DE VLAKKE MEETKUNDE VAN BOTTEMA
THEMA: VERGETEN HELDEN

JAN M. AARTS EN AGNES VERWEIJ

SAMENVATTING. Aan de hand van een serie van definities, voorbeelden, eigenschappen en stellingen betreffende driehoekscoördinaten gaan we kriskras door het boek *Hooofdstukken uit de Elementaire Meetkunde van Bottema* heen.

1. INLEIDING

Professor dr. OENE BOTTEMA werd op 25 december 1901 te Groningen geboren. Hij promoveerde in 1927 te Leiden op het proefschrift *De figuur van vier kruisende lijnen* bij professor dr. W. VAN DER WOUDE. Van 1924 tot 1933 was BOTTEMA leraar te Hengelo en Groningen, daarna tot 1941 directeur van de Rijks HBS, eerst te Sappemeer, later te Deventer. Vanaf 1941 was hij hoogleraar in de zuivere en toegepaste wiskunde en theoretische mechanica aan de Technische Universiteit te Delft. In 1971 ging BOTTEMA met emeritaat. Hij overleeed in 1992. BOTTEMA heeft honderden publicaties op zijn naam staan. Welbekend waren zijn *Verscheidenheden*, waarvan er 81 verschenen; het zijn korte stukjes in *Euclides* over alle mogelijke onderwerpen uit de wiskunde, waarvan vele uit de meetkunde. BOTTEMA is auteur van de boeken *Geometric Inequalities*, geschreven samen met R.Z. DJORDJEVIĆ, R.Ž. JANIĆ, D.S. MITRINOVIĆ EN P.M. VASIĆ, en *Theoretical Kinematics*, geschreven samen met B. ROTH (nu verkrijgbaar bij *Dover*).

Bij *Epsilon* verschenen de titels *Theoretische Mechanica* en *Hoofdstukken uit de Elementaire Meetkunde*,[1].

2. DRIEHOEKSCOÖRDINATEN

[1, hoofdstuk VI] We leggen eerst enkele notaties vast. We werken met een vaste referentiedriehoek ABC. Figuur 1

$$\left.\begin{array}{lll} a & \text{is de zijde} & BC \\ b & \text{is de zijde} & CA \\ c & \text{is de zijde} & AB \end{array}\right\} \text{ zowel de zijde als haar grootte.}$$

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha & \text{is de hoek} & A \\ \beta & \text{is de hoek} & B \\ \gamma & \text{is de hoek} & C \end{array}\right\} \text{ zowel de hoek als haar grootte.}$$

Als nu P een willekeurig punt is uit het vlak van driehoek ABC dan is

$$\begin{array}{lcl} \overline{x}_P & = & \text{afstand van } P \text{ tot de zijde } BC \\ \overline{y}_P & = & \text{afstand van } P \text{ tot de zijde } CA \\ \overline{z}_P & = & \text{afstand van } P \text{ tot de zijde } AB \end{array}$$

Hierbij rekenen we $\overline{x}_P$ **positief** als P aan dezelfde kant van de zijde BC ligt als A; we rekenen $\overline{x}_P$ **negatief** als P en A aan verschillende kanten van BC liggen.

Voorbeeld 1. $\overline{x}_A = \frac{2O}{a}$, $\overline{y}_A = 0$, $\overline{z}_A = 0$, waarbij O de oppervlakte van driehoek ABC is. Evenzo $\overline{x}_B = 0$, $\overline{y}_B = \frac{2O}{b}$, $\overline{z}_B = 0$ en $\overline{x}_C = 0$, $\overline{y}_C = 0$, $\overline{z}_C = \frac{2O}{c}$. Figuur 2

Definitie 2. *We zeggen dat* (x, y, z) ***driehoekscoördinaten*** *zijn van* P *als*

$$x : y : z = \overline{x}_P : \overline{y}_P : \overline{z}_P,$$

Figuur 3 *dus als er een getal* $k \neq 0$ *is zó dat* $k(x, y, z) = (\overline{x}_P, \overline{y}_P, \overline{z}_P)$*, opgevat als vectoren in* $\mathcal{R}^3$*.*

Voorbeeld 3. In driehoekscoördinaten geldt: $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$.

Merk op dat we hier te maken hebben met homogene coördinaten: als (x, y, z) driehoekscoördinaten zijn van een punt P, dan ook bijvoorbeeld $(2x, 2y, 2z)$. Als nu $\overline{x}_P = kx$, $\overline{y}_P = ky$ en $\overline{z}_P = kz$, dan is

$$akx + bky + ckz = 2O,$$

waarbij O de oppervlakte van driehoek ABC is, dus $k = \frac{2O}{ax+by+cz}$. Dus je kunt $(\overline{x}_P, \overline{y}_P, \overline{z}_P)$ terugvinden uit (x, y, z).

Figuur 4 **Voorbeeld 4.** Als I het **middelpunt** is **van de ingeschreven cirkel** van driehoek ABC, met straal r, dan is $I = (r, r, r) = (1, 1, 1)$. Als I_a het **middelpunt** is van de **aangeschreven cirkel** aan de zijde a, met straal r_a, dan is $I_a = (-r_a, r_a, r_a) = (-1, 1, 1)$. Evenzo $I_b = (1, -1, 1)$ en $I_c = (1, 1, -1)$.

Figuur 5 **Opgave 5.** Als M het **middelpunt** is **van de omgeschreven cirkel** van driehoek ABC, met straal R, dan is $M = (R\cos\alpha, R\cos\beta, R\cos\gamma) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.
Aanwijzing: gebruik dat $\alpha = \frac{1}{2}\angle BMC$; stelling van de omtrekshoek.

Figuur 6 **Opgave 6.** Als H het **hoogtepunt** is van driehoek ABC dan is

$$H = (2R\cos\beta\cos\gamma, 2R\cos\gamma\cos\alpha, 2R\cos\alpha\cos\beta) = (\cos\beta\cos\gamma, \cos\gamma\cos\alpha, \cos\alpha\cos\beta).$$

Aanwijzing: ga na dat $\angle BHD = \gamma$, met D het voetpunt van de hoogtelijn uit A, en $\overline{x}_H = \frac{c\cos\beta}{\tan\gamma}$. Herschrijf dit laatste tot $\overline{x}_H = 2R\cos\beta\cos\gamma$.

Figuur 7 **Opgave 7.** Als Z het **zwaartepunt** is van driehoek ABC dan is
$Z = \left(\frac{2O}{3a}, \frac{2O}{3b}, \frac{2O}{3c}\right) = (bc, ca, ab)$.
Aanwijzing: vergelijk $\overline{x}_Z$ met $\overline{x}_A$.

Figuur 8 **Opgave 8. IMO 2008, opgave 1.** Gegeven is een scherphoekige driehoek ABC met hoogtepunt H. De cirkel door H met middelpunt het midden van de zijde BC snijdt de lijn BC in A_1 en A_2. De cirkel door H met middelpunt het midden van de zijde CA snijdt de lijn CA in B_1 en B_2 en de cirkel door H met middelpunt het midden van de zijde AB snijdt de lijn AC in C_1 en C_2. Bewijs dat A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 en C_2 op één cirkel liggen.

Figuur 9 Voor de oplossing het volgende:

(1) Het middelpunt van de gezochte cirkel, zo die bestaat, moet wel gelijk zijn aan M, het middelpunt van de omgeschreven cirkel.

Figuur 10 (2) Het midden van de zijde AB noemen we even M_c. Dan is
$$MC_2^2 = MM_c^2 + M_cC_2^2 = MM_c^2 + M_cH^2.$$

(3) Met de cosinusregel komt er
$$MC_2^2 = HM^2 + 2MM_c \cdot M_cH\cos(\angle HM_cM).$$

(4) Vervolgens met Z-hoeken en denkend aan driehoekscoördinaten
$$MC_2^2 = HM^2 + 2\overline{z}_M\overline{z}_H.$$

(5) De laatste term is evenredig met $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$, en die term vind je bij alle zes de punten.

3. De vergelijking van een lijn

[1, hoofdstuk VI] Het punt $X = (x, y, z)$ ligt op de lijn door $P = (x_P, y_P, z_P)$ en $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$ zó dat $PX : PQ = \lambda$. Dan is Figuur 11 Figuur 12

$$\overline{x} = \overline{x}_P + \lambda(\overline{x}_Q - \overline{x}_P).$$

Ga dit na. Er geldt nu

$$x : y : z = [\overline{x}_P + \lambda(\overline{x}_Q - \overline{x}_P)] : [\overline{y}_P + \lambda(\overline{y}_Q - \overline{y}_P)] : [\overline{z}_P + \lambda(\overline{z}_Q - \overline{z}_P)].$$

Er is dus een $k \neq 0$ zó dat

$$\begin{array}{ccccc} kx & + & \lambda(\overline{x}_P - \overline{x}_Q) & = & \overline{x}_P \\ ky & + & \lambda(\overline{y}_P - \overline{y}_Q) & = & \overline{y}_P \\ kz & + & \lambda(\overline{z}_P - \overline{z}_Q) & = & \overline{z}_P \end{array}$$

Dit stelsel heeft een oplossing voor k en λ dan en alleen dan als

$$\begin{vmatrix} x & \overline{x}_P - \overline{x}_Q & \overline{x}_P \\ y & \overline{y}_P - \overline{y}_Q & \overline{y}_P \\ z & \overline{z}_P - \overline{z}_Q & \overline{z}_P \end{vmatrix} = 0.$$

En dit laatste geldt dan en slechts dan indien

$$\begin{vmatrix} x & x_Q & x_P \\ y & y_Q & y_P \\ z & z_Q & z_P \end{vmatrix} = 0.$$

Dit is de vergelijking van de rechte lijn PQ in driehoekscoördinaten. Het is een homogene lineaire vergelijking. De vergelijking is ook lineair en homogeen in de coördinaten van P en Q.

Omgekeerd is de homogene lineaire vergelijking $ux + vy + wz = 0$ de vergelijking van de lijn door de punten $(0, w, -v)$, $(-w, 0, u)$ en $(-v, u, 0)$.

Voorbeeld 9. We berekenen nogmaals de coördinaten van het **zwaartepunt**. D, E en F zijn opeenvolgend de middens van BC, CA, AB. Er geldt $\overline{y}_D = \frac{1}{2}(\overline{y}_B + \overline{y}_C)$, en dus, met voorbeeld 1, $\overline{y}_D = \frac{O}{b}$ en evenzo $\overline{z}_D = \frac{O}{c}$, en dus $D = (0, c, b)$. Omdat $A = (1, 0, 0)$ komt er als vergelijking voor de lijn AD:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & c \\ z & 0 & b \end{vmatrix} = 0,$$

en dus $AD : -yb + zc = 0$. Op dezelfde wijze, $BE : xa - zc = 0$.

Het snijpunt van deze twee lijnen is $(\frac{c}{a}, \frac{c}{b}, 1)$ oftewel (bc, ca, ab). Controleer dat dit punt ook op de derde zwaartelijn CF ligt. Zo vinden we het zwaartepunt $Z = (bc, ca, ab)$.

Voorbeeld 10. [1, Hoofdstuk VI] wordt besloten met de vergelijking van de **lijn van Euler**. De vergelijking van de lijn MH door het middelpunt M, opgave 5, en het hoogtepunt H, opgave 6, is Figuur 13

$$\begin{vmatrix} x & \cos\alpha & \cos\beta\cos\gamma \\ y & \cos\beta & \cos\gamma\cos\alpha \\ z & \cos\gamma & \cos\alpha\cos\beta \end{vmatrix} = 0,$$

oftewel

$$x\cos\alpha(\cos^2\beta - \cos^2\gamma) + y\cos\beta(\cos^2\gamma - \cos^2\alpha) + z\cos\gamma(\cos^2\alpha - \cos^2\beta) = 0.$$

Dit kan in compacte vorm geschreven worden als

$$\sum_{\text{cycl}} x\cos\alpha(\cos^2\beta-\cos^2\gamma)=0.$$

Met behulp van de cosinusregel komt er

$$\frac{1}{2abc}\sum_{\text{cycl}} ax(b^2+c^2-a^2)(\sin^2\gamma-\sin^2\beta)=0,$$

oftewel, met de sinusregel,

$$\sum_{\text{cycl}} ax(b^2+c^2-a^2)(c^2-b^2)=0.$$

Figuur 14 Door invullen kun je controleren dat het zwaartepunt Z ook op de lijn van Euler ligt. In hoofdstuk 4 wordt nog aangetoond dat $HZ=2ZM$.

Opgave 11. [1, hoofdstuk II] De raakpunten van de ingeschreven cirkel met middelpunt I
Figuur 15 en straal r aan de zijden noemen we: D op BC, E op CA, F op AB. Omdat $\angle IDP=\gamma$ met P het voetpunt van de loodlijn door D op AC, vinden we $\overline{y}_D=r+r\cos\gamma=r(1+\cos\gamma)$. Evenzo $\overline{z}_D=r(1+\cos\beta)$. Voor de lijn AD vinden we:

$$AD: y(1+\cos\beta)-z(1+\cos\gamma)=0.$$

Figuur 16 Op dezelfde wijze, $BE: x(1+\cos\alpha)-z(1+\cos\gamma)=0$. Het snijpunt van AD en BE is

$$G=((1+\cos\beta)(1+\cos\gamma),(1+\cos\gamma)(1+\cos\alpha),(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta))$$

Uit de symmetrie van de coördinaten blijkt dat G ook ligt op CF. Het punt G staat bekend als het **punt van Gergonne**.

Opgave 12. [1, hoofdstuk II] Gegeven zijn de punten D op BC, E op CA, F op AB. We vragen ons af: wanneer gaan de drie *hoektransversalen* AD, BE en CF door één punt?
Figuur 17 De lijn door de punten $A=(1,0,0)$ en $D=(0,y_D,z_D)$ is $AD: z_Dy-y_Dz=0$. Verder, $BE: x_Ez-z_Ex=0$ en $CF: x_Fy-y_Fx=0$. Het snijpunt van AD en BE is $\left(\frac{x_E}{z_E},\frac{y_D}{z_D},1\right)$ oftewel (x_Ez_D,y_Dz_E,z_Dz_E). Dit punt ligt op de lijn CF als $x_Fy_Dz_E-x_Ey_Fz_D=0$, en dit is weer equivalent met

$$\frac{x_F}{y_F}\cdot\frac{y_D}{z_D}\cdot\frac{z_E}{x_E}=1.$$

Dat deze voorwaarde noodzakelijk en voldoende is opdat de drie hoektransversalen door één punt gaan staat bekend als de **Stelling van Ceva**.

Bedenkend dat $\overline{x}_F=FB\sin\beta$, enzovoort, kan de zojuist gevonden voorwaarde omgewerkt worden tot

$$\frac{BF}{FA}\cdot\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CD}{DB}=1.$$

Opgave 13. [1, hoofdstuk XIX] Gegeven zijn drie punten: P op het lijnstuk BC, Q op lijnstuk CA, R op het verlengde van AB of op het verlengde van BA. Hoe weten we of
Figuur 18 P, Q en R al dan niet op één lijn liggen? De lijn door P en Q is

$$\begin{vmatrix} x & 0 & x_Q \\ y & y_P & 0 \\ z & z_P & z_Q \end{vmatrix} = 0,$$

oftewel

$$y_Pz_Qx+x_Qz_Py-x_Qy_Pz=0.$$

Het snijpunt van deze lijn met AB, dat is $z = 0$, is het punt R dan en slechts dan als

$$y_P z_Q x_R + x_Q z_P y_R = 0 \text{ oftewel } \frac{x_R y_P z_Q}{x_Q y_R z_P} = -1.$$

De laatste formule kunnen we naar analogie van Ceva ook schrijven als $\frac{x_R}{y_R} \cdot \frac{y_P}{z_P} \cdot \frac{z_Q}{x_Q} = -1$. Nu is $\overline{y}_P = PC \sin\gamma$ en $\overline{z}_P = BP \sin\beta$, enzovoort. Door dit in te vullen en te herschrijven vinden we dat P, Q, R op één lijn dan en slechts dan als

$$\frac{PC}{CQ} \cdot \frac{QA}{AR} \cdot \frac{RB}{BP} = -1$$

(Omdat R niet op het lijnstuk AB ligt, maar op een verlengde ervan, moeten we één van de lijnstukken AR of RB negatief rekenen.) Dit is de **stelling van Menelaus**.

4. Vier concurrente lijnen

In opgave 11, hebben we de coördinaten berekend van het punt van Gergonne G. De vergelijking van de verbindingslijn van dit punt en het middelpunt van de ingeschreven cirkel $I = (1, 1, 1)$ is Figuur 19

$$\begin{vmatrix} x & 1 & (1+\cos\beta)(1+\cos\gamma) \\ y & 1 & (1+\cos\gamma)(1+\cos\alpha) \\ z & 1 & (1+\cos\alpha)(1+\cos\beta) \end{vmatrix} = 0,$$

oftewel

$$x(1+\cos\alpha)(\cos\beta-\cos\gamma) + y(1+\cos\beta)(\cos\gamma-\cos\alpha) + z(1+\cos\gamma)(\cos\alpha-\cos\beta) = 0.$$

We willen nog drie van zulke lijnen definieren en dan laten zien dat deze vier lijnen door één punt gaan. Allereerst bekijken we de cirkel (I_a, r_a) die aangeschreven is aan de zijde a. Het middelpunt is $I_a = (-1, 1, 1)$. Bij deze cirkel definieren we een nieuw punt van Gergonne G_a als het snijpunt van de drie verbindingslijnen van de hoekpunten met de raakpunten van de aangeschreven cirkel (I_a, r_a) aan de overliggende zijden. De verbindingslijn van I_a en G_a is een van de drie nieuwe lijnen. Welnu, de raakpunten van (I_a, r_a) met de zijden BC, CA, AB noemen we opeenvolgend D, E, F. Er geldt: $\angle I_a DP = \pi - \gamma$ met P het voetpunt van de loodlijn door D op AC, hetgeen leidt tot $\overline{y}_D = r_a - r_a \cos\gamma = r_a(1 - \cos\gamma)$. Evenzo $\overline{z}_D = r_a(1 - \cos\beta)$. Er volgt Figuur 20 Figuur 21

$$AD : y(1-\cos\beta) - z(1-\cos\gamma) = 0.$$

Verder geldt $\overline{x}_E = -r_a(1 - \cos\gamma)$; let hier op het eerste min-teken. Evenzo: $\overline{z}_E = r_a(1 + \cos\alpha)$, en dus

$$BE : x(1+\cos\alpha) + z(1-\cos\gamma) = 0.$$

Hieruit volgt:

$$G_a = (-(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma), (1-\cos\gamma)(1+\cos\alpha), (1+\cos\alpha)(1-\cos\beta)).$$

Voor de lijn $I_a G_a$ vinden we de vergelijking

$$\begin{vmatrix} x & -1 & -(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma) \\ y & 1 & (1-\cos\gamma)(1+\cos\alpha) \\ z & 1 & (1+\cos\alpha)(1-\cos\beta) \end{vmatrix} = 0,$$

oftewel

$$x(1+\cos\alpha)(\cos\gamma-\cos\beta) + y(1-\cos\beta)(\cos\gamma+\cos\alpha) + z(1-\cos\gamma)(-\cos\alpha-\cos\beta) = 0.$$

Ter vereenvoudiging van de notatie schrijven we even **a**, **b**, **c** in plaats van opeenvolgend $\cos\alpha$, $\cos\beta$ en $\cos\gamma$. De vergelijking van de lijn IG wordt dan

$$x(1+\mathbf{a})(\mathbf{b}-\mathbf{c}) + y(1+\mathbf{b})(\mathbf{c}-\mathbf{a}) + z(1+\mathbf{c})(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = 0$$

en die van I_aG_a wordt

$$x(1+\mathbf{a})(\mathbf{c}-\mathbf{b})+y(1-\mathbf{b})(\mathbf{c}+\mathbf{a})+z(1-\mathbf{c})(-\mathbf{a}-\mathbf{b})=0.$$

Door de laatste twee vergelijkingen bij elkaar op te tellen vinden we, na zorgvuldig tegen elkaar wegschrappen van termen,

$$y(2\mathbf{c}-2\mathbf{ab})+z(-2\mathbf{b}+2\mathbf{ca})=0,$$

met de oplossing $y=\mathbf{b}-\mathbf{ca}$ en $z=\mathbf{c}-\mathbf{ab}$. Je kunt nu raden dat we door dit in de vergelijkingen in te vullen zullen vinden: $x=\mathbf{a}-\mathbf{bc}$. Dit is inderdaad het geval. Als
Figuur 22 snijpunt van IG en I_aG_a vinden we dus

$$L=(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma,\cos\beta-\cos\gamma\cos\alpha,\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta).$$

Dit punt L, genoemd naar de Longchamps, heeft natuurlijk te maken met het middelpunt van de omgeschreven cirkel $M=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ en het hoogtepunt
Figuur 23 $H=(\cos\beta\cos\gamma,\cos\gamma\cos\alpha,\cos\alpha\cos\beta)$. Het is duidelijk dat L op de lijn MH ligt. Om de relatieve positie te onderzoeken moeten we de echte afstanden gebruiken en niet de verhoudingen, dus

$$\begin{aligned} M &= (R\cos\alpha,R\cos\beta,R\cos\gamma)\\ H &= (2R\cos\beta\cos\gamma,2R\cos\gamma\cos\alpha,2R\cos\alpha\cos\beta)\end{aligned}$$

Kiezen we nu het punt $X=(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ op de lijn HM zó dat M het midden is van het lijnstuk XH, dan is

$$X=(\overline{x},\overline{y},\overline{z})=(2R(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma),2R(\cos\beta-\cos\gamma\cos\alpha),2R(\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta)).$$

De conclusie is $L=X$, dus het punt L ligt op de lijn van Euler, even ver van M als H, maar aan de andere kant. Er zal niemand van opkijken dat ook de lijnen I_bG_b en I_cG_c
Figuur 24 door het punt L gaan. Dit is een van de resultaten van Michael Longuet-Higgens, [2].

De driehoek A'', B'', C'' is beschreven om driehoek ABC zó dat $A''B''$ // AB,
Figuur 25 $B''C''$ // BC en $C''A''$ // CA, terwijl A ligt tegenover A" enzovoort. Merk op dat het middelpunt M'' van de omgeschreven cirkel van driehoek $A''B''C''$ gelijk is aan het hoogtepunt H van driehoek ABC en dat het zwaartepunt Z'' van driehoek $A''B''C''$ gelijk is aan het zwaartepunt Z van driehoek ABC; de twee driehoeken hebben dus dezelfde lijn van Euler. De driehoek $A''B''C''$ ontstaat uit driehoek ABC door een vermenigvuldiging met centrum Z en factor -2. Het punt M gaat daarbij over in $M''=H$, dus Z ligt op het lijnstuk MH zó dat $HZ=2ZM$. Het hoogtepunt H van driehoek ABC gaat hierbij over in het hoogtepunt H'' van de driehoek $A''B''C''$. En uit wat we net berekend hebben volgt nu: de punten H'' en L vallen samen!

Literatuur

[1] Oene Bottema, *Hoofdstukken uit de Elementaire Meetkunde*, Epsilon Uitgaven, Utrecht 1997.
[2] Michael Longuet Higgins, *A Fourfold Point of Concurrence Lying in the Euler Line of a Triangle*, The Mathematical Intelligencer, 2000, Springer Verlag.

Technische Universiteit Delft, Faculteit EWI, Postbus 5031, 2600 GA Delft, Netherlands