Complexe Stromen

Complexe getallen
en
elektrische netwerken

VWO 6: WisD en NLT

Nationale Wiskunde Dagen XV, 6 februari 2009

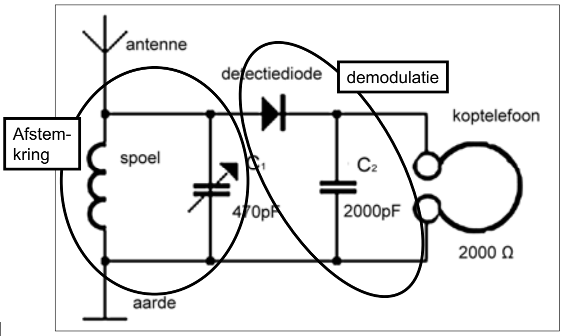
Aad Goddijn (Fi, Junior College Utrecht)
[Joost van Hoof (Julius instituut, UU)]

Sommige sheets staan achterin nogmaals afgedrukt in groter formaat.

Zulke sheets zijn gemarkeerd met een * rechtsboven.

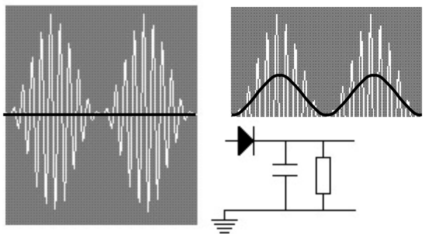
1956: Herman luistert naar het weerbericht

Kristalonvanger



- Wikipedia
- http://www.qsl.net/pd2acw/nummer012002/kristalontvanger.html

Amplitudo (de-)Modulatie



Na gelijkrichting door de diode heeft het signaal wél een trage component

Alle energie kwam uit de antenne, die aan mijn vlieger hing!

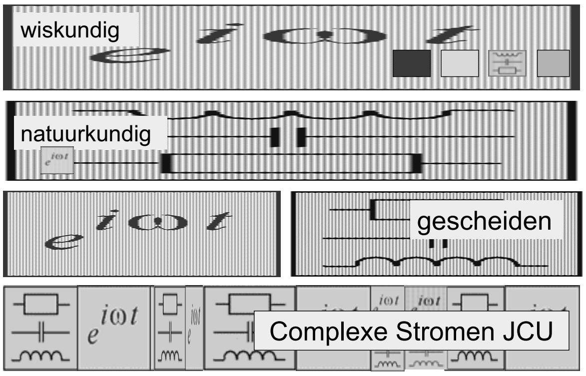
0: Feiten *Complexe Stromen*

- Samenontwikkeling en uitvoering van *module* natuur+wiskunde
  - **Joost van Hoof** (Julius Instituut, UU)
  - Aad Goddijn (Fi, JCU)
- JCU:
  - pittig exact gemotiveerde leerlingen omgeving Utrecht
- NLT en Wis-D
- 8 keer 2 × 75 minuten
- 2 keer op JCU gedaan (19 ll.)
- experimenten elders aan de gang
- certificatie NLT beoogd zomer 2009

Motivaties keuze voor deze module

- **T.** Ik heb een film gezien over complexe getallen en ik wil wel eens zien hoe je die kunt gebruiken.
- **J.** Ik hoop dat ik, door deze module te kiezen, de vorige hoofdstukken van natuurkunde wat beter ga begrijpen.
- **S.** 'Complexe stromen' vind ik mysterieus klinken. Vooral de complexe getallen lijken mij erg interessant. *Ik ben erg benieuwd hoe zoiets vreemds als het getal i kan helpen bij het beschrijven van een realistisch natuurkundige situatie.*
- **A.** *Ik ben al lange tijd anti-fan van aardrijkskunde.* En ook al zit er ontzettend veel beta bij, het blijft aardrijkskunde voor mij. Wiskunde en natuurkunde zijn gewoon ontzettend tof!
- **T.** Ik heb altijd al willen weten wat nou niet reele getallen zijn. Het lijkt me ook leuk weer les te krijgen van A.

Verschillen in aanpak mogelijk



Wiskundige opzet

- Vaak:
  - Sterk algebraïsche aanzet
  - Start met *oploswens* bij de vergelijking $x^2 = -1$
  - Vliegende start met *i*.
    - (*"Een complex getal is een uitdrukking van de vorm a + bi "*)
  - (start met Cartesische representatie)
- Soms:
  - Meer meetkundig vanuit draaien en gelijkvormigheid. (Argand)
  - (start met polaire representatie)

Complexe Stromen JCU; Wi+Na

- Wis en Na-deel samen/afwisselend opgebouwd
- Argand-aanpak, uitgelokt door gebruik in natuurkunde
- Taal- en activiteiten: overlap en verschil
  - Schakelingen: ***R, C, L, U, I***, ω en *t*
  - Complexe getallen: ***i*** en $\mathbf{e^z}$
  - Wiskunde: soms *signaal* i.p.v. *functie*
  - Natuurkunde: bevat de meeste *oefeningen* in algebra
- Vak-visieverschillen:
  - interessante confrontatie, ook voor de leerlingen

7 hoofdstukken

1: Componenten in complexe schakelingen

2: De sinus en cosinus onder de loep

3: Een condensator in een wisselstroomnetwerk

4: Constructie van de complexe getallen

5: Complexe stromen en impedanties in netwerken met een spoel

6: Complexe getallen en transformaties

7: Netwerken met zowel condensatoren als spoelen

Uit hfst 1: Componenten in de schakeling

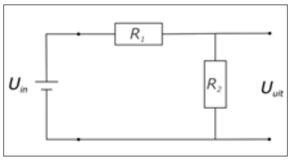
- Voorkennis:
  - Wet van Ohm: $U = I R$
  - Parallelschakeling en serie schakeling *weerstanden*
- Condensator en spoel
- Herhalingsoefening rekenen in netwerken

Netwerken en Overdracht

- Schakeling met een ingang (input) en een uitgang (output)
- De *overdracht H* van het netwerk (voorlopig!)

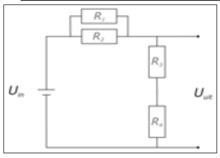
$$H = \frac{U_{uit}}{U_{in}}$$

De *algebra* van de spanningsdeler: met de wet van Ohm



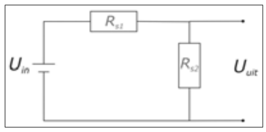
- Stroom door R_1 en R_2: $I = \dfrac{U_{in}}{R_1 + R_2}$
- Uitgangsspanning berekenen: $U_{uit} = I \cdot R_2 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_{in}$
- De overdracht is dus: $H = \dfrac{U_{uit}}{U_{in}} = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$

Vervangingsweerstand; serie en parallelschakeling



$$R_{s2} = R_3 + R_4$$

$$\frac{1}{R_{s1}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$



$$H = \frac{R_{s2}}{R_{s1} + R_{s2}} = \frac{R_3 + R_4}{\dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + R_4}$$

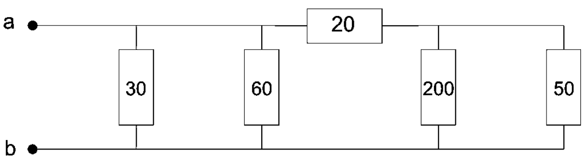
!!! Belangrijk !!!

1. **Reductie en rekenwerk berusten op de WET van OHM: *U = I R***
2. **Bij weerstanden: *tijdsonafhankelijk*!**

!! OPGAVE !!

Vervangingsweerstand *

A:
Bereken de vervangingsweerstand



B:
Bedenk een netwerk dat zich zo niet laat reduceren ….

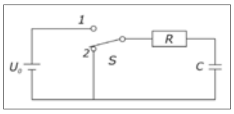
De condensator

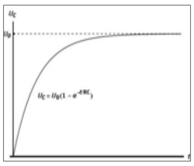
- Twee geleiders met een isolerende tussenstof.
- Als er lading op een condensator staat is er ook een spanning:

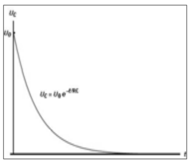
$$Q = U_C \cdot C \qquad U_C = \frac{Q}{C}$$

- *C* is de *capaciteit*. Eenheid: de farad (F).

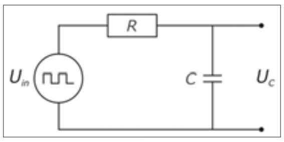
De condensator: op- en ontladen







Blokspanning op een condensator



- Hoe ziet U_C er uit?

Veranderende lading, spanning en stroom bij de Condensator

- We weten: $Q = U_C \cdot C$, $U_C = \frac{Q}{C}$
- Stroom is verandering van lading:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

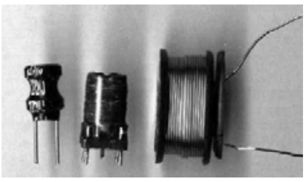
- Op een '*moment*' geldt:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

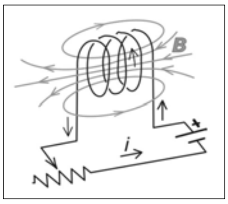
- Dus: $\boxed{I_C = \frac{dQ_C}{dt} = C\frac{dU_C}{dt}}$

De Spoel in een notedop

- Een opgerolde draad.



- Constante stroom door spoel levert een magnetisch veld *B;* evenredig met de stroom *I*. De spoel omvat *flux Φ*.



Stroom en spanning bij de spoel

Als de omvatte flux verandert, verzet de spoel zich daar*tegen* (wet van Lenz) door een spanning te genereren: de *inductiespanning*.

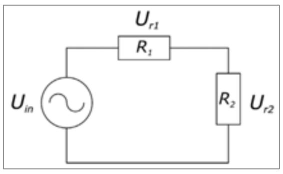
N windingen tellen de spanning op.

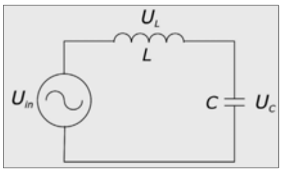
$$U_{ind} = N \cdot \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

Uiteindelijk vind je: $\boxed{U_L = -L\frac{dI}{dt}}$

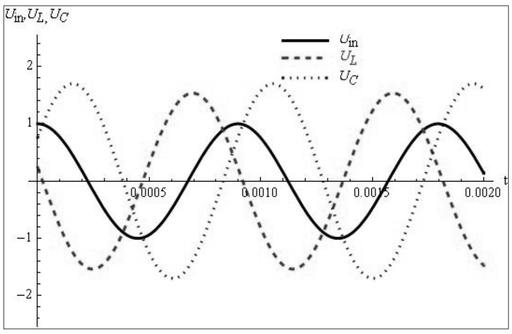
L heet de *coëfficient van zelfinductie*. Eenheid van *L* is de henry (H).

Demonstratie: *Wisselspanning op een Schakeling*





Sinusoiden(?) optellen: klopt wel



Van Teleurstelling naar Toekomstmuziek

- Bij wisselstroom op *C* en *L* (nog) geen eenvoudige rekenregels voor schakelingen
- Maar de sinussignalen lijken kansrijk!
- *Kunnen we 'eenvoudig' leren rekenen met die signalen?*
- *Bestaat er een 'betere' Wet van Ohm?*

Hoofdstuk 2: Rekenen met Sinusoiden

- Deels bekend, deels uitbreiding
  - $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
  - radialen en graden
  - boog/straal

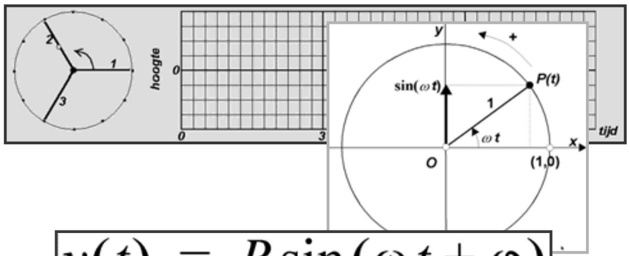
graden	0	30	45	60	90
radialen (exact)	0	π / 6			
sinus exact – benaderd	0	1/2 – 0.5	...... –......	...... –......	1
cosinus exact – benaderd	1	...... –......	...... –......	...... –......	...... –......

- Het gedraai van het duo *sin&cos*
- Vektoriele blik op de afgeleide
- Optellen sinusoiden? Ja, we kunnen.

De wind steekt op!

Vóór- en zijaanzicht van de cirkelbeweging

Twee beelden; algemene formule



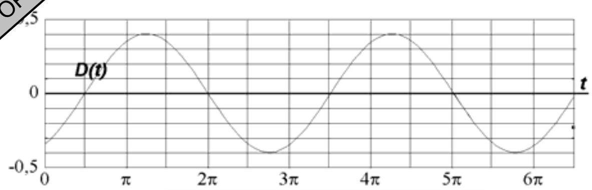
$$y(t) = R\sin(\omega t + \varphi)$$

Amplitudo – Hoeksnelheid – fasehoek

(periode, frequentie)

Opgave (uit de thuistoets) *

!! OPGAVE !!



$$D(t) = R\cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

- Bepaal R, ω en ϕ
- Vergelijk daarna 2 oplossingen (z.o.z)

Twee oplossingen (bis)

Rosalinde

1. $T = 3\pi$
$R = 0{,}4$
$\varphi = -{}^1/_3\,\pi$
$\omega = {}^2/_3$

Jeroen

$T = 5\pi - 2\pi = 3\pi$

$\frac{2\pi}{\omega} = T, dus$

$\omega = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$

$R = 0,4 - 0 = 0.4$

$\phi = -\frac{1}{2}\pi$

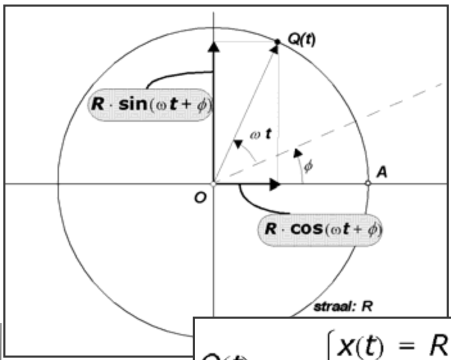
$D(t) = R\cdot(\omega(t-\phi))$

$D(t) = 0.4\sin(\frac{2}{3}(t - 0.5\pi))$

$$D(t) = R\cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

We willen echt de *hoek* en niet het *tijd*sverschil!

Sin&Co



$$Q(t) \quad \begin{cases} x(t) = R \cdot \cos(\omega t + \phi) \\ y(t) = R \cdot \sin(\omega t + \phi) \end{cases}$$

De optelmanoeuvre zelf

(gelijke hoeksnelheden)

- Op te tellen:

$$A_1 \cdot sin(\omega t + \varphi_1) \text{ en } A_2 \cdot sin(\omega t + \varphi_2)$$

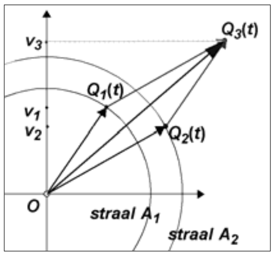
- *Verrijk* met horizontale component:

$$A_1 \cdot cos(\omega t + \varphi_1) \text{ en } A_2 \cdot cos(\omega t + \varphi_2)$$

- Tel draaiende vektoren op:

$$Q_1(t) \quad + \quad Q_2(t) = Q_3(t)$$

- Kies component van Q_3.
- Gekozen moment *t* is niet belangrijk!!!



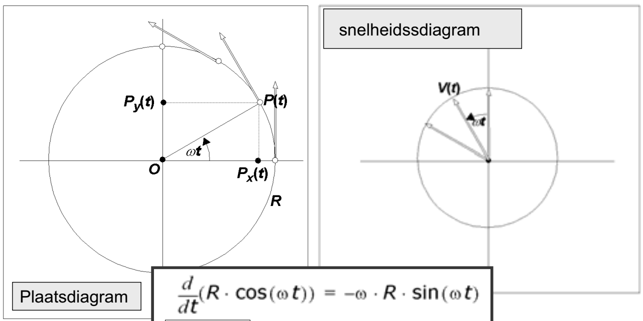
Opgave (toets) *

- Toon aan:

$$\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{12}\right)$$

- Geldt de formule ook met cos-cos-cos ?
  - Er zijn minstens twee verschillende argumenten ..
- Bekijk het werk van Jeroen en Rosalinde

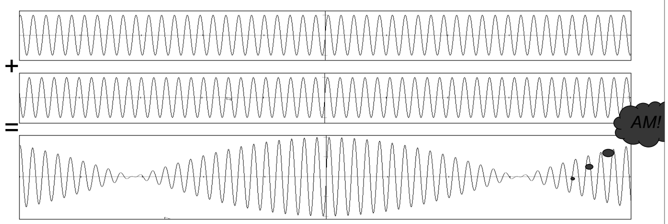
Ware snelheid en afgeleide



$$\frac{d}{dt}(R \cdot \cos(\omega t)) = -\omega \cdot R \cdot \sin(\omega t)$$

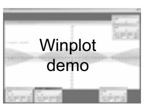
$$\frac{d}{dt}(R \cdot \sin(\omega t)) = \omega \cdot R \cdot \cos(\omega t)$$

Muzikaal intermezzo met ongelijke frequenties



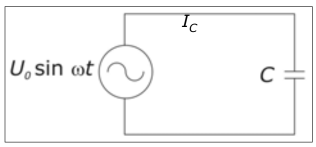
$$\sin(62t) + \sin(60t) = 2 \bullet \cos\left(\frac{62-60}{2}t\right) \bullet \sin\left(\frac{62+60}{2}t\right)$$

Zie ook:
Gunther Cornelissen: zaterdag 9.15-10.00
Heinz Hansmann: zaterdag 10.30-11.15



Hfst 3: Wisselspanning op de condensator (en spoel)

- We weten: $I_C = C \cdot \frac{dU_C}{dt}$



- Wisselspanning IN:

$$U_C(t) = U_0 \sin \omega t$$

- Dus:

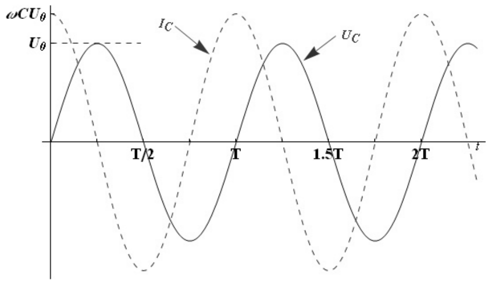
$$I_C(t) = C \cdot \frac{d\, U_0 \sin \omega t}{dt} = \omega C \cdot U_0 \cdot \cos \omega t$$

$$= I_0 \cos \omega t \quad \boxed{= I_0 \sin(\omega t + \pi/2)}$$

Alléén voor de amplituden!

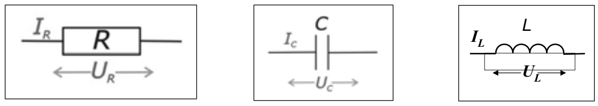
$$\boxed{U_o = \frac{1}{\omega C} \cdot I_o}$$

Stroom en spanning zijn uit fase!



I_C loopt $\pi/2$ vóór op U_C

Impedantie



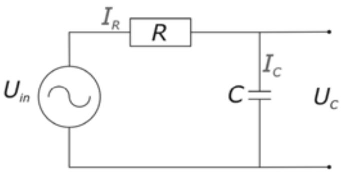
- Quotiënt van spanning en stroom in weerstand R: ***weerstand R.***
- *Quotiënt van de amplitudes* van de *wissel*spanning en -stroom door een element (*R, C,*) heet ***impedantie Z***

$$Z_R = R \qquad Z_C = \frac{1}{\omega C} \qquad Z_L = \omega L$$

- **Algemeen:** $U_0 = Z \bullet I_o$

Hoe werkt dit RC-netwerk?

- We weten:



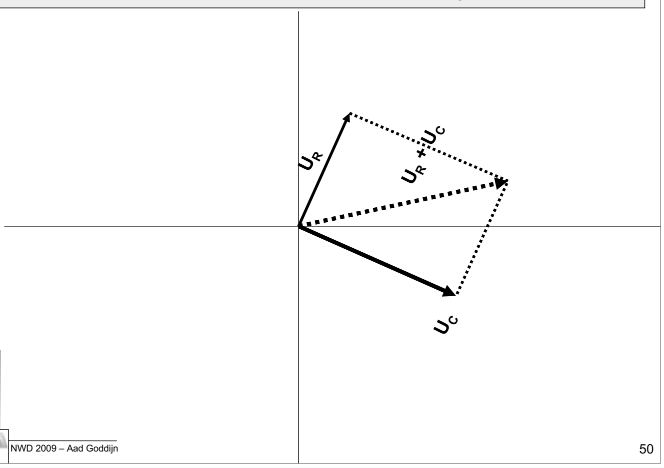
1. $I_R = I_C$ *!!*
2. U_R is in fase met I_R *en dus* met I_C
3. U_C loopt $\pi/2$ achter op I_C *en dus* ook achter op U_R
4. $U_C + U_R = U_{IN}$

!! OPGAVE !!

Pittige opgave: *maak het verhaal af!*

- Bepaal de verhouding tussen de amplitudes van U_C *en* U_R . *(Impedanties!)*
- Pas de draai- optelmanoeuvre (Q_1+ Q_2= Q_3) toe op $U_C + U_R = U_{IN}$. Dat levert een 'schets'.
- De amplitudes $U_{0,C}$, $U_{0,R}$ en $U_{0,IN}$ hangen samen . Hoe?
- Druk de overdracht $H(\omega) = \frac{U_{0,C}}{U_{0,in}}$ in *R, C* en ω uit.
- Laat ϕ het faseverschil van U_C met U_{IN} zijn. Bepaal ϕ, of $\tan(\phi)$.

De som van U_R en U_C

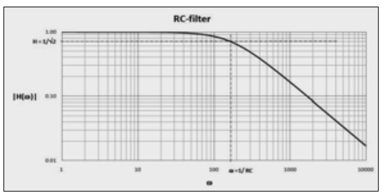


H hangt af van ω af.

$$H(\omega) = \frac{U_{0,uit}}{U_{0,in}} = \frac{1/\omega C}{\sqrt{R^2 + 1/(\omega C)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}$$

$$\tan \Delta\phi = -\frac{U_{0,R}}{U_{0,C}} = -\frac{I_0 \cdot R}{I_0 \cdot 1/(\omega C)} = -\omega R C \qquad U_C(t) = \frac{U_0}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}} \sin(\omega t + \varphi)$$

- Gelukkig maar. Daar hebben we iets aan!
- Dub-bel loga-rit-misch: *H* van ω



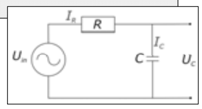
- *Lowpassfilter* (*kristalontvanger*!)

!! OPGAVE !!

Nasleep bij de berekening

- Achteraf: behoorlijk achterstevoren!
- En er iets iets mis met deze aanpak …
  - Kijk kritisch naar de twee paginas waar de oplossing op staat.
  - *Wat is de verborgen aanname ??*

Aanvulling met d.v.



- We weten wel dat $I_R = I_C = C\dfrac{dU_C}{dt}$
- En dat $\boldsymbol{U_{R} + U_{C} = U_{IN}}$
- differentiaalvergelijking:

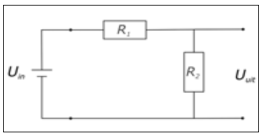
$$R \cdot C \cdot \frac{dU_C(t)}{dt} + U_C(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)$$

- Onze $U_C(t)$ is een oplossing!
- Afwijkingen van onze oplossing voldoen aan

$$R \cdot C \cdot \frac{dU_C}{dt} + U_C = 0$$

- Dat zijn juist de (uitdovende) inschakel-verschijnselen: $U_c(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$

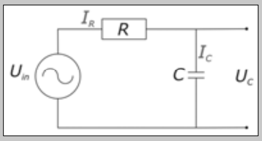
O, *simpele* spanningsdeler!



$$\boxed{I = \frac{U_{in}}{R_1 + R_2}} \quad \boxed{H = \frac{U_{uit}}{U_{in}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}}$$

$U_{in} = U_1 + U_2$ en $U(t) = I(t) \cdot R$

Ach, ellendige *RC*- kring!



Wel: $U_R + U_C = U_{IN}$

Ook : $U_{0,R} = Z_R \bullet I_o,\ U_{0,C} = Z_C \bullet I_o$

Zelfs : $U_R(t) = Z_R \bullet I_R(t)$

$\boxed{\textit{Niet:} \quad U_C(t) = Z_C \bullet I_C(t)}$

Die wet van Ohm voor *C* en *L*,
komt daar nog wat van?

Hfst.4: Complexe Getallen vanuit *complexe* overdracht H

Z en *H* krijgen een draai

en

de Complexe Getallen

verschijnen.

Netwerken en Overdracht (herhaling)

- Schakeling met een ingang (input) en een uitgang (output)
- De *overdracht H* van het netwerk (voorlopig!)

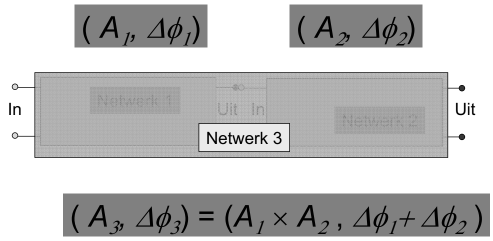
$$H = \frac{U_{uit}}{U_{in}}$$

Overdracht bij wisselspanningen?

$$H = \frac{U_{uit}}{U_{in}} = \frac{A_{uit} \cdot \sin(\omega t + \varphi_{uit})}{A_{in} \cdot \sin(\omega t + \varphi_{in})} = ???$$

- *Echte* overdracht is een *koppel* van:
  - Verhoudingsgetal van de amplituden (positief getal)
  - Verschil van de fasen (hoek)

Twee netwerken ná elkaar



Complexe getallen …….,

- Dat 'zijn' deze koppels!
- Je hebt zelf de *vermenigvuldiging* afgesproken.
- Weerstandsnetwerken: alle fasehoeken zijn 0.
  - *De gewone vermenigvuldiging!*
- De complexe vermenigvuldiging sluit bij de gewone aan en breidt hem uit.

!! OPGAVE !!

Het worden '*getallen*', als je het rekenen oefent!! *

Aan de notatie hangen we een kleine $_p$, om verwarring te voorkomen.

4.5 Vijf oefeningen in vermenigvulgen van complexe getallen. Poolnotatie!

a. $(2, \pi/2)_p \cdot (3, \pi/2)_p =$
c. $(1, \pi)_p \cdot (1, \pi)_p =$
b. $(2, -\pi/3)_p \cdot (0.5, \pi/3)_p =$
d. $(3.31, 0.76)_p \cdot (2.015, 2.34)_p =$
e. $(2, 4\pi/5)_p \cdot (2, 4\pi/5)_p \cdot (2, 4\pi/5)_p \cdot (2, 4\pi/5)_p \cdot (2, 4\pi/5)_p =$

4.6 In een van de voorbeelden van de vorige opgave staat eigenlijk $(-1) \cdot (-1) = 1$.

a. Welk voorbeeld?
b. Leg uit dat de nieuwe vermenigvuldiging klopt met het oude regeltje min keer min is plus en ook met de andere regels voor vermenigvuldigen met negatieve getallen.

4.7 Over de 2π heen!

In opgave 4.5e tellen de fasehoeken samen op tot 4π. Dat moet je niet zo laten.

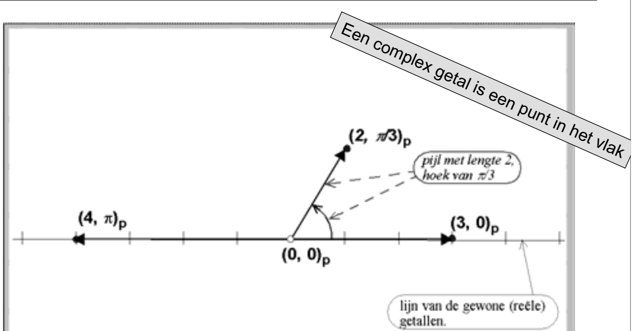
a. De uitkomst is toch een gewoon getal. Welk?
b. Formuleer een rekenregel over hoe om te gaan met grote fasehoeken.

4.8 Bedenk:

a. een of méér complexe getallen S die voldoen aan de vergelijking $S^5 = (1, \pi)_p = -1$.

- Eventueel: doe 4.8 ook met $S^2 = -1$.
- Commentaar: veel details worden door de ll. zelf 'beslist'.

Complexe Vlak

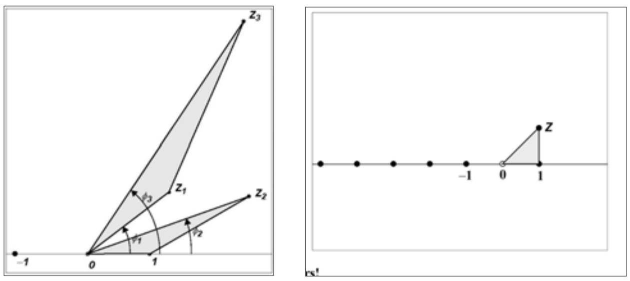


4.4 Markeer de volgende complexe getallen ook in het *complexe vlak*:

a. K: $(1, \pi/2)_p$, L: $(2, 3\pi/4)_p$, W: $(1, 1.5\pi)_p$,
V: $(2, -\pi/100)_p$, Y: $(1.4142, 3.926)_p$.
b. Teken de figuur die alle complexe getallen van de vorm $(\ldots, \pi/4)_p$ bevat.
c. Teken de figuur die alle complexe getallen van de vorm $(3, \ldots)_p$ bevat.

!! OPGAVE !!

Geometrisch vermenigvuldigen



- intieme vrienden:
  - Gelijkvormige driehoeken,Vermenigvuldigen, draai-strekking om O
- **Bereken z^{16}**

Absolute waarde, conjugeren (1)

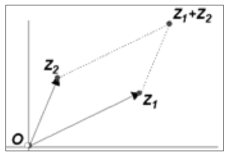
- Absolute waarde en argument van $z = (A, \phi)_p$
  - Notaties |z| en arg( ) [arg niet frequent]
  - Afstand tot 0 (Verwarrend tov voorkennis). (….. A)
  - Hoek vanaf positieve reele as. (……… ϕ)
- Conjugeren:
  - Spiegelen t.o.v. reële as.
  - Dus: $z = (A, \phi)_p$. , $\bar{z} = (A, -\phi)_p$
- Toon aan: (en diverse anderen ..)

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 \cdot z_2} \qquad |z_1| \cdot |z_2| = |z_1 \cdot z_2| \qquad |z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

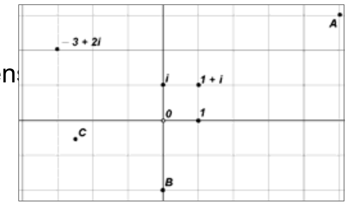
Complexe stromen

Optellen, het getal *i*, Cartesische notatie

- Geometrisch optellen:
  - vektoroptelling
  - sluit aan bij optellen sinusoiden



- $i = (1, \pi/2)_p$ is al bekend.
  - Goede helper bij:



- Cartesisch coordinaten:
  - En de representatie *a + bi*
- Etc. etc. etc.
  - Er zijn in de klas allerlei details en kleine hobbels.

Complexe stromen

Absolute waarde, conjugeren (2)

- Absolute waarde en argument van $z = (a + bi)$
  - Notaties |z| en arg( ) [arg niet frequent]
  - Afstand tot 0 (Verwarrend tov voorkennis)…… $\sqrt{a^2 + b^2}$
  - Hoek vanaf positieve reele as. (……… $\phi = \arctan(b/a)$)
- Conjugeren:
  - Spiegelen t.o.v. reele as.
  - Dus: z = a + bi . , $\bar{z}$ = a – bi
- Toon aan: (en diverse andere ..)

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 \cdot z_2} \qquad |z_1| \cdot |z_2| = |z_1 \cdot z_2| \qquad |z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

Complexe stromen

Cartesisch rekenen

!! OPGAVE !!

- (1 + 2i) · (3-4i) = 11 + 2i;
  (a +bi) · (c + di) = (ac –bd) + i (ad +bc)
- Een trucje voor delen:

$$\frac{3+5i}{4-i} = \frac{(3+5i)\cdot(4+i)}{(4-i)\cdot(4+i)} = \frac{7+17i}{17} = \frac{7}{17} + i$$

- Ontbind $a^2 + b^2$ in twee factoren!
- Gebruik $|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 \cdot z_2|$
  om te 'bewijzen': $(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$
  (dwz: werk het rechterlid *NIET* uit)
- (5 + 2i) · (5-2i) = 29 was toch priem?? Of toch niet? Of niet meer?

Complexe stromen

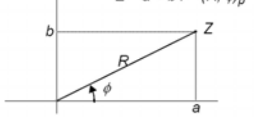
Intermezzo *Priemgetallen van Gauss*

- Gehele getallen van Gauss*:* *a* + *b*i; *a* en *b* gewone gehele getallen.
- 2 is in zulke getallen ontbindbaar, maar 3 blijft priem!
- Op de theedoek:
  - wit is priem.
  - Middenkruiskje: 0 , ±1±I
  - http://www.sannydezoete.nl/index.htm
  - In steenrood, lavendelblauw, goudgeel en wit

- Achtergrondbehang van deze slide:
  - Priemgetallen met |a| < 400, |b|<300
  - Kun je met een begrensde stapgrootte van 0 naar oneindig? (onopgelost probleem)

Cartesisch en polair; omrekenen

$Z = a + b\,i = (R, \phi)_p$



Hier zie je het complexe getal *Z*, zowel in polaire als in Cartesische notatie. Het komt er op neer in $Z = a + b\,i = (R, \phi)_p$ de verbanden tussen *R* en ϕ enerzijds en *a* en *b* anderzijds te kennen.

4.34 Ga na dat de volgende omzettingsregelsvan Cartesische naar polaire notatie gelden:

a. $|Z| = R = \sqrt{a^2 + b^2}$

b. $\tan(\phi) = \frac{b}{a}$

4.35 Druk zelf *a* en *b* in *R* en ϕ uit:

a. $a =$ ....

b. $b =$ ....

4.36 Vul nu zelf aan:

a. Het Reële deel van $(R, \phi)_p$ is ....

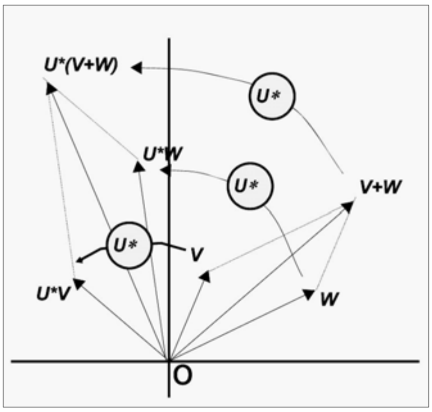
b. Het Imaginaire deel van $(R, \phi)_p$ is ....

c. Het argument van $a + bi$ is ....

d. De absolute waarde van $a + bi$ is ....

Complexe stromen

De wetten van de Algebra gaan dóór



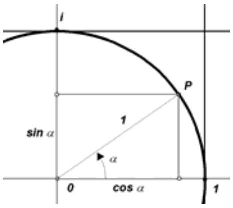
Complexgewijs oplossen of niet (1)

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$
$$(a+bi)^2 - 2(a+bi) + 2 = a^2 + 2abi - b^2 - 2a - 2bi + 2 = 0$$
$$2abi - 2bi = 0$$
$$a = 1 \vee b =$$

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$
$$(z-1)^2 + 1 = 0$$
$$(z-1)^2 = -1$$
$$z - 1 = i \vee z - 1 = -i$$
$$z = 1 + i \vee z = 1 - i$$

De kroonjuwelen van het complexe vlak (1)

$$(1,\alpha)_p = cos(\alpha) + i\,sin(\alpha)$$
$$(1,\alpha_1)_p \cdot (1,\alpha_2)_p = (1,\alpha_1 + \alpha_2)_p$$



(a +bi) · (c + di) =
(ac –bd) + i (ad +bc)

$$\boxed{(cos(\alpha_1) + i\,sin(\alpha_1)) \cdot (cos(\alpha_2) + i\,sin(\alpha_2))} = cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\,sin(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\begin{cases} cos(\alpha_1) \cdot cos(\alpha_2) - sin(\alpha_1) \cdot sin(\alpha_2) = cos(\alpha_1 + \alpha_2) \\ sin(\alpha_1) \cdot cos(\alpha_2) + cos(\alpha_1) sin(\alpha_2) = sin(\alpha_1 + \alpha_2) \end{cases}$$

$$(cos(\alpha) + i\,sin(\alpha))^n = cos(n\alpha) + i\,sin(n\alpha)$$

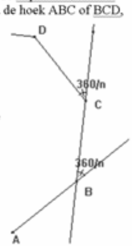
De kroonjuwelen van het complexe vlak (2)

- Eenheidswortels: wortels van $z^n = 1$
  - α = …… in Euler – De Moivre
  - Nog meer!
  - Toon aan: ze zijn samen 0.
- Diverse methoden bij II.
  - (Jeroen, zoz) Ze vormen een regelmatige ster. Tel de vectoren op: je krijgt een regelmatige veelhoek, die sluit.
  - Bij even *n* staan er steeds twee tegenover elkaar.
  - De sin-componenten vallen twee aan twee weg. De cos componenten ook. { ????????? Niet bij oneven!}
  - Werken met som van meetkundige rij
  - n-afhankelijke methoden (bijvoorbeeld in kwartetten samen nemen.

Eenheidswortels kopstaart *

Bij oneven n: de oplossingen zijn: $(1, 2\pi/n)_p$, $(1, 4\pi/n)_p$ … $(1, (n-1)2\pi/n)_p$, $(1, n2\pi/n)_p$. Een bewijs op dezelfde manier als bij een even getal als n heb ik niet gevonden. Vandaar dat ik het op een andere manier heb geprobeerd, dit lukte wel en dit heeft ook een bewijs opgeleverd dat bij elke gehele n opgaat. De vergelijking $z^n = 1$ heeft n oplossingen. Deze hebben een regelmatige ligging op de éénheidscirkel. Elke oplossing maakt daarom een hoek van 2π/n met zijn buurman (of van 360/n graden). Deze oplossingen kunnen we optellen met behulp van de kop-staartmethode, zoals in de figuur hier rechts is weergegeven. Elke lijnstukje (AB,BC,CD enz) stelt een oplossing voor. Zoals te zien maakt elke oplossing een hoek van 360/n met zijn buurman, de oplossingen zijn immers met de kop-staartmethode naast elkaar gelegd. De hoek binnenin het figuur dat nu ontstaat, dus bijvoorbeeld de hoek ABC of BCD, bedraagt nu 180 – 360/n graden. Als er geen gesloten figuur ontstaat, dan trek ik simpelweg het eerste lijnstukje en het laatste lijnstukje zo ver door, dat er toch een gesloten figuur ontstaat. De hoek tussen het eerste en laatste lijnstukje zal ook 360/n graden zijn, omdat dit ook zo is in het plaatje van de eenheidscirkel. Nu weten we dus dat de hoeken van de figuur gelijk zijn. Ook weten we dat de lijnstukken gelijk zijn, op twee naast elkaar liggende lijnstukken na (dwz daar weten we dat niet zeker van). Deze twee gegevens combineren geeft dat ook deze twee lijnstukken wel degelijk gelijk zijn aan de andere lijnstukken en dat de figuur een regelmatige veelhoek is.

Nu is een andere eigenschap van een regelmatige veelhoek ook te bewijzen: namelijk dat de som van de binnenhoeken een veelvoud van 180 graden is. Omdat er n oplossingen waren, zijn er in dit figuur ook het aantal n van deze binnenhoeken. De som van deze binnenhoeken is n(180 – 360/n) =



Gevalsafhankelijk (niet goed …) *

a. $\zeta_k = (1, (k \cdot 2\pi)/n)_p$.
De meetkundige rij is: $(1, 0)_p$, $(1, 2\pi/n)_p$, $(1, 4\pi/n)_p$, $(1, 6\pi/n)_p$, $(1, 8\pi/n)_p$ enzovoorts. Iedere volgende term ontstaat door de voorgaande met $(1, 2\pi/n)_p$ te vermenigvuldigen. (1, 2π/n) is dus de reden van deze rij.

b. *Vanuit rekenen:*
Als alle punten van de nde eenheidswortels bij elkaar optelt, krijg je als uitkomst 0. Het optellen van de nde eenheidswortels gaat volgens het optellen van vectoren. $\zeta_k = (1, (k \cdot 2\pi)/n)_p$. De meetkundige rij was: $(1, 0)_p$, $(1, 2\pi/n)_p$, $(1, 4\pi/n)_p$, $(1, 6\pi/n)_p$, $(1, 8\pi/n)_p$, $(1, 10\pi/n)_p$, $(1, 12\pi/n)_p$, $(1, 14\pi/n)_p$, $(1, 16\pi/n)_p$, enzovoorts. Voor het aantonen dat de nde vectoren samen nul zijn is het alleen nodig naar de hoeken te kijken. Het optellen van twee hoeken geeft als uitkomst het gemiddelde van de twee hoeken. Als we acht termen van de meetkundige rij nemen, moeten dus term 1 en 2, term 3 en 4, term 5 en 6 en term 7 en 8 opgeteld worden. Dit heeft als uitkomsten:
1 + 2: π/n, 3 + 4: 5π/n, 5 + 6: 9π/n en 7 + 8: 13π/n. Van deze vier nieuwe hoeken nemen we opnieuw de gemiddelden: a + b: 3π/n, c + d: 11π/n. Wanneer we van deze hoeken opnieuw het gemiddelde nemen, krijgen we 7π/n, een veelvoud van π dus. Dit is 180 graden, de vectoren heffen elkaar dus op.
Dit geldt altijd, ongeacht hoe lang de meetkundige rij is. Dit komt omdat de laatste twee vectoren altijd een hoek van 180 graden met elkaar maken en dus elkaar opheffen.

Wortels, Meetkundige rij en e-macht

6) 4.48a) $\alpha = \frac{k \cdot 2\pi}{n}$

$\cos(k \cdot 2\pi) + i \sin(k \cdot 2\pi) = \left(\cos\frac{k2\pi}{n} + i \sin\frac{k2\pi}{n}\right)^n$

b) $S_k = \sqrt[n]{\cos(k \cdot 2\pi) + i \sin(k \cdot 2\pi)} = \sqrt[n]{e^{i \cdot k \cdot 2\pi}}$

$= \cos\frac{k2\pi}{n} + i \sin\frac{k2\pi}{n} = e^{i\frac{k2\pi}{n}} = e^{i \cdot 2\pi \cdot \frac{k}{n}}$

c) $0 \leq k < n$ of $0 < k \leq n$

4.49a) -1 en 1

$e^{i \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4}} = i$ en $e^{i \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{4}} = -1$ en $e^{i \cdot 2\pi \cdot \frac{3}{4}} = -i$ en $e^{i \cdot 2\pi \cdot 1} = 1$

Formule voor de som:

$(1-(e^{2\pi i/n})^n)/(1-e^{2\pi i/n}) = (1-e^{2\pi i/})/(1-e^{2\pi i/n}) = 0$
(want $e^{2\pi i} = 1$)

De som van alle eenheidswortels bij één n is dus, onafhankelijk van n, 0.

De *notatie(?)* $e^{i\omega t}$

$Q(t) \begin{cases} x(t) = \cos(\omega t) \\ y(t) = \sin(\omega t) \end{cases}$

$P(t) = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$

Hetzelfde? Met *P* kun je ook rekenen!

$P(t_1) \cdot P(t_2) = P(t_1 + t_2)$

$P'(t) = i\omega \cdot P(t)$

Dat ziet er bekend uit: $F(t) = e^{at}$

Je kunt rekenen alsof: $P(t) = e^{i\omega t}$

Protest ! !
Hoe zit dat dan met die *machten* van e ?

Afscheid van de poolnotatie

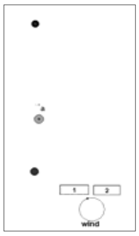
$$\cancel{(R, \omega t)_p} = R \cdot (\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) = R \cdot e^{i\omega t}$$

- Maar het bleef nog lang onrustig!
- [In laatste hoofdstuk ook met α ipv ωt]
- Vervolg: Rekenen (helpt dat begrijpen?) met deze notatie:

In een RLC - schakeling

Hfst 5 en 7: Schakelingen en $e^{i\omega t}$

Op en neer van een Draaibeweging:



Wisselstroom 'is' Reële deel van Complexe Stroom:

$U(t) = U_0 \cos \omega t$

$U^*(t) = U_0 (\cos \omega t + i \sin \omega t)$

$U^*(t) = U_0 \, e^{i \omega t}$

Complexe Impedantie van Condensator

$I_C = C \cdot \frac{dU_C}{dt}$	Bekend!
$I^*_C = C \cdot \frac{dU^*_C}{dt}$	Want: beide componenten …
$= C \cdot \frac{d(U_0 e^{i\omega t})}{dt}$	Idem!
$= (i\omega) \cdot C \cdot U_0 e^{i\omega t}$	Kettingregel
$= (i\omega C) \cdot U^*_C$	De Wetten van de Algebra
$U^*_C = \frac{1}{i\omega C} \cdot I^*_C = Z^* \cdot I^*_C$	De COMPLEXE WET VAN OHM !!

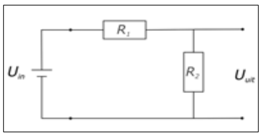
Complexe impedanties bij R, C, L

$Z_R = R$ $\quad Z_C = \frac{1}{i\omega C}$ $\quad Z_L = i\omega L$

Voor alledrie geldt
De Complexe Wet van Ohm

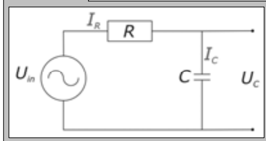
- Je kunt rekenen als met weerstanden.
  - De complexe vermenigvuldiging doet het fasewerk
  - De complexe optelling doet het optellen van de uit fase lopende sinusoidale spanningen en stromen
- Onzichtbaar via de *complexe overdracht*

O, *simpele* spanningsdeler!



$$H = \frac{U_{uit}}{U_{in}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

En net zo simpele *RC*-kring!



$$H(\omega) = \frac{U_C}{U_{in}} = \frac{\frac{1}{i\omega C}}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{1}{1 + i\omega RC}$$

| Overdracht | en fase RC-kring

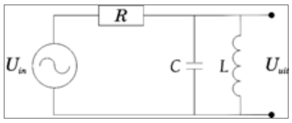
$$\left|H(\omega)\right| == \left|\frac{1}{1+i\omega RC}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$$

$$\Delta\omega = \arg\left(H(\omega)\right) == \arg\left(\frac{1}{1+i\omega RC}\right) = \arg\left(\frac{1-i\omega RC}{1+(\omega RC)^2}\right) = \arctan(-\omega RC)$$

De harde vraag over $e^{i\omega t}$ komt bij de schakelingen!

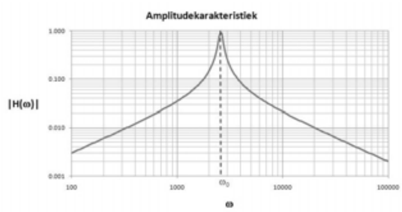
- Ja, maar die elektronentreintjes in die draad, dat snap ik. Hoe zit dat dan met die complexe stromen die draaien in die draad?
- Antwoord …….

Resonantie; alleen resultaten



$$H(\omega) == \frac{1}{1 + i\frac{R(\omega^2 LC - 1)}{\omega L}}$$

Amplitudo karakteristiek



Resonantie-frequentie

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

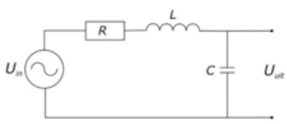
(*kristalontvanger*!)

7.4 Het laatste netwerk

*

In onderstaande figuur zie je het laatste netwerk dat we in deze module bekijken. Het is de bedoeling dat je het zelfstandig doorrekent aan de hand van de vragen die gesteld worden.

!! OPGAVE !!



(fig.7.6)

7.6 Het laatste netwerk.

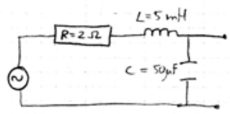
a. Bereken de complexe overdracht van dit netwerk.
b. Bereken de amplitude- en faseoverdracht.
c. Maak een grafiek van de amplitudeoverdracht. Gebruik hierbij voor de L en C dezelfde waarden als in het vorige RCL-netwerk, en neem $R = 2\Omega$. Je mag een 'gewone grafiek maken maar ook een dubbellogaritmische. Gebruik bijvoorbeeld Excel om de grafieken te maken.
d. Maak een grafiek van de faseoverdracht, liefst een enkellogaritmische.
e. Is er bij dit netwerk ook een 'bijzondere' resonantiefrequentie? Zo ja, welke is dat dan?

Toelichting: In het netwerk van figuur 7.2 waren de spoel en de condensator parallel geschakeld. De spanning over beide componenten was daarom gelijk. Het bleek dat bij resonantie de stroomsterkte door de condensator en de spoel gelijk, maar tegengesteld gericht was. In deze schakeling staan condensator en spoel in serie geschakeld, zodat de stroomsterkte door beide componenten gelijk is. Zoek naar een frequentie waarbij de spanning over de condensator gelijk is aan die over de spoel, maar tegengesteld gericht.

Richard (2007)

Natuurkunde deel

Richard Both, V6a



- Bereken de complexe overdracht

$H(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1+Z_2}$ met $Z_1 = Z_R + Z_L = R + i\omega L$

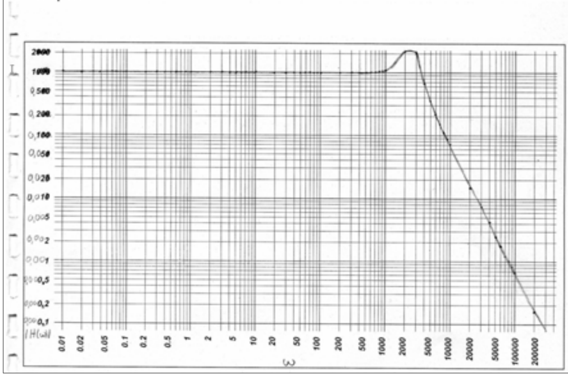
en $Z_2 = Z_C = \frac{1}{i\omega C}$

$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{i\omega C}}{(R+i\omega L)+\frac{1}{i\omega C}} = \boxed{\frac{1}{i\omega C(R+i\omega L)+\frac{i\omega C}{i\omega C}} = \frac{1}{i\omega CR - \omega^2 CL + 1}} = \frac{1}{i\omega \cdot 50\cdot 10^{-6}\cdot 2 - \omega^2 \cdot 50\cdot 10^{-6}\cdot 5\cdot 10^{-3} + 1}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{-2{,}5\cdot 10^{-7}\omega^2 + 1\cdot 10^{-4} i\omega + 1} \left(= \frac{1}{-2{,}5\cdot 10^{-7}\omega^2 + 1 + 1\cdot 10^{-4}\omega i} \right)$$

Saskia (2008); |H| tegen ω

c. De grafiek komt, vreemd genoeg, boven de 1, maar ik kon niet ontdekken wat er niet klopte.



$H(\omega)$, $|H(\omega)|$ en een veel gemaakte fout

!! OPGAVE !!

$$H(\omega)=\frac{\frac{1}{i\omega C}}{R+i\omega L+\frac{1}{i\omega C}}=\frac{1}{Ri\omega C-\omega^2 LC+1}$$

$$|H(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+(R\omega C)^2+\left(\omega^2 LC\right)^2}}$$

Of

$$|H(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1-(R\omega C)^2+\left(\omega^2 LC\right)^2}}$$

moet zijn

$$|H(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\omega^2 LC\right)\right)^2+(\omega RC)^2}}$$

Toegift: *Meetkunde en Complexe getallen*

- Hfst 6 van CS; maar onder tijdsdruk
- In Wis D-(2013):
  - Analytische Meetkunde en Complexe getallen apart.
  - Gemiste kans?
- Veel literatuur beschikbaar:
  - Meetkundig; veel hyperbolische meetkunde (Schwerdtfeger, Hahn, Pedoe)
  - Functietheorie (Ahlfors, Tristan Needham)
- Nu:
  - drie voorbeelden
  - De FTA tot slot

A: Loodrechte stand, Gelijkvormigheid

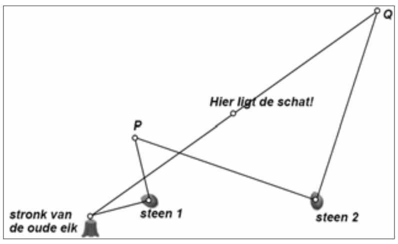
!! OPGAVE !!

- Gegeven twee punten z en d. Bepaal w zo, dat $\angle(zdw)$ klok-mee 90 graden is. ('*druk w in z en d uit*')
- Gebruik i!
- $(w - d) = -i\,(z - d)$
  $w = d + (-i)\,(z - d)$

Teleurstellings Eiland *

!! OPGAVE !!

De schat is begraven op TELEURSTELLINGS EILAND . Ga op de stronk van de oude eik staan. Loop naar de eerste steen, sla loodrecht linksaf en loop nogmaals dezelfde afstand. Van dit punt loop je naar de tweede steen, je slaat weer loodrecht linksaf en je loopt de laatste afstand nog eens. Graaf precies midden tussen waar je nu bent en de stronk.

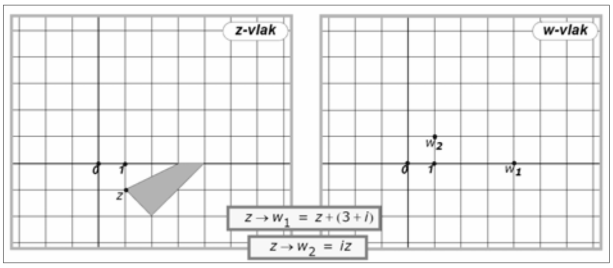


Bij aankomst:
Wel stenen, geen eik!

Kies
steen1 : -1
steen2 : 1
De eik : z.

Vind de schat toch!

Afbeeldingen, Gelijkvormigheid



- *Algemeen*:
- Elke afbeelding $z \to w$ met
  $w = az + b$
  is een gelijkvormigheids-afbeelding.

Bewijs 1 en 2

- Neem aan $a \neq 1$.
- (1) Herschrijf

  $$w = a\,z + b$$

  in dekpuntvorm

  $$w = d + a\,(z - d)\,, \quad a = (F, \phi)_p$$

- (2) Bewijs en interpreteer als *zhz*: $\dfrac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3} = \dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$
- Voorbeeld: *Teleurstellings Eiland*

  $$w = d + (-i)\,(z - d)$$

B: De Limaçon van Pascal

!! OPGAVE !!

*

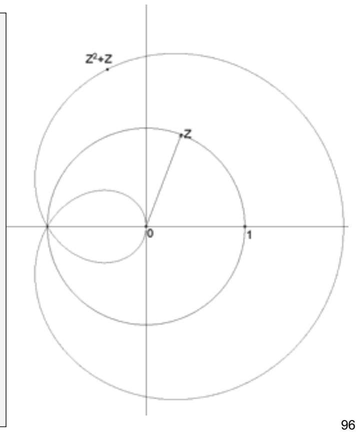
De baan van $z^2 + z$ als z over de cirkel $|z| = 1$ loopt.

Construeer z^2; test of $z^2 + z$ correct is getekend.

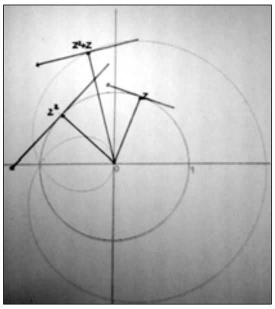
Teken construeer een snelheidsvector voor z.

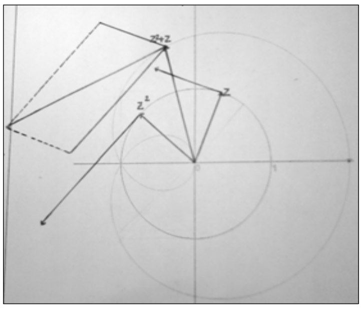
Construeer de bijhorende snelheidsvectoren van z^2 en $z^2 + z$.

Construeer de *raaklijn* aan de limacon in $z^2 + z$.



De verbeterde Limaçon van Marise



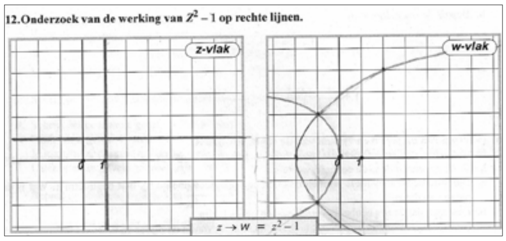


- Geruststellend dat ik de snelheidsvector inderdaad aan de baan van Z^2 + Z zag raken. […] Het was even puzzelen, maar ik vergeet nooit meer wat de Limacon van Blaise Pascal is.

Kwadrateren? Parabool! ?

!! OPGAVE !!

Toon aan dat de lijn van de punten $t + i$ (t reëel) door $z \to z^2$ op een parabool wordt afgebeeld.



- (Onderzoek of het ook voor andere lijnen geldt.)

Te korte bocht ….

$z^2 = (t+i)^2$

W = $t^2 + 2ti - 2$

Deze formule geeft een parabolische functie weer,

met een minimum als top.

$z^2 \Rightarrow (t+i)^2 = t^2 + 2ti - 1$

parabool

$Re(z) = 1 + ti \qquad z^2 \Rightarrow (1+ti)^2 = 1 + 2ti - t^2$

parabool

Echt 'complex' werken bij algemeen geval

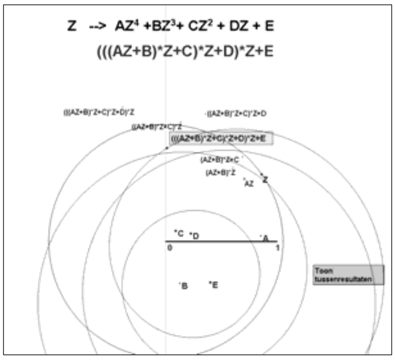
- Tip:
  - Een andere lijn kun je met een geschikte vermenigvuldigfactor *a* horizontaal krijgen.
- Tessa:
  - Stap één:
    elke horizontale lijn levert een parabool
  - Stap twee:
    draai met a, kwadrateer, draai terug met a^2.
  - Als verhaal, maar ook als formule:

$$z \rightarrow w = (z^*a)^2 / a^2 = z^2$$

Demo tot slot: de HSA

Hoofdstelling van de algebra

Elke veelterm-vergelijking heeft in het complexe vlak een oplossing.



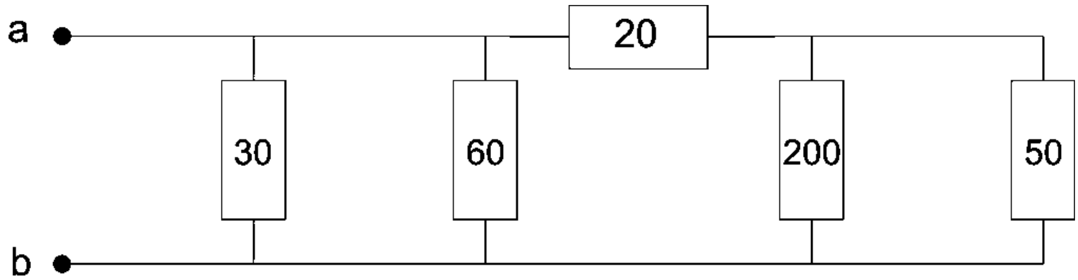
einde

!! OPGAVE !!

Vervangingsweerstand *

A:

Bereken de vervangingsweerstand

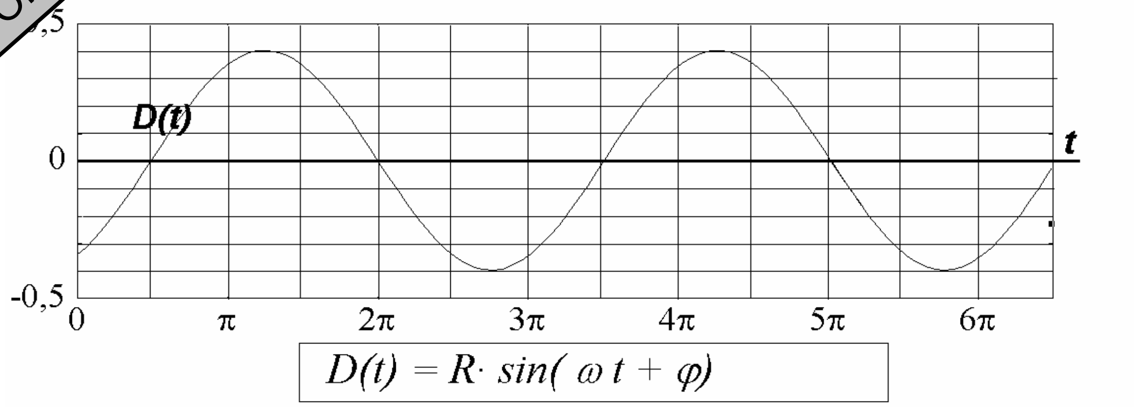


B:

Bedenk een netwerk dat zich zo niet laat reduceren ….

!! OPGAVE !!

Opgave (uit de thuistoets) *



- Bepaal *R*, ω en ϕ
- Vergelijk daarna 2 oplossingen (z.o.z)

Twee oplossingen

Rosalinde

1. T = 3π
   R = 0,4
   $\varphi = -{}^{1}/_{3}\,\pi$
   $\omega = {}^{2}/_{3}$

Jeroen

$$T = 5\pi - 2\pi = 3\pi$$

$$\frac{2\pi}{\omega} = T, dus$$

$$\omega = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$$

$$R = 0,4 - 0 = 0.4$$

$$\phi = -\frac{1}{2}\pi$$

$$D(t) = R \cdot (\omega(t - \phi))$$

$$D(t) = 0.4\sin(\frac{2}{3}(t - 0.5\pi))$$

Jeroen

2. Sinussignalen samenstellen

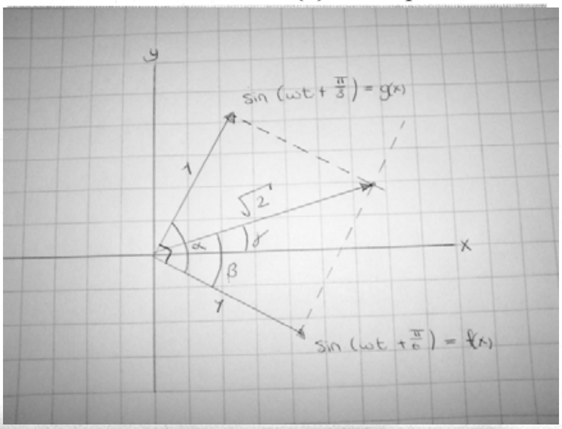
De functie h(x) wordt beschreven door formules f(x) en g(x) op te tellen.

$$f(x) = \sin(\omega t - \frac{\pi}{6})$$

$$g(x) = \sin(\omega t + \frac{\pi}{3})$$

$$h(x) = \sin(\omega t - \frac{\pi}{6}) + \sin(\omega t + \frac{\pi}{3})$$

Zowel f(x), g(x) als h(x) hebben een fasehoek. De fasehoek van h(x) kan bepaald worden aan de hand van die van f(x) en g(x).



Jeroen (vervolg)

$$\phi_{f(x)} = -\frac{\pi}{6}$$

$$\phi_{g(x)} = \frac{\pi}{3}$$

$$\angle\alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

$$\angle\beta = \arcsin(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4}$$

$$\angle\gamma = \phi_{h(x)} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{12} - \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$$

De pijl van h(x) heeft ook een lengte, $R_{h(x)}$. Omdat f(x) en g(x) samen een rechte hoek maken, kan deze lengte worden berekend met de stelling van Pythagoras.

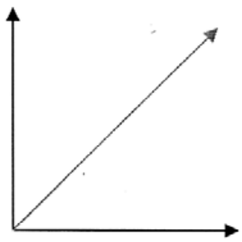
$$R_{h(x)} = \sqrt{R_{f(x)}{}^2 + R_{g(x)}{}^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Nu kan een formule worden opgesteld voor h(x).

$$h(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{2}\cdot\sin(\omega t + \frac{\pi}{12})$$

Rosalinde

2. Bij het optellen van twee sinusvormige signalen met dezelfde hoeksnelheid, blijft de hoeksnelheid gelijk en veranderd (meestal) de fase en de amplitude. Bij de een is de fase – π/6 en bij de ander π/3. Als je dan gaat kijken naar het verschil, is dat dus π /2 en dat is weer 90°. Dit betekent dat er een hoek van 90°



zit tussen de twee sinussoides. Als je wilt optellen, moet je een parallellogram maken van de twee sinusoides. Een parallellogram met met een rechte hoek en gelijke zijdes (de amplitude is bij beide sinusoides 1) is een vierkant. Bij het berekenen van de diagonaal (de optelling van de sinusoides) kunnen we voor de nieuwe straal dus de stelling van pythagoras gebruiken. Omdat beide orginele stalen 1 zijn, krijgen we de som $r=\sqrt{(1^2 + 1^2)} = \sqrt{2}$. De fase kan je berekenen met de tan(x) = 1 (de oude stralen waren 1, 1/1=1). De x = π/12 (45°). Met fase π/12 en apmlitude √2, krijg je hetvolgende voor de nieuwe sinusoide: √2 sin (ωt + π/12)

Verbetering: De fase van C ligt precies tussen die van A en B in. Dus ten opzichte van A heeft C een fase van π/4. Omdat de fase van A –π/6 is, moet je dat optellen bij dat van C. π/4- π/6 = 3π/12-2π/12 = π/12

!! OPGAVE !!

Het worden ‘*getallen*’, als je het rekenen oefent!! *

Aan de notatie hangen we een kleine $_p$, om verwarring te voorkomen.

4.5 Vijf oefeningen in vermenigvuldgen van complexe getallen. Poolnotatie!

a. $(2, \pi/2)_p \cdot (3, \pi/2)_p =$ **c.** $(1, \pi)_p \cdot (1, \pi)_p =$

b. $(2, -\pi/3)_p \cdot (0.5, \pi/3)_p =$ **d.** $(3.31, 0.76)_p \cdot (2.015, 2.34)_p =$

e. $(2, 4\pi/5)_p \cdot (2, 4\pi/5)_p \cdot (2, 4\pi/5)_p \cdot (2, 4\pi/5)_p \cdot (2, 4\pi/5)_p =$

4.6 In een van de voorbeelden van de vorige opgave staat eigenlijk $(-1) \cdot (-1) = 1$.

a. Welk voorbeeld?

b. Leg uit dat de nieuwe vermenigvuldiging klopt met het oude regeltje min keer min is plus en ook met de andere regels voor vermenigvuldigen met negatieve getallen.

4.7 Over de 2π heen!

In opgave 4.5e tellen de fasehoeken samen op tot 4π. Dat moet je niet zo laten.

a. De uitkomst is toch een gewoon getal. Welk?

b. Formuleer een rekenregel over hoe om te gaan met grote fasehoeken.

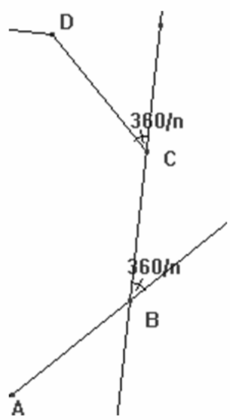
4.8 Bedenk:

a. een of méér complexe getallen S die voldoen aan de vergelijking $S^5 = (1, \pi)_p = -1$.

- Eventueel: doe 4.8 ook met $S^2 = -1$.
- Commentaar: veel details worden door de ll. zelf ‘beslist’.

Eenheidswortels kopstaart *

Bij oneven n: de oplossingen zijn: $(1, 2\pi/n)_p$, $(1, 4\pi/n)_p$ … $(1, (n-1)2\pi/n)_p$, $(1, n2\pi/n)_p$. Een bewijs op dezelfde manier als bij een even getal als n heb ik niet gevonden. Vandaar dat ik het op een andere manier heb geprobeerd, dit lukte wel en dit heeft ook een bewijs opgeleverd dat bij elke gehele n opgaat. De vergelijking $z^n = 1$ heeft n oplossingen. Deze hebben een regelmatige ligging op de éénheidscirkel. Elke oplossing maakt daarom een hoek van $2\pi/n$ met zijn buurman (of van 360/n graden). Deze oplossingen kunnen we optellen met behulp van de kop-staartmethode, zoals in de figuur hier rechts is weergegeven. Elke lijnstukje (AB,BC,CD enz) stelt een oplossing voor. Zoals te zien maakt elke oplossing een hoek van 360/n met zijn buurman, de oplossingen zijn immers met de kop-staartmethode naast elkaar gelegd. De hoek binnenin het figuur dat nu ontstaat, dus bijvoorbeeld de hoek ABC of BCD, bedraagt nu 180 – 360/n graden. Als er geen gesloten figuur ontstaat, dan trek ik simpelweg het eerste lijnstukje en het laatste lijnstukje zo ver door, dat er toch een gesloten figuur ontstaat. De hoek tussen het eerste en laatste lijnstukje zal ook 360/n graden zijn, omdat dit ook zo is in het plaatje van de eenheidscirkel. Nu weten we dus dat de hoeken van de figuur gelijk zijn. Ook weten we dat de lijnstukken gelijk zijn, op twee naast elkaar liggende lijnstukken na (dwz daar weten we dat niet zeker van). Deze twee gegevens combineren geeft dat ook deze twee lijnstukken wel degelijk gelijk zijn aan de andere lijnstukken en dat de figuur een regelmatige veelhoek is.



Nu is een andere eigenschap van een regelmatige veelhoek ook te bewijzen: namelijk dat de som van de binnenhoeken een veelvoud van 180 graden is. Omdat er n oplossingen waren, zijn er in dit figuur ook het aantal n van deze binnenhoeken. De som van deze binnenhoeken is n(180 – 360/n) =

Gevalsafhankelijk (niet goed …) *

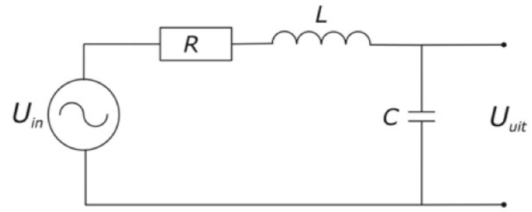
a. $\zeta_k = (1, (k \cdot 2\pi)/n)_p$.
De meetkundige rij is: $(1, 0)_p$, $(1, 2\pi/n)_p$, $(1, 4\pi/n)_p$, $(1, 6\pi/n)_p$, $(1, 8\pi/n)_p$ enzovoorts. Iedere volgende term ontstaat door de voorgaande met $(1, 2\pi/n)_p$ te vermenigvuldigen. $(1, 2\pi/n)$ is dus de reden van deze rij.

b. *Vanuit rekenen:*
Als alle punten van de nde eenheidswortels bij elkaar optelt, krijg je als uitkomst 0. Het optellen van de nde eenheidswortels gaat volgens het optellen van vectoren. $\zeta_k = (1, (k \cdot 2\pi)/n)_p$. De meetkundige rij was: $(1, 0)_p$, $(1, 2\pi/n)_p$, $(1, 4\pi/n)_p$, $(1, 6\pi/n)_p$, $(1, 8\pi/n)_p$, $(1, 10\pi/n)_p$, $(1, 12\pi/n)_p$, $(1, 14\pi/n)_p$, $(1, 16\pi/n)_p$, enzovoorts. Voor het aantonen dat de nde vectoren samen nul zijn is het alleen nodig naar de hoeken te kijken. Het optellen van twee hoeken geeft als uitkomst het gemiddelde van de twee hoeken. Als we acht termen van de meetkundige rij nemen, moeten dus term 1 en 2, term 3 en 4, term 5 en 6 en term 7 en 8 opgeteld worden. Dit heeft als uitkomsten:
1 + 2: π/n, 3 + 4: $5\pi/n$, 5 + 6: $9\pi/n$ en 7 + 8: $13\pi/n$. Van deze vier nieuwe hoeken nemen we opnieuw de gemiddelden: a + b: $3\pi/n$, c + d: $11\pi/n$.
Wanneer we van deze hoeken opnieuw het gemiddelde nemen, krijgen we $7\pi/n$, een veelvoud van π dus. Dit is 180 graden, de vectoren heffen elkaar dus op.
Dit geldt altijd, ongeacht hoe lang de meetkundige rij is. Dit komt omdat de laatste twee vectoren altijd een hoek van 180 graden met elkaar maken en dus elkaar opheffen.

7.4 Het laatste netwerk *

In onderstaande figuur zie je het laatste netwerk dat we in deze module bekijken. Het is de bedoeling dat je het zelfstandig doorrekent aan de hand van de vragen die gesteld worden.

!! OPGAVE !!



(fig.7.6)

7.6 Het laatste netwerk.

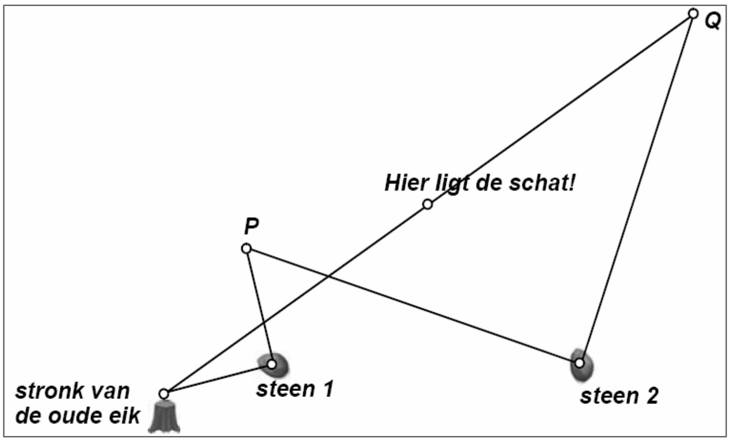
a. Bereken de complexe overdracht van dit netwerk.
b. Bereken de amplitude- en faseoverdracht.
c. Maak een grafiek van de amplitudeoverdracht. Gebruik hierbij voor de L en C dezelfde waarden als in het vorige RCL-netwerk, en neem $R = 2\Omega$. Je mag een ‘gewone grafiek maken maar ook een dubbellogaritmische. Gebruik bijvoorbeeld Excel om de grafieken te maken.
d. Maak een grafiek van de faseoverdracht, liefst een enkellogaritmische.
e. Is er bij dit netwerk ook een ‘bijzondere’ resonantiefrequentie? Zo ja, welke is dat dan?

Toelichting: In het netwerk van figuur 7.2 waren de spoel en de condensator parallel geschakeld. De spanning over beide componenten was daarom gelijk. Het bleek dat bij resonantie de stroomsterkte door de condensator en de spoel gelijk, maar tegengesteld gericht was. In deze schakeling staan condensator en spoel in serie geschakeld, zodat de stroomsterkte door beide componenten gelijk is. Zoek naar een frequentie waarbij de spanning over de condensator gelijk is aan die over de spoel, maar tegengesteld gericht.

!! OPGAVE !!

Teleurstellings Eiland *

De schat is begraven op TELEURSTELLINGS EILAND .
Ga op de stronk van de oude eik staan.
Loop naar de eerste steen, sla loodrecht linksaf en loop nogmaals dezelfde afstand.
Van dit punt loop je naar de tweede steen, je slaat weer loodrecht linksaf en je loopt de laatste afstand nog eens.
Graaf precies midden tussen waar je nu bent en de stronk.



Bij aankomst:
Wel stenen, geen eik!

Kies
steen1 : -1
steen2 : 1
De eik : *z*.

Vind de schat toch!

!! OPGAVE !!

B: De Limaçon van Pascal *

De baan van $z^2 + z$ als z over de cirkel $|z| = 1$ loopt.

Construeer z^2; test of $z^2 + z$ correct is getekend.

Teken construeer een snelheidsvector voor z.

Construeer de bijhorende snelheidsvectoren van z^2 en $z^2 + z$.

Construeer de *raaklijn* aan de limacon in $z^2 + z$.