als je dit vaak doet, merk je op dat

je steeds op een 9-voud uitkomt (en bij de meeste 9-vouden staat een Q). Hoe zit dat? Je kunt daar op verschillende manieren over nadenken.
(Manier 1) Als je met een 10-tal begint is het duidelijk; bijvoorbeeld $70 - 7 = 63$ *en zo kunnen we ze allemaal even langs gaan. Maar neem je nu een 10-tal plus nogwat, dan trek je dat 'nogwat' er even hard weer af. Bijvoorbeeld bij 76:* $76 - 13$ *is nog steeds 63 want eigenlijk doe je* $(70 + 6) - (7 + 6)$ *en dat is weer* $70 - 7 = 63$.
(Manier 2) In feite een formalisering van Manier 1. Voer goede notatie in (fase 1 van Polya!). Schijf je oorspronkelijke getal bestaande uit de cijfers a *en* b *als* $\overline{ab} = 10a + b$, *dan houden we na aftrekken van* $a + b$ *over:* $(10a + b) - (a + b) = 9a$ *en dat is inderdaad altijd een 9-voud (0,9,...,81).*
Opmerking 1: Er is een verschil tussen de begrippen getal *en* cijfer. *Een getal bestaat uit cijfers (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9).*
Opmerking 2: Hiervan is ook een leuke digitale powerpoint-versie. Deze is te vinden via BEST-Utrecht (www.best-utrecht.nl).
Opmerking 3: In het algemeen geldt dat $n \equiv S(n) \pmod 9$, *waarbij* $S(n)$ *de som van de cijfers van het positieve gehele getal* n *is. Dit zie je in door het verschil te bekijken; dat is voor* $n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0} = \sum_{i=0}^k a_i 10^i$ *gelijk aan* $n - S(n) = \sum_{i=0}^k a_i 10^i - \sum_{i=0}^k a_i = \sum_{i=0}^k a_i(10^i - 1) = \sum_{i=0}^k a_i 9 \cdot \underbrace{111\ldots111}_{i \text{ maal}}$. *Als gevolg is de som van de cijfers van een getal* n *een 9-voud precies dan als* n *een 9-voud is, wat een erg snelle methode geeft om zonder rekenmachine te controleren of een getal deelbaar is door 9.*
Opmerking 4: Nog een leuk getallenraadsel. Vraag iemand om z'n lievelingscijfer uit 1 t/m 9, zeg k, *en laat hem* $12345679 \times (9k)$ *uitrekenen. Dus iemand zegt bijvoorbeeld 4, laat hem dan* 12345679×36 *uitrekenen. Hij is vast blij verrast. Hoe zit dat? Bewijs:*
$12345679 \times (9k) = (12345679 \times 9)k = 111111111k$.

Opdracht 8 ***Getallenmysterie 2***
Nu doen we $(10a + b) + (a - b)$ *en dat is* $11a$ *met* $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, *dus dan kom je uit op de 11-vouden 11,22,...,99; daarbij staat een P (en in de tweede tabel een A).*
Opmerking 1: er zijn twee 11-vouden die ook 9-voud zijn, namelijk 0 en 99. Dat zorgt voor potentiële problemen. Maar 99 komt nooit voor als 9-voud: er komt bij Getallenmysterie 1 hooguit $9a = 81$ *uit. En bij Getallenmysterie 2 eisen we dat a ten minste 1 is, dus 0 komt nooit voor als 11-voud.*

Opmerking: In het algemeen geldt dat de alternerende som van de cijfers van het getal n *een 11-voud is precies dan als* n *een 11-voud is. Dit heeft te maken met het feit dat* $10 \equiv -1 \pmod{11}$, *dus* $10^i \equiv (-1)^i$ *(oftewel afwisselend zijn* $1 - 1 = 0, 10 + 1 = 11, 100 - 1 = 99, 1000 + 1 = 1001, 10000 - 1 = 9999$ *allemaal 11-vouden). Als je dit 11-voud van je getal* $n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0} = \sum_{i=0}^k a_i 10^i$ *aftrekt krijg je* $\sum_{i=0}^k a_i(10^i - (10^i - (-1)^i)) = \sum_{i=0}^k (-1)^i a_i$ *en dat is precies de alternerende som. Als je per ongeluk verkeerd begint met het nemen van de alternerende som (dus bijv.* $a_3 - a_2 + a_1 - a_0$ *i.p.v.* $-a_3 + a_2 - a_1 + a_0$*) dan maakt dit voor het deelbaarheidscriterium niets uit.*

Opdracht 9 ***Missende hokje***

Opmerking: Hiervan staat een plaatje op de website van BEST-Utrecht (www.best-utrecht.nl).

Onbewust maakt men hier vaak een aanname: alsof die beginfiguren gelijk zijn. In werkelijkheid heeft de bovenstenste 'driehoek' een indeuking en de onderste een uitdeuking. Het gezichtsbedrog wordt veroorzaakt doordat $\frac{2}{5} = 0,4 \approx 0,375 = \frac{3}{8}$.

Het is een goede waarschuwing: pas op met onbewust aannames. Hier nog een voorbeeldje: een vader zit met zijn zoon in de auto. Dan krijgen ze een auto-ongeluk. Vader is op slag dood; zoon gaat met spoed naar het ziekenhuis. De opgetrommelde chirurg loopt de operatiekamer binnen, wil beginnen met opereren en roept dan uit: 'Nee toch, niet mijn zoon...'. Hoe zit dat?

Als je onbewust de aanname maakt dat die chirurg een man is, is het lastig te rijmen. Maar het was zijn moeder.

Opdracht 10 ***Heel veel enen***

Klein beginnen en het patroon herkennen. Bijvoorbeeld bij het getal bestaande uit 8 enen: $2007 \times 11111111 = 22222222000 + 77777777 = 22299999777$ *en de som van de cijfers daarvan is (neem de tweeën en zevens samen)* 8×9. *Het is duidelijk dat we het geval met 2007 net zo kunnen aanpakken; er komt dan* $2007 \times 9 = 18063$ *uit.*
Dit was opgave A1 van de Eerste Ronde van de Wiskunde Olympiade 2007.

Opdracht 11 ***Gemiddelde snelheid***

Hij rijdt 100 km lang 120 km/h: 120 km in 60 min, dus 100 km in 50 min. Hij rijdt vervolgens 100 km lang 80 km/h: 80 km in 60 min, dus 100 km in 75 min. Dan is hij in totaal 125 minuten aan het rijden geweest over 200 km, dus 200 km per 125 minuten, dus 96 km/h.

Als hij de helft van de tijd *120 km/h had gereden en daarna 80 km/h, dan was het antwoord gewoon 100 km/h geweest. Nu dus minder, want hij rijdt minder lang de hogere snelheid, dus dat telt minder zwaar. Dit is het zogenaamde harmonisch gemiddelde:*

$$\frac{2}{\frac{1}{120} + \frac{1}{80}} = 96.$$

Opdracht 12 ***Zuinige auto***

Voor 12 km heeft Ali dus niet 1 liter maar slechts $\frac{3}{4}$ *liter nodig. Dat geeft de volgende verhoudingstabel:*

$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	*1*
12	*4*	*16*

Hij rijdt dus 1 op 16 (en niet 1 op 15 zoals je misschien zou verwachten!).

Opdracht 13 ***Leeftijd***
(a): Truus heeft dus de gemiddelde leeftijd van 15 jaar. Piet is 17 en Sanne is 13.

(b): Stel ik ben nu x *jaar oud. Mijn broer is nu dus* $x + 12$ *jaar oud. Twee jaar geleden was hij* $x + 10$ *jaar oud. Dat was precies* $2x$. *Dus* $x = 10$*; ik ben nu 10.*

Opdracht 14 ***Klimgetallen***
Bij elk klimgetal hoort een uniek viertal cijfers uit $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. *Daarvan zijn er* $\binom{9}{4} = 126$.
Uitgebreidere uitleg (om binomiaalcoëfficiënten te vermijden): Als je per se je klimgetal wilt opbouwen van laag naar hoog, wordt het lastig. Als je dat even uitstelt, kunnen we gewoon eerst een viertal elementen selecteren: het eerste op 9 manieren, het volgende op 8 manieren, het volgende op 7 manieren en het laatste op 6 manieren; dat zijn $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ *manieren. Er is precies één manier waarop zo'n viertal als een klimgetal kan worden gezien (namelijk door de cijfers te ordenen van laag naar hoog). Maar we komen dit klimgetal in totaal 24 keer tegen, dus het antwoord is 24 keer te groot. Het moet dus* $\frac{3024}{24} = 126$ *zijn.*

Opdracht 15 ***Magisch vierkant***

Zie figuur. Uit $F + 10 + 3 = F + D + 7$ *volgt* $D = 6$. *Uit* $7 + E + 3 = C + D + E = C + 6 + E$ *volgt* $C = 7 + 3 - 6 = 4$.
Er zijn overigens nog heel veel andere manieren om dit aan te pakken.
Dit was opgave A2 van de Eerste Ronde van de Wiskunde Olympiade 2008.

A	B	7
C	D	E
F	10	3

Opdracht 16 ***Hond***
Dat wordt een vrij ingewikkelde reeks die we moeten optellen. Totdat we bedenken (blikwisseling!) dat Jan zelf 1 km aflegt, en dat de hond simpelweg in even lange tijd 3 keer zo snel loopt, dus die legt 3 km af.

Opdracht 17 ***Geen haar op m'n hoofd...***
Neem als laden $\{$*de kale Amsterdammers*$\}$, $\{$*de Amsterdammers met 1 haar*$\}$, $\ldots$, $\{$*de Amsterdammers me*
In deze 100.001 *laden plaatsen we alle 750.000 Amsterdammers. Omdat* $750.000 > 7 \cdot 100.001$, *volgt uit het ladenprincipe dat er een la is met minstens 8 Amsterdammers erin.*

Opdracht 18 ***Verjaardagen***
Neem 14 laden (één voor elke combinatie van weekdag en geslacht: $\{$*maandag-jongens*$\}$ *etc.); daarover verdeel je* $15 > 14$ *mensen.*

Opdracht 19 ***Paartjes***

- $\{1, 100\}$, $\{2, 99\}$, $\ldots$, $\{k, 101-k\}$, $\ldots$, $\{50, 51\}$*: 50 laden;* $51 > 50$ *gekozen getallen.*
- $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\ldots$, $\{2k-1, 2k\}$, $\ldots$, $\{99, 100\}$*: 50 laden;* $51 > 50$ *gekozen getallen.*
- $\{1, 51\}$, $\{2, 52\}$, $\ldots$, $\{k, 50+k\}$, $\ldots$, $\{50, 100\}$*: 50 laden;* $51 > 50$ *gekozen getallen.*

Opdracht 20 ***Koord***
Je schat misschien: nog geen millimeter. Maar het antwoord is verrassend groot: 16 cm. Immers de omtrek wordt gegeven door $2\pi R$ *met* R *de straal van de aarde. Neemt de omtrek nu toe met 100 cm, dan neemt* R *toe met* $\frac{100}{2\pi} \approx 15,9$ *cm.*

Opdracht 21 ***Driehoeken***
$(180° - 3x - 4x) + (180° - 6x - 7x) + 5x = 180°$ *dus* $180° = 15x$ *dus* $x = 12°$. *Dit was opgave A2 van de Eerste Ronde van de Wiskunde Olympiade 2006.*