Masterclass VWO-leerlingen juni 2008

Snelle glijbanen

Emiel van Elderen en Joost de Groot
NWD 2009

Faculteit EWI, Toegepaste Wiskunde

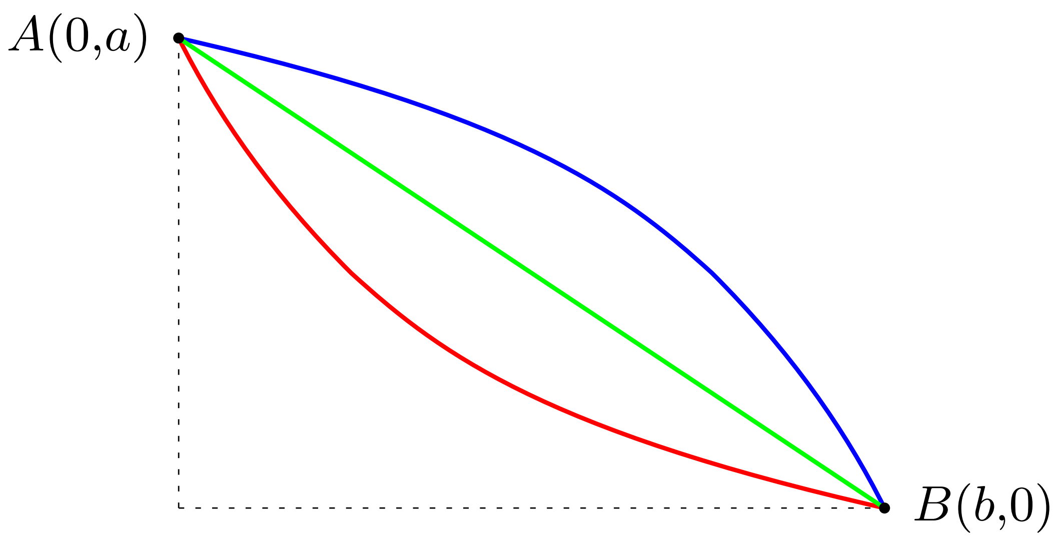
Technische Universiteit Delft

Probleemstelling

Gegeven: een punt $A(0,a)$ en een punt $B(b,0)$ met $a \geq 0$.
Gezocht: De vorm van de baan waarop een massa

- vanuit stilstand
- slechts onder invloed van de zwaartekracht
- wrijvingslooos

in minimale tijd van A naar B glijdt.



Hoe? Met Wiskunde!

Met wiskunde kun je tot het beste ontwerp komen! Dit is een leuk, doch lastig karweitje. Het is lastig doordat je nogal wat kennis nodig hebt:

- je moet weten hoe je banen wiskundig kunt beschrijven,
- je hebt een beetje natuurkunde nodig (bijvoorbeeld de wet van behoud van energie),
- je moet weten wat de afgeleide van een functie is (niet alleen de rekenregels),
- je moet weten wat Riemannsommen en integralen zijn.

Wij hebben de deelnemers in twee dagen laten zien hoe dit allemaal moet. Nu in drie kwartier. . .

Inhoud

We zullen laten zien

- Hoe de reistijd bij een gegeven baan berekend kan worden
- Hoe de snelste baan benaderd kan worden
- Hoe je aan een exacte beschrijving van de baan komt

Hierbij kom je diverse onderdelen van de wiskunde tegen:

- Wiskundig modelleren
- Numerieke wiskunde
- Differentiaalvergelijkingen

Beschrijving van banen

Vraag 1: Hoe kan een baan van A naar B wiskundig beschreven worden?

Je kunt zo'n baan voorstellen als een kromme in het platte vlak. Die kun je op diverse manieren vastleggen.

Manier 1: De wiskunde van het VWO levert een manier: doe alsof de kromme de grafiek is van een functie $y = f(x)$.

Dit lukt niet met alle krommen. Er is gelukkig nog een tweede beschrijving mogelijk.

Manier 2: Elke kromme is te beschrijven met twee formules $x(t)$ en $y(t)$ waarbij t de waarden van t_0 tot t_e doorloopt. We noemen dit een parametervoorstelling van de kromme met (in dit geval) parameter t.

Berekenen van de reistijden

Na kiezen van een aantal banen, wil je natuurlijk weten welke het snelste is. We zullen bij een gegeven baan dus moeten bepalen *hoe lang de massa erover doet om van A naar B te glijden*.

Vraag 2: Kunnen we, uitgaande van de formule(s) van een glijbaan, de “reistijd” berekenen?

De natuurkundige wet van behoud van energie helpt: *de afname van potentiële energie is de toename van kinetische energie*.

Afname van de hoogte van de massa met $h > 0$ geeft toename van de kinetische energie met mgh (m is de massa; g is de valversnelling).
Dus: als de snelheid eerst v_1 was en na de hoogte-afname v_2, dan

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh.$$

Gevolg: In elk punt van de baan kunnen we de snelheid berekenen:

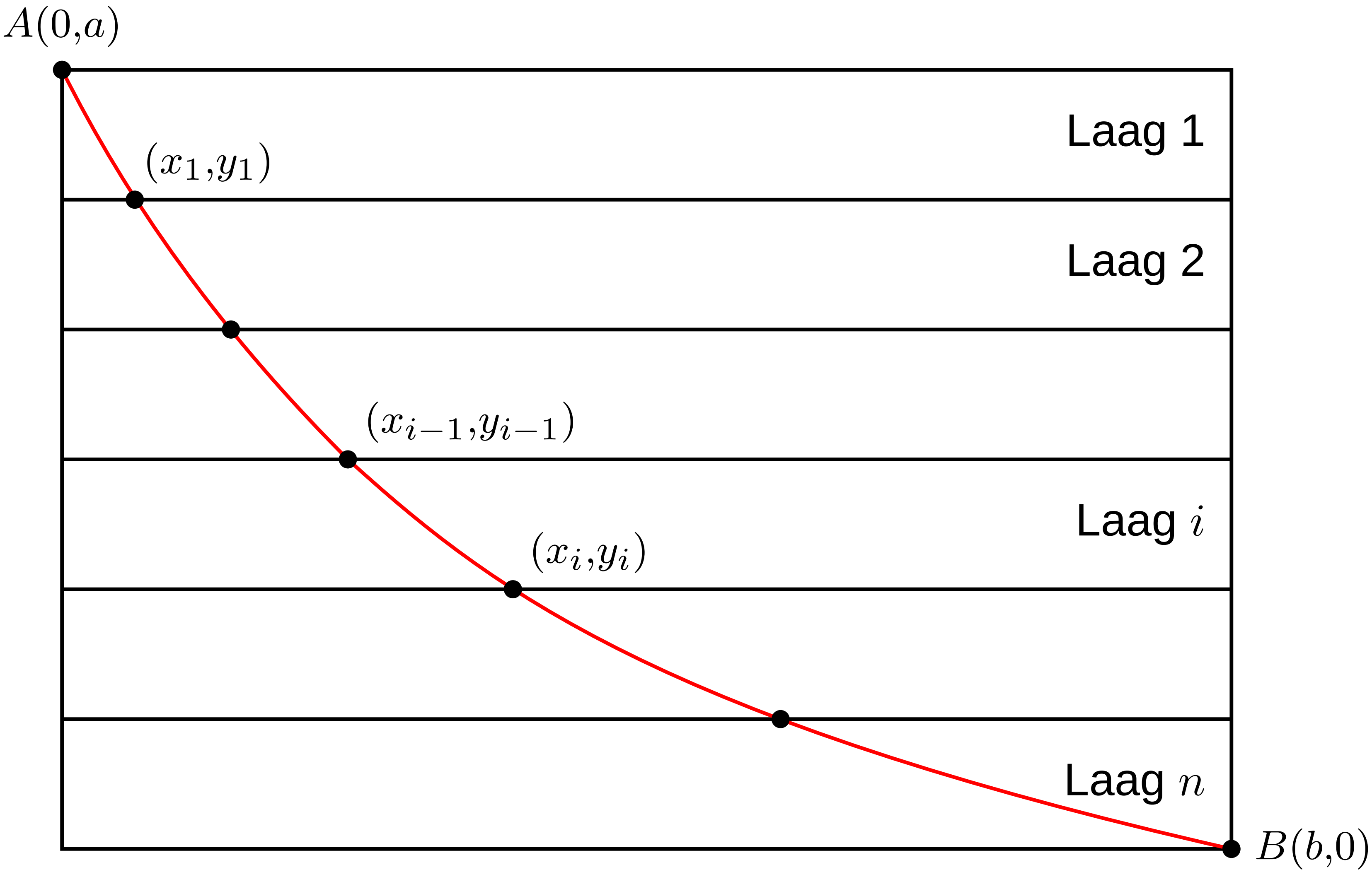
$$v = \sqrt{2g(a - y)}.$$

Hierbij is y de hoogte van het punt.

Opmerking: Dit hangt niet van de vorm van de baan af!

Hiermee kan de reistijd van de massa “numeriek” *benaderd* worden met een techniek die al eeuwen toegepast wordt.

In ons geval is de truc: verdeel het vlak waarin de glijbaan ligt in een (groot) aantal lagen. Als dat aantal groot genoeg is, dan mag je er van uit gaan dat het baangedeelte in één zo’n laag recht is en dat de snelheidsverandering (vrijwel) nul is. Op dat moment worden natuurlijk fouten gemaakt, maar er kan aangetoond worden dat vergroting van het aantal lagen de fout steeds kleiner maakt, zo klein dat deze vrijwel nul wordt!


$A(0,a)$
(x_1,y_1)
(x_{i-1},y_{i-1})
(x_i,y_i)
$B(b,0)$
Laag 1
Laag 2
Laag i
Laag n

In de figuur hebben we de baan opgedeeld in een aantal lagen. Verder zijn de twee punten (x_{i-1}, y_{i-1}) en (x_i, y_i) op de baan aangegeven die op de twee grenslijnen van de i-de laag liggen. De *reistijd* T_i *van de kogel in laag* i wordt bij benadering gegeven door

$$T_i = \frac{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}}{\sqrt{2g(a - y_i)}}$$

Als je zo voor iedere laag de reistijd berekent dan is de totale *benaderde reistijd* gelijk aan de som

$$T_1 + T_2 + \cdots + T_n.$$

De verwachting is nu: hoe groter het aantal lagen n hoe beter deze som de *werkelijke reistijd* benadert.

Voorbeeld: Een viertal benaderingen met behulp van het computerprogramma Maple, uitgevoerd voor twee banen met een verdeling in 1000 en 2000 lagen (en $a = 0.7$ en $b = 1.0$).

	1000 lagen	2000 lagen
rechte baan	0.6375653141	0.6418963856
paraboolbaan	0.5663930143	0.5706376786

Je ziet dat de paraboolbaan sneller is!

Op deze manier ben je in staat om voor allerlei banen de reistijden te schatten en onderling te vergelijken.

Het behandelde is natuurlijk niet de methode om de optimale glijbaan te vinden. Er zijn immers oneindig veel verschillende banen. Je weet dus nooit of je de snelste gevonden hebt! We pakken het daarom nog systematischer aan.

Vinden van de snelste baan

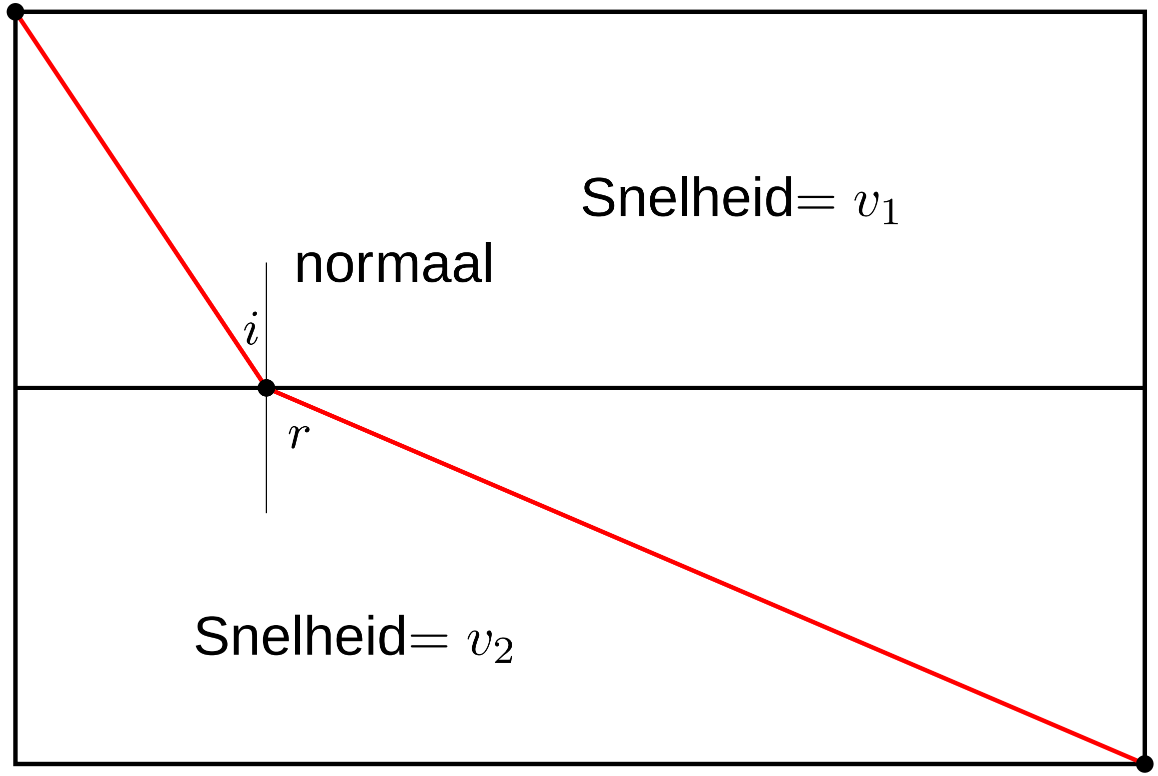
Modelleren is: eerst vereenvoudigen!

Bekijk daarom een baan

- die in twee lagen verdeeld is
- waarbij in elke laag de snelheid constant is: in de bovenste laag v_1 en in de onderste laag v_2.

Gezocht: de “snelste” baan in deze situatie.

Duidelijk is dat deze glijbaan dan uit twee rechte stukken bestaat, die een bepaalde hoek met elkaar maken, waarbij de “knik” op de grenslijn van de lagen ligt.



Stelling: Dit is de snelste baan als en slechts als $\dfrac{\sin i}{\sin r} = \dfrac{v_1}{v_2}$.

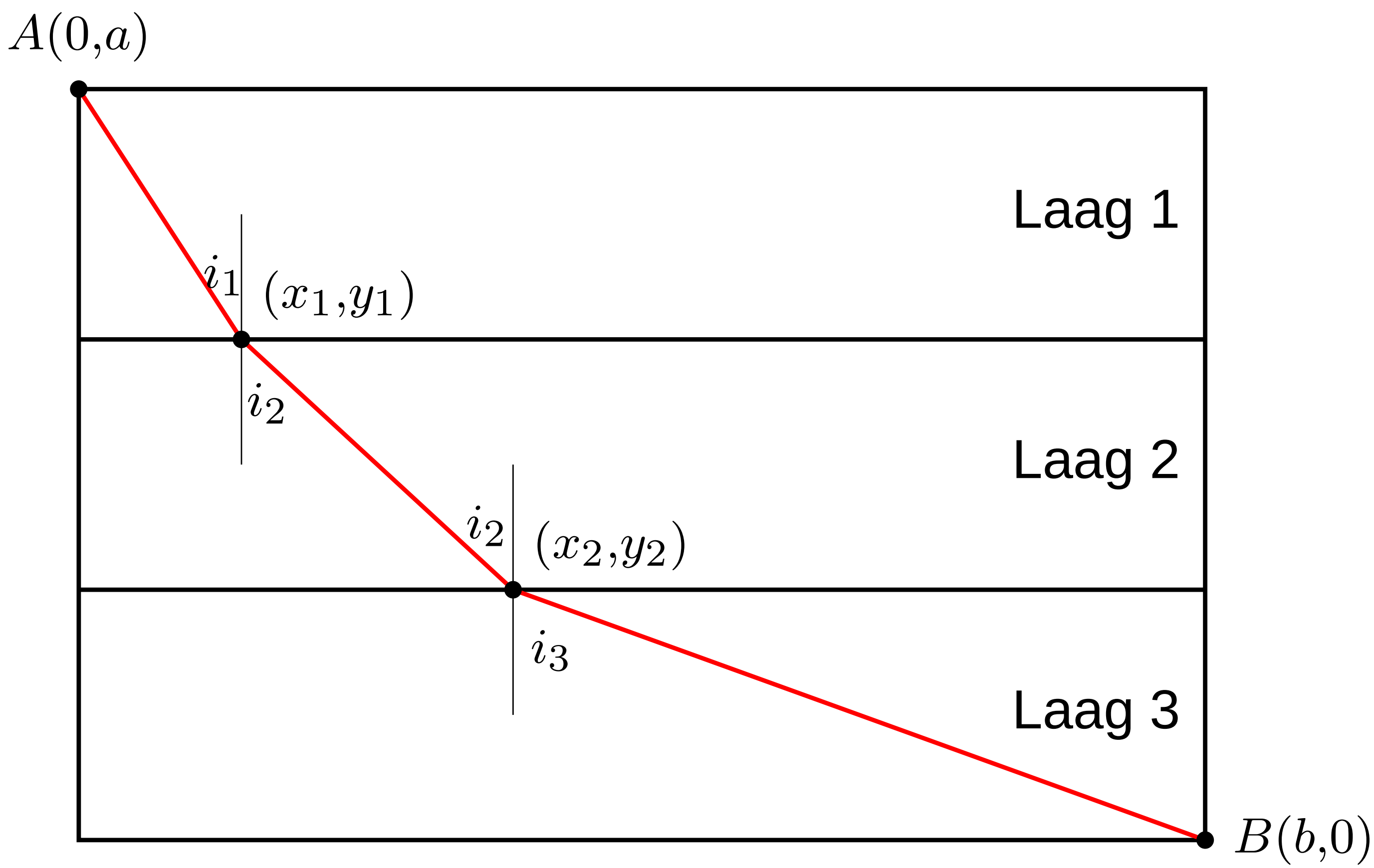
Opmerking: Herkent u de *(brekings)wet van Snellius*?

De sleutel tot de oplossing van ons probleem blijkt de wet van Snellius te zijn.

Verdeel het vlak maar weer in n lagen, veronderstel dat in elke laag geldt dat de snelheid constant is en de baan recht.

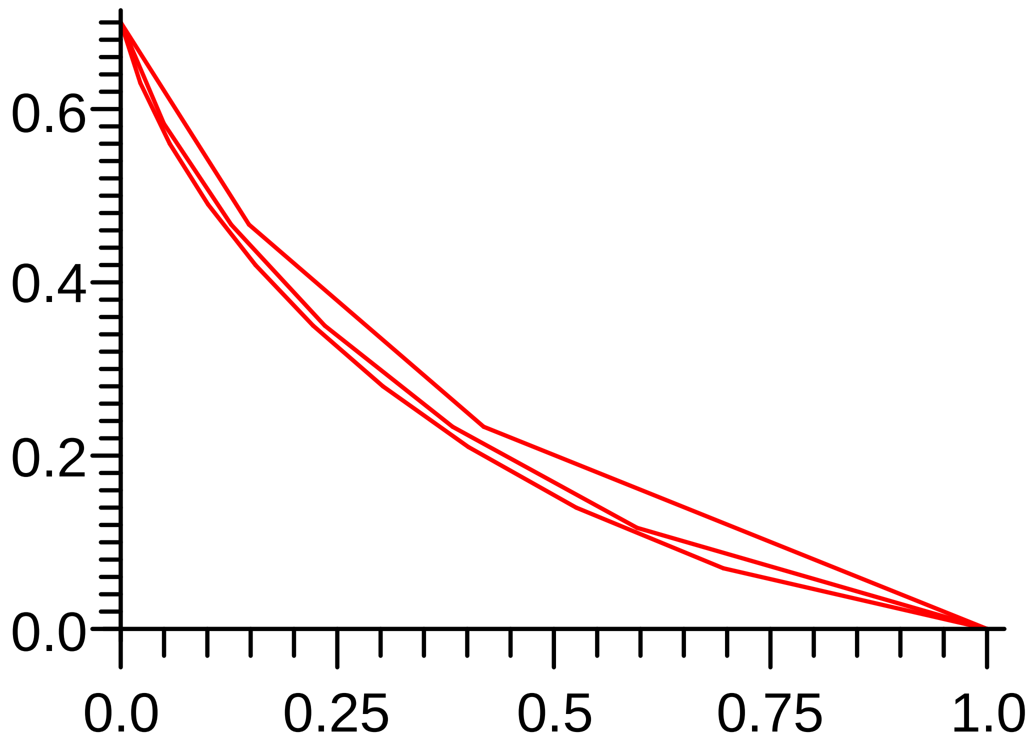
Stelling: Voor de snelste baan moet dan voor alle $n-1$ overgangen de wet van Snellius gelden!

Dit levert $n-1$ vergelijkingen met $n-1$ onbekenden op, waarbij de onbekenden de x-coördinaten van de knikpunten zijn.


$A(0,a)$
Laag 1
i_1
(x_1,y_1)
i_2
Laag 2
i_2
(x_2,y_2)
i_3
Laag 3
$B(b,0)$

Benaderingen van de snelste baan

Met de juiste software is dit soort vergelijkingen op te lossen en een benadering te geven van de snelste baan. De figuur geeft de resultaten bij een verdeling in 3, 6 en 10 lagen



TU Delft

We zijn nog niet tevreden

Wat we gevonden hebben is slechts een n-tal punten op de baan. Door n groot te nemen en de gevonden punten via lijnstukken te verbinden krijgen we natuurlijk een prima benadering van de baan, maar het zou veel mooier zijn als we een parametervoorstelling of functie kunnen bedenken die de baan beschrijft. Dit is mogelijk!!

Er is namelijk een differentiaalvergelijking af te leiden waaraan de snelste baan moet voldoen. Als de baan beschreven wordt als grafiek van de functie $y = f(x)$, dan is deze differentiaalvergelijking

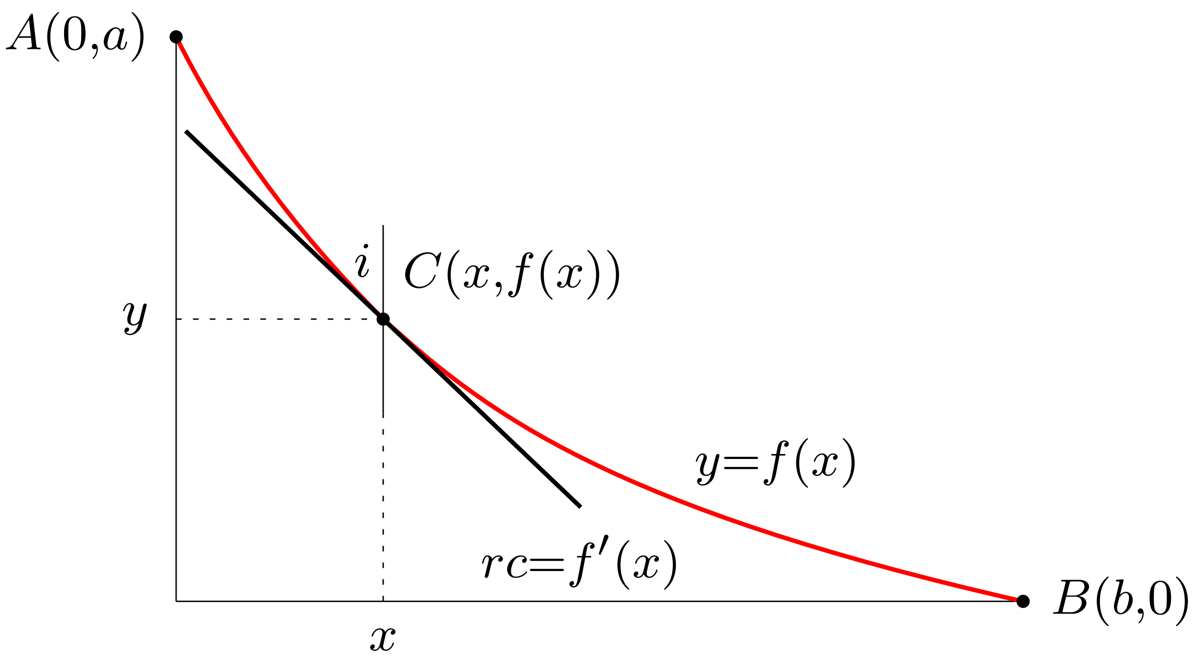
$$\left(1 + f'(x)^2\right)\left(a - f(x)\right) = c,$$

waarbij c een (op dit moment onbekende) constante is.

Deze differentiaalvergelijking verwoordt eigenlijk niets anders dan dat

$$\frac{v}{\sin i}$$

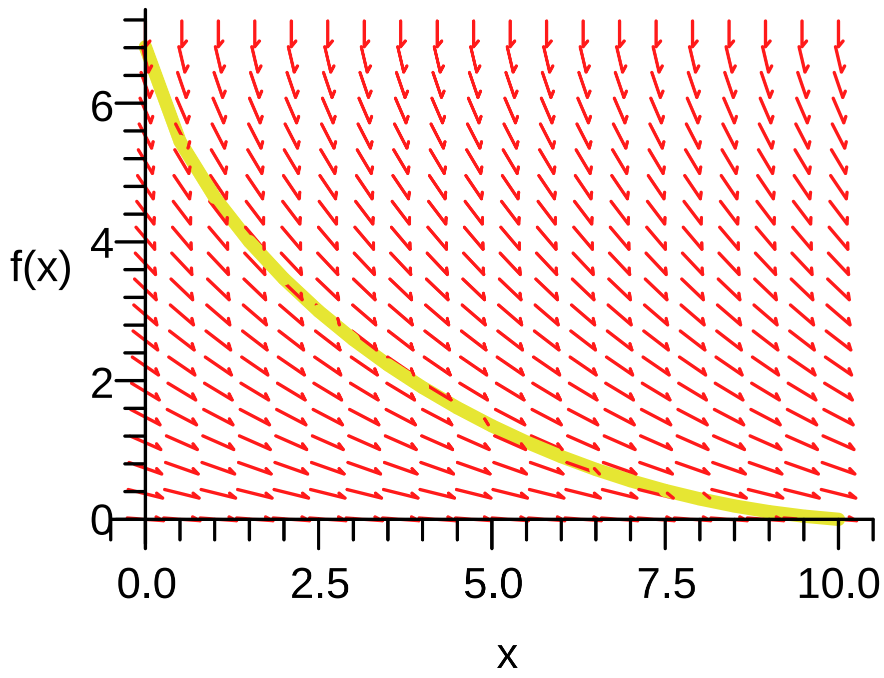
constant is voor de snelste baan en dit volgt uit de wet van Snellius.



TU Delft

Van dv naar baan

De banen kunnen uit het lijnelementveld van de differentiaalvergelijking gehaald worden. Hierbij moet de waarde van a opgegeven worden en de waarde van c zo geschat worden dat de baan die start in het punt $A(0, a)$ ook door het punt $B(b, 0)$ gaat.



Van dv naar exacte beschrijving van de baan

Hoewel dit niet makkelijk gaat, is de dv ook exact op te lossen, hetgeen een parametervoorstelling voor de baan oplevert:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2}c(t - \sin t) \\[2ex] y(t) = a - \dfrac{1}{2}c(1 - \cos t) \end{cases} \qquad 0 \le t \le T$$

waarbij c en T opgelost dienen te worden uit de vergelijkingen $x(T) = b$ en $y(T) = 0$ (de baan moet namelijk voor $t = T$ door het punt $(b, 0)$ gaan).

Slotopmerkingen

- De gevonden baan staat bekend onder de naam brachisto-chroon (van *brachos* (kort) en *chronos* (tijd)). In 1696 daagde Johann Bernoulli de geleerden op de hele wereld uit dit probleem op te lossen.
- Later maakte hij bekend *"U zult stomverbaasd zijn te leren dat deze kromme, de brachistochroon, niets anders is dan de tautochroon van Huygens!"* (van *tautos* (gelijk) en *chronos* (tijd)). Dit is de kromme waarlangs de reistijd, ongeacht het beginpunt, altijd hetzelfde is.
- Die tautochroon is precies de cycloïde (wielkromme), een in die tijd al bekende kromme. Die krijg je door een cirkel over een lijn te laten rollen en dan de baan van één punt te volgen.

- Johann Bernoulli was niet de enige die zijn probleem oploste, vele anderen, onder wie zijn broer Jakob en Isaac Newton, slaagden er in de brachistochroon te beschrijven.
- Verrassend: de snelste baan komt soms lager dan het eindpunt!

Uitsmijter 1: Een formule voor de reistijd

De berekening van de reistijd is in feite een Riemannsom die bij toename van het aantal lagen naar een integraal convergeert.

Stelling: De totale reistijd van A naar B is bij een baan, beschreven door $y = f(x)$, gelijk aan

$$\int_a^b \frac{\sqrt{(1 + (f'(x))^2)}}{\sqrt{2g(a - f(x))}}\, dx.$$

Hiermee kan de berekening van de reistijd in sommige gevallen exact gebeuren.

Uitsmijter 2: Oplossen van de dv

- Stel $z(x) = a - f(x)$. Dan geldt $\big((z'(x))\big)^2 + 1)z(x) = C$.
- Schrijf $z = C\sin^2\theta$. Realiseer je dat z een functie van x is, en dus dat hier θ ook een functie van x is.
- Hieruit volgt $y = f(x) = a - \frac{C}{2}(1 - \cos(2\theta))$.
- Ook volgt $z'(x) = 2C\sin\theta \cdot \cos\theta \cdot \theta'(x)$.
- Substitutie hiervan in de dv geeft dat $\pm 2C\sin^2\theta \cdot \theta'(x) = 1$ en dus $\pm C(1 - \cos 2\theta)d\theta = dx$.
- De oplossing hiervan is $x = \pm\frac{C}{2}(2\theta - \sin(2\theta)) + K$.
- Schrijf nu $t = 2\theta$. Dan volgt $K = 0$ uit het feit dat voor $u = 0$ moet gelden dat $\big(x(0), y(0)\big) = (0, a)$.