

CONFERENTIEGIDS

**Noordwijkerhout
6 en 7 februari 2009**

Dagindeling NWD 15

Plenaire lezingen en parallelsessies	
vrijdag	
11.00 - 11.15	opening:
11.30 - 12.15	plenaire lezing:
12.30 - 14.00	lunch
14.00 - 14.45	parallelsessies 1
14.45 - 15.30	koffie/thee
15.30 - 17.00	parallelsessies 2
18.00 - 20.00	diner
20.30 - 21.30	plenaire lezing:
21.30	muziek, spellen en puzzels
zaterdag	
07.00	funrun
07.30 - 09.00	ontbijt
09.15 - 10.00	parallelsessies 3
10.00 - 10.30	kamer leegmaken, informatiemarkt
10.30 - 11.15	parallelsessies 4
11.15 - 11.45	koffie/thee
11.45 - 12.30	plenaire lezing:
12.30 - 13.00	sluiting
13.00 - 14.00	lunch

Let op: workshops hebben over het algemeen een lengte van 45 minuten. Er zijn echter een aantal werkgroepen die langer duren. Een gedetailleerd schema treft u aan in het midden van dit boekje.

Inhoud

Voorwoord.....	3
Organisatorische mededelingen	4
Plenaire lezingen.....	6
Thema's	
• Verre wiskunde	8
Math in the mosques of Iran – Behrooz Zabihian	
Rekenmethoden in het oude China – Frits Veerman en Maria Velema (ws)	
Afrika en wiskunde – Dirk Huylebrouck	
Sangaku:de zen van wiskunde – Arnout Jaspers	
• Vergeten helden	12
De wonderlijke problemen van Fred Schuh – Chris Zaal	
De vlakke meetkunde van Bottema – Jan Aarts en Agnes Verwey (ws)	
De algebra van Bartel van der Waerden – Jaap Top	
De wiskundendidactiek van Dijksterhuis – Klaas van Berkel	
• Kunst in getallen	15
Tellen aan tekst – Hans van Halteren	
Mathematics and the groove in music – Anja Volk (ws)	
Ook een meesterwerk is uiteindelijk niet meer dan een bak getallen – Jan van der Lubbe	
Wiskunde in het werk van Jan Andriessse – Jan Andriessse en Jan Aarts	
• Wiskundig onderzoek in Nederland	20
Voorspellen met een Playstation – Benne de Weger	
Listen very carefully – Gunther Cornelissen	
Trillingen en resonantie – Heinz Hanssmann	
• Wiskunde en biologie	23
Hoe modeller je een organisme? Wiskunde in de moderne biologie – Stan Marée	
Wiskunde en biologie – Gilberte Verbeek (ws)	
Het wiskundige breun van de mier – Bob Planqué	
Simpel spiralen en sublieme slakken – Sander Kranenbarg	
• Pretparken en logistiek	27
De wiskunde achter de containerlogistiek – Iris Vis	
Skydiver & Grande Route – Anja Moeijes en Adri Knop (ws)	
Wiskunde in achtbanen – Timo Klaus	
De topsnelheid van zwaartekracht – Emiel van Elderen en Joost de Groot	

• Quod erat demonstrandum	31
Elementaire bewijzen: niet altijd eenvoudig – Koen Vervloesem	
Het Isis-probleem: van het oude Egypte naar de 21ste eeuw! – Dirk De Bock (ws)	
In één oogopslag – Marco Swaen en Marleen Kooiman	
• Wiskunde en gadgets	34
MobileMath: een wiskundespel op mobieltjes met GPS – Monica Wijers	
Wiskundeonderwijs binnen een nieuw medium – Wouter Potters en Peter Boon (ws)	
Didactiek van het digibord – Michel van Ast	
Wiskunde op Lowlands – Wim den Herder	
• Wiskunde van de kaart	37
Rectangular cartograms – Bettina Speckmann	
Correcte waterstromen op bergmodellen – Marc van Kreveld	
Plaatsbepaling van de sterren, hoe werkt dat? – Steven Wepster	
• Wiskunde tussen vo en ho	40
Leerling als onderwijsassistent – Lidy Wesker, Willem Hoekstra en Henk Staal	
Wiskundige avonturen op de bol – Monique Pijls (ws)	
Complexe stromen – Aad Goddijn (ws)	
Modellen en Dynamische systemen – Ferdinand Verhulst	
Problemen oplossen én uitleggen – Quintijn Puite en Marjanne de Nijs	
• Wiskunde in samenhang	44
Thermodynamica van alledag – Ger Koper	
Wiskunde in balans – Jeroen Spandaw en Rob Mudde	
En verder	
Winnaars workshop	46
Pygram – Odette de Meulemeester en Matthijs Coster (ws)	
Zelf modelleren, wat ervaar je dan? – Xandra Snoeker en Nellie Verhoef	
Informatiemarkt	48
Avondprogramma	48
Funrun	50
Nationale Wiskunde Dagen 2010	51

Voorwoord

“De echte natuurliefhebber kijkt verder dan de horizon.” Zo eindigde Govert Schilling een column over sterrenkunde tijdens een radioprogramma op de vroege zondagochtend. Dat is ook waar het bij de NWD om gaat: verder kijken dan haakjes wegwerken, vergelijkingen oplossen en functies differentiëren.

U mag zich gelukkig prijzen. De wachtlijst groeit namelijk ieder jaar. Voor u betekent deze NWD weer inspiratie, nieuwe energie, collegialiteit en verder kijken. Het thema verre wiskunde neemt dit heel letterlijk: wiskunde van niet-westerse beschavingen worden belicht. Andere thema's zijn: briljante bewijzen, kunst in getallen vangen en vergeten helden van de lage landen: Bottema, Schuh, Van der Waerden en Dijksterhuis. Wie kent ze nog? In welk venster passen ze?

Wiskunde wordt pas echt alledaags in het thema logistiek. Het modelleren van goederenstromen, voorraadbeheer en containeroverslag blijkt iedere keer minder triviaal dan van tevoren gedacht. Het thema wiskunde en biologie mag natuurlijk niet ontbreken in het Darwin jaar. Tegenwoordig speelt wiskunde op vele fronten een belangrijke rol in de biowetenschappen. Sterker nog, biologen beseffen steeds vaker de beperkingen van modellen, vragen om krachtigere methoden en stimuleren daarmee wiskundig onderzoek.

Bovendien is er aandacht voor de wiskunde van kaarten. Bollen plat slaan, oppervlaktetrouw of BNP-trouw representeren met behoud van landsgrenzen. Ze leveren uitdagingen en fraaie visualiseringen.

Zijn er nog vraagtekens bij de rol en het nut van wiskundeonderwijs? In het afgelopen jaar werd de vernieuwingscommissie cTWO (www.ctwo.nl) geconfronteerd met een discussie over de kern van de wiskunde. Wat behelst die? Haakjes wegwerken, vergelijkingen oplossen en functies differentiëren? Sommigen definiëren onze horizon zó dat er een klein perkje met hoge heesters overblijft.

Deze NWD toont de dynamiek van ons vak. Wiskunde is uitdagend en spannend. Dit derde lustrum laat weer eens zien dat de horizon verder ligt dan je denkt, maar ook dan nog geldt: echte wiskundeliefhebbers kijken verder dan de horizon.

Een inspirerende NWD2009 toegewenst!

Namens de organisatie,

Michiel Doorman
Freudenthal Instituut

Organisatorische mededelingen

De Nationale Wiskunde Dagen worden gehouden in NH Leeuwenhorst Hotel in Noordwijkerhout. Alle activiteiten vinden plaats onder één dak. In bijgevoegde folder wordt beschreven hoe u NH Leeuwenhorst Hotel kunt bereiken. U bent welkom op vrijdagochtend 6 februari vanaf 9.00 uur. Bij aankomst kunt u uw bagage kwijt in de daartoe aangewezen bagagekamers. Vanaf de lunchpauze kunt u de sleutels voor uw kamer ophalen bij de receptie van NH Leeuwenhorst.

De NWD vindt plaats in de Boston-, Cambridge- en Harvardzalen. Zie de plattegrond achter in dit boekje. De restaurants – Dalí en Gaudí – zijn links en rechts van de centrale bar. Deze bar bevindt zich achter de vernieuwde receptie bij de hoofdingang.

Busservice

Voor de treinreizigers is er een busservice geregeld. Er rijdt een extra bus van de Leeuwenhorst Express (fa. Beuk). Deze vertrekt om 10.05 uur vanaf station Leiden. Zaterdagmiddag na de lunch kunt u met de bus terug naar station Leiden. Het buskaartje (retour) koopt u in NH Leeuwenhorst bij het secretariaat van de NWD.

Programmaoverzicht

Het globale programmaoverzicht kunt u vinden op de binnenkant van de voorkaft van dit boekje. Het detailschema van de parallelsessies staat op de middenpagina's. Het schema van de NWD is als volgt: er zijn drie plenaire lezingen en vier blokken parallelsessies. Blok 2 is voornamelijk gereserveerd voor werkgroepen van 90 minuten.

Vooraanmelding

Voor *alle* parallelsessies kunt u van tevoren intekenen via de NWD-website: www.fi.uu.nl/nwd. De voorintekeningen worden in volgorde van binnenkomst verwerkt. Voorintekenen kan tot en met *zondag 1 februari*.

Op de inschrijffijsten die in NH Leeuwenhorst worden opgehangen, (en op uw badge) kunt u zien of u geplaatst bent in de sessie van uw keuze. Het is ook mogelijk ter plekke in te tekenen, maar u kunt dan alleen kiezen uit de sessies waar nog plaats is.

Teken alstublieft nooit in bij een werkgroep die al vol zit!

Lezingen en zalen

Alle plenaire lezingen worden gehouden in het Atrium. De zaalindeling van de parallelsessies wordt ter plekke bekend gemaakt.

Secretariaat

Het secretariaat van de NWD bevindt zich in Boston 10, vanaf de hoofdingang links. Het secretariaat is gedurende de conferentie vrijwel continu open en u kunt er met al uw vragen en opmerkingen terecht.

Overige activiteiten

In de Rotonde, Boston 12/14 en op de gangen is een informatiemarkt met stands van instanties die zich op een of andere wijze met wiskunde of wiskundeonderwijs bezighouden. Daarnaast zijn er diverse extra activiteiten in de wandelgangen en tijdens de pauzemomenten (zie verderop in deze gids).

Het avondprogramma speelt zich af rondom Boston 9. Daar kunt u muziek maken, spellen spelen of genieten van hoe anderen spelen.

Drankjes kunt u kopen met de kaart die tevens uw kamersleutel is. Bij inlevering van deze 'sleutel' bij de receptie betaalt u het openstaande bedrag op de kaart.

Ontbijt, lunches en diner vinden plaats in de restaurants van NH Leeuwenhorst.

Ten slotte verzoeken we u zaterdag vóór 10.30 uur uw kamer leeg achter te laten, consumpties en telefoonkosten af te rekenen bij de receptie van NH Leeuwenhorst en de sleutelkaart in te leveren. In de centrale hal bij de garderobe zijn kluisjes voor uw bagage.

Plenaire lezingen

Er staan drie plenaire lezingen op het programma. Deze vinden plaats in het Atrium.

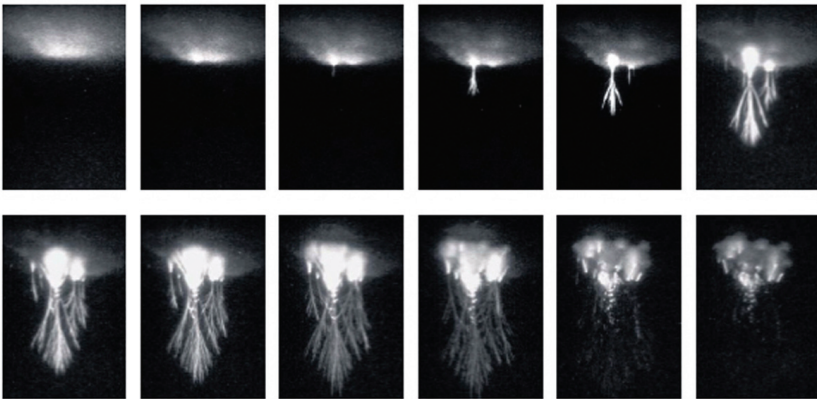
Greep op de bliksem

Prof.dr. Ute Ebert

Centrum Wiskunde & Informatica Amsterdam en TU Eindhoven

vrijdag 11.30-12.15 uur

Een onweerswolk scheidt elektrische ladingen en wekt daardoor sterke elektrische velden op binnen de wolk en erbuiten. Dan ontlaat de wolk zich, naar beneden, naar binnen en naar andere wolken toe en ook naar boven, en ik zal laten zien op welke verschillende manieren dat gebeurt. Ultrasnelle camera's laten dat namelijk nu eindelijk goed zien, en spriteontladingen boven onweerswolken zijn ook in het laboratorium na te bootsen met behulp van wetten over evenredige verbanden. Maar eigenlijk zijn de elektrische velden in en rond de wolk helemaal niet sterk genoeg om een elektrisch geleidend plasma aan te maken in de atmosfeer. Heeft de ontlading van de wolk hoog-energetische deeltjes uit het heelal nodig, zoals wetenschappers in 2005 voorgesteld hebben? En waar komt de röntgenstraling vandaan, die in verband met bliksemschichten waargenomen is? Komt die ook van de kosmische deeltjes? Ik zal een andere verklaring voorstellen, namelijk het wiskundig principe van de zogenoemde Laplace-groei, dat ook elders in de natuur werkzaam is. Dit principe verklaart de bundeling van elektrische krachten aan het punt van het groeiende ontladingskanaal en misschien ook de waargenomen röntgenstraling.



Een spriteontlading boven een onweerswolk

Ten aanval! In naam van de Koning (of Wetenschap)

Prof.dr. Jan de Lange
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht
vrijdag 20.00-21.00 uur

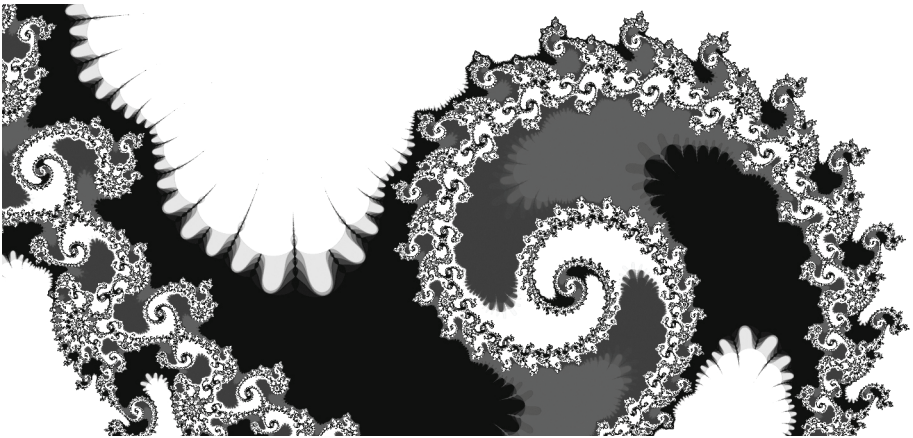
In tijden van gewapende conflicten komen wetenschappers vaak tot grote prestaties. Niet zelden vanuit edele motieven, soms onder grote druk van de politiek, maar ook gewoon uit carrièreperspectief.

Wat vaak onderbelicht blijft zijn de wat laag bij de grondse ‘uitvinders’ en ‘probleemoplossers’ die wel cruciale bijdragen hebben geleverd, maar vaak op heel verschillend niveau, en met soms ongelooflijk eenvoudige wetenschap. Dat ze daarbij persoonlijk wel eens tegen de grenzen van hun eigen ethiek aanliepen is welhaast vanzelfsprekend.

Chaos Games and Fractal Images

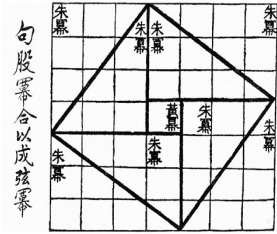
Robert Devaney
Boston University, USA
zaterdag 11.45-12.30 uur

In this lecture we will describe some of the beautiful images that arise from the ‘Chaos Game’. We will show how the simple steps of this game produce, when iterated millions of times, the intricate images known as fractals. We will describe some of the applications of this technique used in data compression as well as in Hollywood. We will also show some of the interesting mathematical games involving fractals that students can play online.



Verre wiskunde

De wiskunde die we tegenwoordig leren heeft vooral haar wortels in de Griekse en Romeinse beschaving: Pythagoras en Euclides zijn namen van wiskundigen die iedereen bekend in de oren klinken. Maar wie zeggen namen als Liu Hui of Matanga Muni iets? Zijn dit ook wiskundigen? Welzeker, alleen uit China en India. Dit thema zal gaan over wiskunde en wiskundigen van niet-westerse beschavingen: behalve China en India ook Japan, Iran en Afrika.



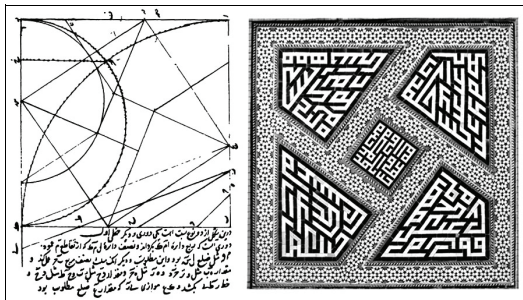
Math in the mosques of Iran

Behrooz Zabihian
 Saveh university, Iran
 vrijdag 14.00-14.45 uur
 herhaling: zaterdag 9.15-10.00 uur

Most of us have been fascinated at first glance by tessellations and tilings found in medieval buildings, mainly from the Islamic part of the world, ‘The Far Away’ one. The mysterious combinations of the simplest element, straight line, and colors and in few cases curves. Are they an abstract inspiration of artists and artisans from their world or realizations of mathematical-based concepts made by mathematicians from the Middle Ages? There are documented evidences indicating close contributions of artists and mathematicians both in construction of some of these tessellations.

Abul Wafa Buzjani (940, 990 A.D.) held sessions in Baghdad in which mathematicians and artisans were discussing about their approaches to problems regarding the geometry of tiling. One of these documents that drew attention during many decades is the one being kept in the National Library of France as ‘Persan 169’.

The part of this manuscript which is going to be described in this workshop is ‘On Interlocking of Similar or Congruent Figures’, a small chapter full of not mathematically proved instruction for constructing figures and tessellations that some of them have been used as ornaments in well-known medieval architectural masterpieces like Friday Mosques in Isfahan and Yazd.



Rekenmethoden in het oude China

Frits Veerman en Maria Velema
Faculteit Betawetenschappen, Universiteit Utrecht
vrijdag 15.30-17.00 uur (90 minuten)

Wie op Wikipedia zoekt naar Chinese reststelling vindt:

‘De Chinese reststelling is een stelling binnen de getaltheorie, een onderdeel van de wiskunde. De stelling werd voor het eerst beschreven in de vierde eeuw na Chr. door de Chinese wiskundige Sunzi (??) in zijn Sunzi Suanjing (????, het ‘rekenkundig handboek van Meester Sun’). De stelling werd opnieuw gepubliceerd in 1247, nu door de wiskundige Qin Jiushao.’

Naar aanleiding van een studiereis naar China in de zomer van 2008 hebben twaalf studenten uit verschillende jaren deelgenomen aan een seminarium over oude Chinese wiskunde onder leiding van Jan Hogendijk.

Frits heeft daarbij onderzoek gedaan naar rekenmethoden met telstokjes en het boek van meester Sun. Ook heeft hij verbanden met Indiase wiskunde onderzocht. Ver voordat in Europa gewerkt werd met een plaatstelsel voor getallen, rekenden de Chinezen met telboren waar ze stokjes op legden. Een rij vakjes stond voor achtereenvolgens eenheden, tientallen, enzovoort. Later werd het bord vervangen door een telraam zodat dit makkelijk meegenomen kon worden en bijvoorbeeld op de markt gebruikt. Er zijn vele theorieën over hoe dit systeem zich over de wereld heeft verspreid en hoe wij eraan komen.

Maria onderzocht een oplossingsmethode van Qin Jiushao voor een stelsel vergelijken die wij nu de Chinese reststelling noemen. Verrassend genoeg is deze methode makkelijker uit te voeren dan de methode die eerstejaarsstudenten nu krijgen. Wel moeten we de voorwaarden en bewijzen zelf toevoegen om te begrijpen hoe het werkt. Qin beschrijft namelijk enkel een stappenplan voor het oplossen en geeft zelf getalvoorbeelden die ‘toevalling’ uitkomen. Nu kunnen we laten zien dat deze voorbeelden aan bepaalde voorwaarden voldoen.

Afrika en wiskunde

Dr. Dirk Huylenbrouck
Sint-Lucas Architectuur, Brussel, België
vrijdag 15.30-16.30 uur (60 minuten)
herhaling: zaterdag 9.15-10.15 uur (60 minuten)

Wiskunde en Afrika, zelfs vandaag klinkt dit voor velen nog als een ongebruikelijke combinatie – zij het vooral in het navelstarende Vlaanderen. In de voordracht wordt de

politieke discussie echter uit de weg gegaan, want echte wiskundige demonstraties zijn overtuigender om de waarde in te schatten van de wiskundige verwezenlijkingen van het zwarte continent. En ze spreken voor zich: een breinbrekende basis 20-vermenigvuldiging volgens de Yoruba, een Ethiopische vermenigvuldiging die zo uit een boek voor computer programmeren kan komen, een denkspel dat de GSM Nokia 3310 haalde en waar pi in verscholen zit, meetkundige patronen die alle mogelijkheden volgens de groepentheorie opsommen, aanknopingspunten met de topologie of de grafentheorie, noem maar op.

De werkgroepleider demonstreert de Afrikaanse wiskundige hoogstandjes 'live', zij het op een vrij ludieke wijze, samen met vrijwilligers (die een geschenkje krijgen!). Er is begeleiding van talrijke filmfragmentjes van CNN tot The Simpsons, en sfeervolle achtergrondmuziek uit zijn theateroptreden met 'Dakar Electric', een groep percussionisten van Clouseau of andere Miles Davissen. Uiteindelijk droomt eenieder wiskundig weg bij het idee om de openingsscène te realiseren van '2001: A Space Odyssey'.



Zie de website: <http://etopia.sintlucas.be/3.14/>

Wiskundige voorkennis is niet vereist, al kan ze toelaten diepere betekenissen te ontdekken.

Sangaku: de zen van wiskunde

Arnout Jaspers

Veen magazins, Diemen-Zuid

zaterdag 10.30-11.15 uur

Een sangaku is een eeuwenoud Japans ‘wiskundetablet’, een gekleurde tekening op een houten paneeltje dat in een tempel was opgehangen. De tekening beeldt een stelling uit de vlakke meetkunde uit. Kenmerkend voor de sangaku is de zenachtige beknoptheid: meestal staat het bewijs voor de stelling niet op het tablet, en soms zelfs de te bewijzen stelling niet. De ware liefhebber van wiskunde moet aan het diagram genoeg hebben om zowel de stelling als het bewijs af te leiden. Uit de Edo-periode (1603-1867) zijn zo’n 800 sangaku’s bewaard gebleven.

Het wiskundetijdschrift Pythagoras heeft sinds september 2007 een sangaku op de achterpagina van elk nummer. Conform de Japanse traditie bestaat deze sangaku uit een diagram zonder tekst. De oplossingen publiceren we pas aan het eind van een hele jaargang. Omdat we liefst nieuwe sangaku’s publiceren, ging ondergetekende (hoofdredacteur van Pythagoras) met dit idee aan de slag. Het bleek een tamelijk verslavende hobby. Het wonderlijkste aspect van het zoeken naar sangaku’s – dat uiteraard ook de meeste voldoening geeft – is dat juist wiskundig elegante stellingen de visueel meest aantrekkelijke diagrammen lijken op te leveren.



In mijn lezing zal ik kort de historische achtergrond van de sangaku behandelen. Vervolgens richten we ons op enkele recente Pythagoras-sangaku’s, waarbij het publiek wordt uitgenodigd ter plekke de oplossing te vinden. Afrondend probeer ik, in samenwerking met het publiek, criteria te formuleren waaraan een goede sangaku moet voldoen, zowel in esthetische als in wiskundige zin.

Vergeeten helden

Newton, Leibniz en Gauss! Namen van wiskundigen die iedereen kent. Of Andrew Wiles, degene die in 1995 de laatste stelling van Fermat bewees.

Wie echter bij De Slegte oude wiskundeboeken doorsnuffelt, komt regelmatig de namen van Bottema, Schuh, Van der Waerden of Dijksterhuis tegen. Wat voor personen schuilen achter die namen? Welke wiskunde deden zij? Wat is hun belang voor de moderne wiskunde?

Dit thema belicht de vergeeten wiskundige helden van het begin van de twintigste eeuw. En natuurlijk hun wiskunde: de vlakke meetkunde van Bottema, de algebra van Van der Waerden, de wiskundendidactiek van Dijksterhuis en de recreatieve wiskunde van Schuh.

De algebra van Bartel van der Waerden

Prof.dr. Jaap Top

Faculteit Wiskunde en Infomatica, Rijksuniversiteit Groningen

vrijdag 14.00-14.45 uur

Van der Waerden was nog maar 24 jaar oud, toen meetkundehoogleraar Barrau z'n baan in Groningen ruilde voor eentje in Utrecht en hij als opvolger werd voorgedragen. In 1928, op z'n 25ste kwam hij naar Groningen, waar hij ongeveer twee en een half jaar bleef. Deze korte periode besteedde hij niet alleen aan lange verblijven in het buitenland, verkeringstijd aldaar en een huwelijk, maar ook aan het schrijven van een algebraboek. De eerste druk verscheen in 1930 en het is een van de meest invloedrijke wiskundeboeken van de vorige eeuw. Van der Waerden is dan ook absoluut geen 'Vergeeten Held'. In de voordracht worden hiervan meer details gegeven, plus een indruk wat in dit verrassend leesbare boek te vinden is.

De vlakke meetkunde van Bottema

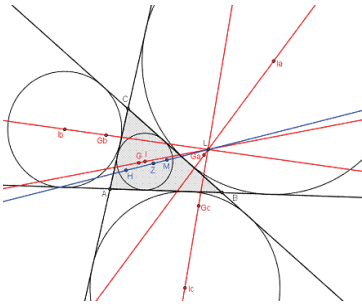
Prof.dr. Jan Aarts en Drs. Agnes Verweij

Faculteit EWI, TU Delft

vrijdag 15.30-17.00 uur (90 minuten)

Bij uitgever Epsilon verscheen in 1987 het boekje Hoofdstukken uit de Elementaire Meetkunde van prof.dr. Oene Bottema. In zijn voorwoord karakteriseert de auteur het werk als een bloemlezing van wiskundige waarheden, een subjectieve keuze bepaald door persoonlijke voorkeur van de schrijver, en toegankelijk voor velen (geen axiomatic, geen constructies, alleen vlakke meetkunde). De tweede editie uit 1987, heruitgegeven in 1997, verschilt van de eerste uitgave van 1941 in de Servire Encyclopaedie

vooral in het systematisch gebruik van coördinaten. In de tweede editie worden tal van eigenschappen behandeld met driehoekskoördinaten (ook wel trilineaire coördinaten genoemd). Men zou dit als een nieuw element in de meetkundige behandeling kunnen zien.



In de workshop gaan we kriskras door het boekje van Bottema heen. Aan de hand van een opgavenbundel die aan de deelnemers wordt uitgereikt, worden met behulp van driehoekskoördinaten vele oude stellingen (Ceva en Menelaus) opgehaald en komen tal van merkwaardige punten (Gergonne, Nagel, De Longchamps) aan de orde. De actualiteit van het onderwerp komt tot uiting in de behandeling van opgave 1 van de IMO (Pythagoras, september 2008) en de stelling van Longuet-Higgins (The Mathematician Intel-

ligencer 2000, p. 54-59) over het samenkomen van vier merkwaardige lijnen in een punt op de lijn van Euler.

Voor deelname aan de workshop is basiskennis van de vlakke meetkunde gewenst. De workshop is vooral nuttig en interessant voor docenten die op het vwo wiskunde B en/of wiskunde D geven.

De wiskundendidactiek van Dijksterhuis

Prof.dr. Klaas van Berkel
Rudolf Agricola Instituut, Rijksuniversiteit Groningen
vrijdag 14.00-14.45 uur

Klaas van Berkel is Dijksterhuis-expert en zal zijn ideeën over het nut en de didactiek van de wiskunde belichten. Enkele citaten:

“E.J. Dijksterhuis stamde uit een Gronings onderwijzers-geslacht. Zijn grootvader was ‘hoofd eener lagere school’ in Grijskerk geweest, zijn vader had het tot directeur van de kleine Rijks-hbs in Tilburg gebracht. (...) Zijn actieve bemoeienis met de hervorming van het wiskundeonderwijs leidde ertoe dat Dijksterhuis in 1925 secretaris werd van een commissie die in opdracht van het College van Inspecteurs van het Middelbaar Onderwijs een nieuw programma voor het wiskundeonderwijs aan de hbs moest opstellen, naar de voorzitter de commissie-Beth genoemd. Het nieuwe programma, opgesteld door Dijksterhuis, was geheel in de geest van de strenge richting.



Uitgangspunt was de vormende waarde van de wiskunde. Wiskunde, aldus de commissie, is niet alleen een domein van onze kennis, maar ook en vooral een stijl van denken, die door haar zuiverheid en eerlijkheid ook ten goede komt aan het denkvermogen van leerlingen die in hun latere beroepspraktijk geen direct gebruik meer maken van wiskundige kennis. Praktische vaardigheid (sommen maken) is minder belangrijk dan inzicht in de principes van de wiskunde; leerlingen moeten steeds kunnen verantwoorden waarom ze een bepaalde berekening zo en niet anders uitvoerden. Later zou Dijksterhuis zijn ideale, op inzicht en niet op vaardigheid mikkende onderwijs ‘epistemisch’ noemen – een term ontleend aan zijn belangrijkste inspiratiebron, de Griekse wijsgeer Plato. (...) Dijksterhuis combineerde zijn didactische belangstelling met een zo mogelijk nog grotere interesse in de geschiedenis van de wiskunde en de natuurwetenschappen. In het leerproces dat leerlingen doormaken, herhaalt zich volgens hem in beknopte vorm de geschiedenis van de wetenschap en voor leraren is het daarom van groot belang inzicht te hebben in de geschiedenis van hun wetenschapsgebied. (...) Geleidelijk ging hij naast het beoefenen van de wetenschapsgeschiedenis ook de algemene, culturele betekenis van de exacte wetenschap benadrukken. Werken van meer dan strikt historisch-wiskundige aard waren de biografie van Stevin (1943) en zijn magnum opus: De mechanisering van het wereldbeeld (1950), al is de centrale stelling in dat boek wel dat de geschiedenis van de natuurwetenschap gekenmerkt wordt door een proces van geleidelijke mathematisering”.

(zie: <http://www.thuisinbrabant.nl/biografieen.asp?ccidentifier=678>)

De wonderlijke problemen van Fred Schuh

Dr. Chris Zaal

Instituut voor Wiskunde, Universiteit van Amsterdam

zaterdag 10.30-11.15 uur

Wie in het antiquariaat van De Slegte de planken met oude wiskundeboeken doorsnuffelt, kan de naam van Fred Schuh niet missen. Een veelschrijver was hij, vooral van leerboeken: Compendium der hoogere wiskunde, Beknopte Hoogere Algebra, Leerboek der theoretische mechanica, Leerboek der differentiaal- en integraalrekening. Boze tongen beweren dat hij deze boeken vooral schreef uit een geldbehoefte die veroorzaakt werd door zijn losbandige levensstijl.

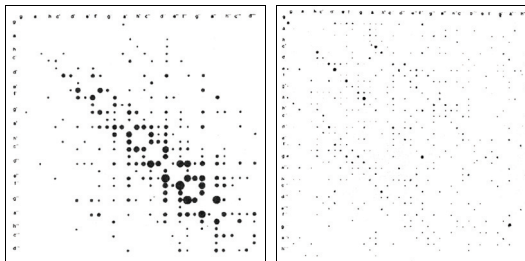
Een markant persoon was Schuh zeker – over zijn doen en laten bestaat een aantal sterke (kroeg)verhalen die in deze workshop zeker aan de orde zullen komen. Minder bekend is dat Schuh ook een van de eerste wiskundepopularisatoren geweest is, met boeken als Wonderlijke problemen, Wiskundige puzzels en spelen en Spelen met getallen. Met geduld, precisie en smaak behandelt Schuh daarin (priem)getallenraadsels, dominopuzzels, Boter, Kaas en Eieren, overgietproblemen, betoverde kooien – wonderlijke problemen van Schuh die de hoofdmoot van deze workshop vormen.

Kunst in getallen

Kunst is informatie en informatie kan worden gecodeerd in getallen. Elk kunstwerk is dus in principe een getal (maar niet elk getal is kunst).

Eigenschappen als kleur, structuur, stijl en compositie kunnen in getallen worden omgezet. Relaties hiertussen karakteriseren de artiest. Zo worden vervalsingen ontmaskerd en zoekmachines geprogrammeerd.

Muziek levert ook getallen. Frequenties waarmee toonafstanden tussen twee opeenvolgende tonen voorkomen zijn in onderstaande matrices afgebeeld. Hoe dikker de stip, hoe groter de frequentie. Links staan de overgangen van de eerste viool uit het concert voor twee violen van Bach en rechts die van de viool uit het striktrio opus 20 van Webern.



Kortom, verscheidene kunstvormen zullen de revue passeren. Bij iedere kunstvorm wordt ingegaan op coderingen en hun toepassingen. Tot slot zullen een wiskundige en een kunstenaar samen kunst en getal integreren.

Tellen aan tekst

Dr. Hans van Halteren

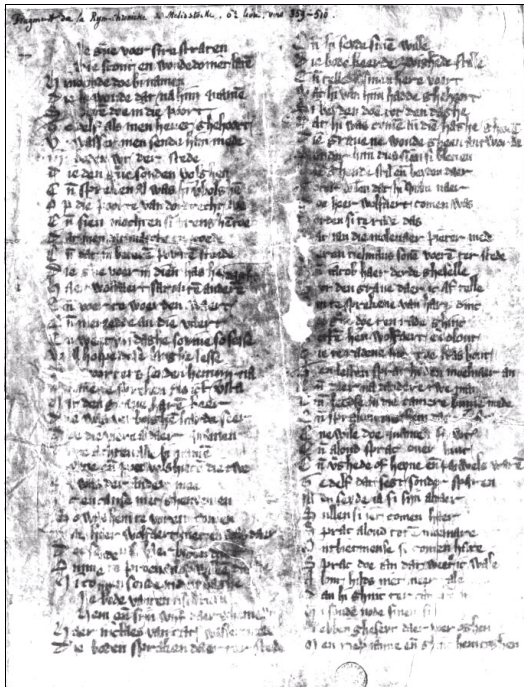
Faculteit Letteren, Radboud Universiteit, Nijmegen

vrijdag 14.00-14.45 uur

Het lijkt er op het eerste gezicht op dat een taal, zoals het Nederlands, min of meer vastligt en dat we allemaal dezelfde regels volgen voor het gebruik van woorden en grammatica. De werkelijkheid is wat minder rigide. Flink wat minder. Iedere gebruiker van een taal heeft zijn heel eigen versie, die min of meer toevallig ontstaan is door alle blootstelling aan de taal sinds (en misschien zelfs wel voor) de geboorte. Die eigen versie, het ideolect, kenmerkt zich soms door afwijkende mogelijk- en onmogelijkheden, maar meestal meer door afwijkende gebruiksfrequenties van de taalbouwstenen. Het is natuurlijk wel zo dat het leerproces sterk gestuurd wordt door de omgeving, zodat al die ideolecten toch zo veel gemeen hebben dat de taal als communicatiemiddel kan worden gebruikt.

De uniekheid van het ideolect stelt ons in staat om van teksten te kunnen bepalen door wie ze zijn geproduceerd. De tak van wetenschap die zich daarmee bezighoudt, ook wel bekend onder de naam stylometrie, heeft de laatste jaren een stevige stap voorwaarts kunnen maken door de ontwikkeling van nieuwe machineleertekniken als Support Vector Machines en kan nu vaker ook praktisch worden ingezet voor forensische, historische en literaire vragen.

In deze lezing zal met name het laatste onderwerp aan de orde komen. Wie schreef dit boek? Is het toch die bekende schrijver onder een pseudoniem? Of is er misschien sprake van plagiaat? Als hoofdvoorbeeld treedt op de Rijmkroniek van Holland, en wel de versie door Melis Stoke uit het begin van de 14de-eeuw. Hiervoor vraagt men zich namelijk af waar de overgang is van de oorsponkelijke 13de-eeuwse tekst en de aanvulling door Stoke. Eens kijken wat de nieuwe technieken ervan zeggen...



Benodigde voorkennis: voor het oppervlakkig kunnen volgen van de lezing geen. Voor een betere appreciatie van de toegepaste technieken (in wisselende intensiteit) zijn nuttig:

- voorstellingsvermogen van meerdimensionale ruimtes, vectoren en hypervlakken
- statistiek op het niveau van gemiddelde en standaarddeviatie

Mathematics and the groove in music

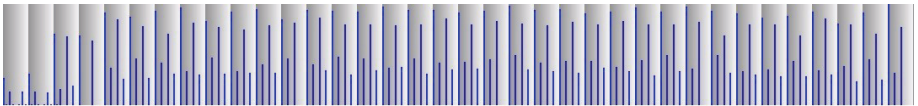
Dr. Anja Volk

Faculteit Bètawetenschappen, Universiteit Utrecht

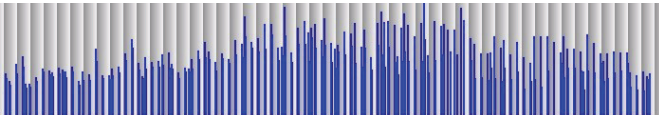
vrijdag 15.30-17.00 uur (90 minuten)

The relation between mathematics and music has a long history in science. It comprises diverse approaches such as the Pythagorean School, the study of music in the medieval sciences, the works by Rene Descartes, Gottfried Wilhelm Leibniz, Leonhard Euler or Hermann von Helmholtz, and it attracted an intensified interest since the late 20th century. Music theorists discovered mathematics as a powerful means to describe structural approaches to music and thus created the field of Mathematical Music Theory. Sound technology used applied mathematics to analyze and synthesize musical sound, computer science and cognitive approaches made use of mathematical descriptions of music.

In this talk we present a recent mathematical model on the temporal organization of musical pieces that roots in Mathematical Music Theory. The model of Inner Metric Analysis measures the strength of certain pulses inherent in the music in order to determine a metric weight for each note of a musical piece that describes its contribution to regularity in time. The corresponding metric weight profile for a piece of music then allows the exploration of different questions related to the rhythmic-metric structure of the piece, such as to why it is easy or difficult to tap along a certain type of music. For instance, Figure 1 gives an example of a metric weight profile showing a very regular temporal structure of a ragtime piece with layers occurring, while Figure 2 presents a more irregular weight profile with no layers for Stravinsky's *Le Sacre du printemps*. This piece is well known for its rhythmic complexity. The talk discusses applications of Inner Metric Analysis to problems residing in different research areas that make use of mathematical modeling such as music theory, cognition and retrieval.



Figuur 1: Regular metric weight profile for the Scott Joplin's Nonpareil Ragtime



Figuur 2: Irregular metric weight profile for Igor Stravinsky's Le Sacre du printemps

Ook een meesterwerk is uiteindelijk niet meer dan een bak getallen ...

Dr.ir. Jan C.A. van der Lubbe

Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica, TU Delft

zaterdag 9.15-10.00 uur

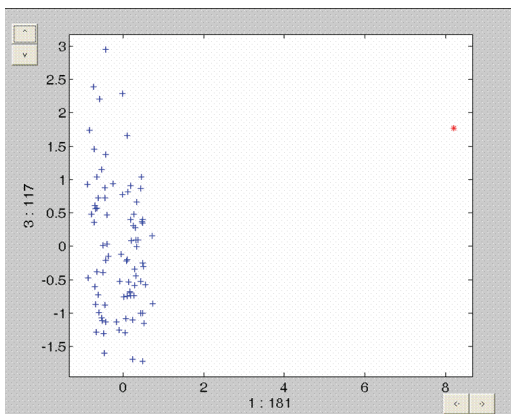
In de kunstwereld gaat het vaak om vragen als: 'Dit schilderij is duidelijk een 17de-eeuws schilderij. Het is helaas niet gesigneerd. Is het misschien een schilderij van de hand van Vermeer? Of: 'Dat schilderij is wel gesigneerd als een Karel Appel, maar is het wel een echte of betreft het een vervalsing?'

Tot nu toe werden dit soort vragen beantwoord door experts die door nauwkeurige visuele inspectie van de schilderijen en hun kenmerken tot een oordeel probeerden te komen. De laatste jaren wordt er steeds meer onderzoek gedaan naar hoe computers efficiënt ingezet kunnen worden bij het bepalen van de echtheid van schilderijen of bij het toeschrijven aan een bepaalde kunstenaar.

In de voordracht wordt aan de hand van voorbeelden en beeldmateriaal getoond hoe een en ander in zijn werk gaat. Getoond wordt hoe computers stap voor stap leren ontdekken wat een Van Gogh nu een Van Gogh maakt. Patroonherkenning en clusteranalyse spelen daarbij een belangrijke rol. Je kunt natuurlijk ook naar de drager van een kunstwerk kijken. Bij de studie van kunst op papier (etsen, aquarellen etc.) blijkt papieranalyse van belang. De computer analyseert de papierstructuur en kan op basis daarvan feilloos bepalen of een Rembrandt-ets ook daadwerkelijk van de hand van Rembrandt is, of dat het een vervalsing betreft.



een echte Karel Appel?



*kenmerkruimte: links de echte Appels,
rechts een valse Appel*

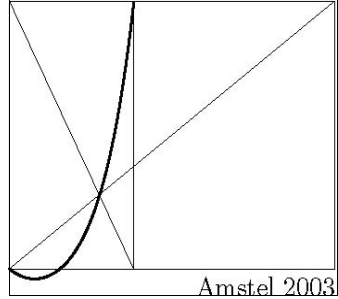
Wiskunde in het werk van Jan Andriessse

Prof.dr. Jan Aarts en Jan Andriessse

Faculteit EWI, TU Delft

zaterdag 10.30-11.15 uur

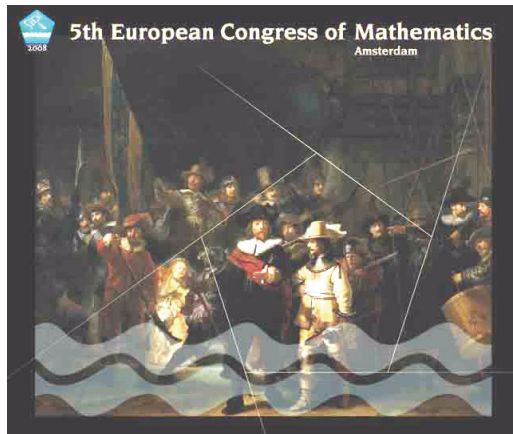
In het werk van Jan Andriessse zijn er vanuit wiskundig oogpunt twee opvallende kenmerken: de gulden snede en de kettinglijn. De wiskundige herkent het systematisch gebruik van de gulden snede in de dimensionering van het kunstwerk: niet alleen in de contouren, maar ook in de ordening van de details binnen het kunstwerk. In verschillende werken is er een materiële ketting opgenomen; de ketting is geen additioneel element, maar door de schikking van de geschilderde onderdelen een integraal onderdeel van het werk. Jan Andriessse zegt: 'de kettingboog genereert zichzelf, ieder deel in equilibrium, belichaamt de zwaartekracht als ruggegraat van het werk... In een dialoog onderwerpen Jan Aarts en Jan Andriessse de wiskunde in het werk van Jan Andriessse aan een nader onderzoek aan de hand van het schetsontwerp vergaderzaal Raad van State: *7 curven, 1 regenboog, 1 ladder, de Studie van Water en Amstel 2003*.



Wiskundig onderzoek in Nederland

Het Nederlands wiskundig onderzoek is breed en internationaal georiënteerd, waarbij de onderzoekers netwerken onderhouden over de hele wereld. Uit allerlei metingen blijkt dat ons onderzoek mondiaal gezien een zeer goede partij meeblaast.

Nederland was deze zomer de gastheer van het 5^e European Mathematical Congress (www.5ecm.nl). Na 1954, toen het 12^e International Congress of Mathematicians in Amsterdam werd gehouden – met plenaire voordrachten in het Concertgebouw – was dit de eerste keer dat er op deze schaal een bijeenkomst van wiskundigen in Nederland plaatsvond.



Het wiskundig onderzoek aan de Nederlandse universiteiten wordt inhoudelijk geclusterd onder auspiciën van NWO en financieel gesteund door de ministeries van OCW en EZ. Op dit moment zijn er drie clusters: GQT (Geometry and Quantum Theorie), DIAMANT (Discrete, Interactive & Algorithmic Mathematics, Algebra and Number Theory) en NDNS+ (Nonlinear Dynamics of Natural Systems). Een vierde cluster over stochastiek is in de maak. Elk van de drie clusters zal op deze NWD een voordracht verzorgen.

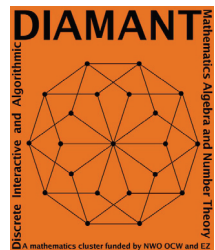
Voorspellen met een Playstation 3

Benne de Weger

EiPSI TU Eindhoven

vrijdag 14.00-14.45 uur

Een *hash* van een document is een getal dat makkelijk uit het document berekend kan worden en dat het document op unieke wijze identificeert, maar niets prijsgeeft van de eigenlijke inhoud



van het document. Verschillende documenten geven, als het goed is, verschillende hashes. Het is zo goed als onmogelijk om bij een gegeven hash een document te maken met juist dié hash.



Cryptografische hashes kunnen daarom voor *commitments* gebruikt worden. Een commitment is een verifieerbaar bewijs van kennis van een geheim.

In december 2007, bijna een jaar voor de Amerikaanse presidentsverkiezingen, maakten wij een pdf-document waarin de voorspelling staat dat Barack Obama de volgende president van de Verenigde Staten zal worden. Dit document hielden wij geheim: wij wilden natuurlijk niet de verkiezingen beïnvloeden.

Wij publiceerden wel al in december 2007 een hash van het document op onze website. Deze hash dient als bewijs van het feit dat wij toen al over dit document beschikten. Na de verkiezingen in november 2008, toen duidelijk was geworden dat onze voorspelling (natuurlijk!) was uitgekomen, maakten we het document met de voorspelling openbaar. Nu kan iedereen controleren dat de al in 2007 gepubliceerde hashwaarde inderdaad bij deze voorspelling hoort. Zo toont deze commitment op cryptografisch sterke wijze aan dat wij voorspellende gaven bezitten. Of ... stinkt er hier iets? En wat heeft dit nu met een Playstation3 te maken?

Zie de website: <http://www.win.tue.nl/hashclash/Nostradamus/>

In samenwerking met: Marc Steven (CWI Amsterdam) en Arjen Lenstra, EPFL Lausanne

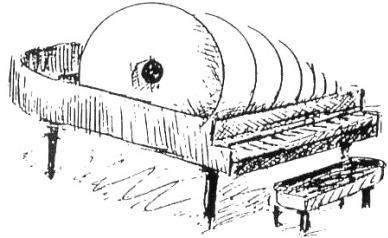
Listen very carefully...

Prof.dr. Gunther Cornelissen
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht
zaterdag 9.15-10.00 uur

Het coloriet van een muziekinstrument zit in de tonen en boventonen. Hoe beschrijf je dat met wiskunde? We bekijken in deze lezing een trillende snaar (daarvoor hoef je enkel sinussen te kennen), en daarna trommels in allerlei vormen. Welke eigenschappen van deze instrumenten zijn ‘ hoorbaar ’, dat wil zeggen vast te stellen door enkel je oren te gebruiken (ogen dicht en handen af!). Oppervlakte, omtrek, vorm? Dit probleem is te analyseren met behulp van de golfvergelijking. Wie passerden de revue: natuurkundige Hendrik Lorentz, wiskundigen Hermann Weyl en Mark Kac. Wat kun je hiervan op de middelbare school gebruiken? Bijvoorbeeld geluidsanalyse bij het invoeren van trigonometrische functies; herschalen, verschuiven en optellen van functies ‘ hoorbaar ’ maken.

Deze lezing hoort bij het nationale wiskunde-onderzoekscluster ‘Geometry and Quantum Theory’; daarin wordt onder andere bestudeerd welke informatie er in meer algemene trillende structuren is te vinden, in het bijzonder door kwantummechanisch te luisteren.

Kom naar de lezing, sluit je ogen, en droom weg bij een tweestemmige inventie van Bach, gespeeld op een fietsbandvormig gestemde piano.



een toruspiano, door Sara Nemeth

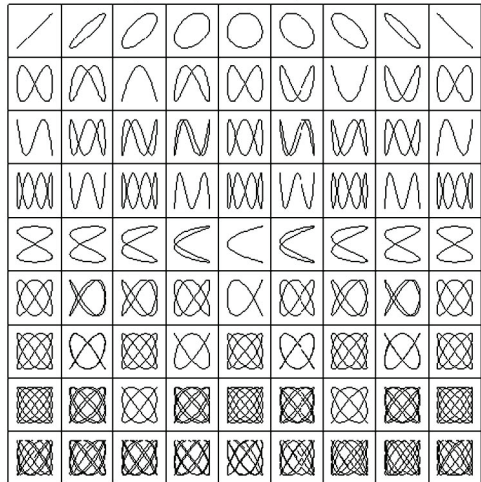
Voorkennis: trigonometrie, afgeleiden.

Trillingen en resonantie

Dr. Heinz Hanssmann
 Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht
 zaterdag 10.30-11.15 uur

Trillingen zijn een dagelijks verschijnsel dat we overal tegenkomen. In het ‘echte leven’ gaat hiervoor demping gepaard met aandrijving; vanuit wiskundig oogpunt is het handiger om de onderliggende dynamica wrijvingsvrij en energiebehoudend te modelleren. Superpositie van twee ééndimensionale periodieke bewegingen leidt dan tot gekoppelde trillingen en in geval van resonantie tussen de bijbehorende frequenties komen we onderstaande Lissajous-figuren tegen.

We zullen zien hoe deze fenomenen ontstaan, wat ze betekenen en waarom we ze niet alleen in de geïdealiseerde wereld van laboratoria tegenkomen.

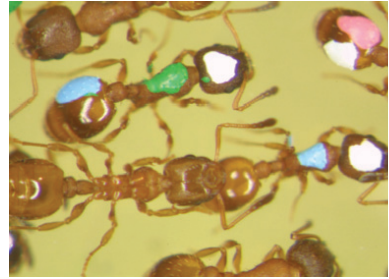


Deze lezing hoort bij het nationale wiskunde-onderzoekscluster ‘Nonlinear Dynamics of Natural Systems’; daarin worden de gevolgen van resonantie ook in meer algemene dynamische systemen bestudeerd.

Voorkennis: afgeleiden, meetkundig voorstellingsvermogen.

Wiskunde en biologie

Op steeds meer fronten speelt wiskunde een belangrijke rol in de biologie en biowetenschappen. Of het nu gaat om het ontrafelen van de genetische code, het beschrijven van groeiprocesen, de intelligentie van een mierenkolonie, het doorgronden van vormen, of het begrijpen van DNA-structuren, wiskunde is steeds prominenter aanwezig. In de workshops van dit thema zoomen we in op verrassende en uiteenlopende toepassingen.



Hoe modeller je een organisme? Wiskunde in de moderne biologie

Dr. Stan Marée

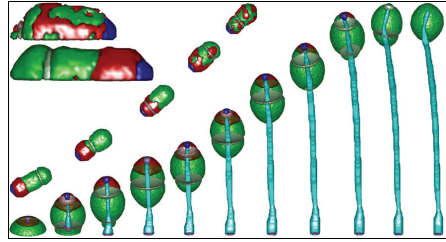
Departement Biologie, Universiteit Utrecht

vrijdag 14.00-14.45 uur

Aan het begin van deze eeuw is de volledige menselijke DNA-code beschikbaar gekomen, in hoog tempo gevolgd door de sequenties van vele andere organismen. Deze ontwikkeling heeft de bioinformatica in een stroomversnelling gebracht, het onderzoeksveld waarbij verscheidene wiskundige technieken worden gebruikt om de betekenis van een DNA-sequentie te achterhalen, maar ook die van eiwitten, van metabole netwerken, enzovoorts. Die genen en eiwitten werken in de cel samen en beïnvloeden elkaar, waarbij allerhande terugkoppelingen en versterkingen plaatsvinden. De cellen vormen functionele weefsels en organen, en dat alles tezamen een organisme. Ook tussen die verschillende niveaus van organisatie vinden steeds terugkoppelingen en versterkingen plaats. De systeembioïologie probeert deze complexe organisatie te ontrafelen, zonder het overzicht te verliezen, want het geheel blijkt meer dan de som der delen. Zo'n analyse van de complexiteit van het leven lukt alleen met wiskundige modellen, omdat onze intuïtie ons normaal gesproken hopeloos in de steek laat.

In mijn presentatie zal ik laten zien dat, als we de complexiteit proberen te doorgronden naast genetica, zelforganisatie en ruimtelijke patronen de toverwoorden zijn. De strategie die we gebruiken is om modellen te ontwikkelen die de dynamica beschrijven op meerdere niveaus. De wiskunde is over het algemeen niet al te lastig en de interacties tussen cellen ook niet al te moeilijk, we zoeken naar eenvoudige beschrijvingen van de biologische kennis. Maar het samenspel tussen al die verschillende niveaus blijkt vaak te leiden tot werkelijk 'levensechte' patronen.

Een prachtig voorbeeld is het exciteerbaar medium, een wiskundig principe dat zowel het kloppen van het hart kan verklaren (maar ook dodelijk hartfalen!), alsmede de volledige levenscyclus van de slijmschimmel (zie figuur). Het toont aan hoe wiskunde essentieel is om de kern van biologie te kunnen doorgronden.



Wiskunde en biologie

Gilberte Verbeeck

Sint-Jozefinstituut, Essen, België

vrijdag 15.30-17.00 uur (90 minuten)

herhaling: zaterdag 10.30-11.30 (60 minuten)

Er zijn vele domeinen waarin wiskunde en biologie elkaar ontmoeten. Enerzijds vind je in biologieschoolboeken heel wat grafiekjes en opdrachten die niet zouden misstaan in een wiskundeboek. Anderzijds wordt, vooral in de hogere jaren, wiskunde gebruikt om moeilijkere biologische onderwerpen te beschrijven. Hier staat wiskunde eerder ten dienste van de biologie. Twee leerkrachten die elk een andere discipline geven – de ene wiskunde, de andere biologie – staken de koppen bij elkaar en gingen op zoek naar de banden tussen de twee vakken. Dit resulteerde in een aantal lesideeën over groei, het prooi-roofdiermodel, BMI, genetica, statistiek en populatiedynamiek.

Tijdens de sessie stellen we lesmateriaal voor en kunnen de deelnemers één werktekst uitproberen zodat men proeft van de bruikbaarheid van het aangeboden materiaal. Sommige onderwerpen zijn geschikt voor een breed publiek van leerlingen, andere onderwerpen zijn eerder geschikt voor sterkere leerlingen. De deelnemers zullen enige vaardigheid verwerven in het leggen van verbanden tussen biologie en wiskunde.



Het wiskundige brein van de mier

Dr. Bob Planqué

Afdeling Wiskunde, Vrije Universiteit, Amsterdam

zaterdag 9.15-10.00 uur

Kolonies mieren vormen een van de wonderen der natuur, met zijn duizenden nietige insectjes die complexe maatschappijen vormen, ‘altijd hard werken’, en zeer goed georganiseerd zijn. Ze zijn volgens sommige biologen de eigenlijke uitvinders van de landbouw en hebben miljoenen jaren geleden al een industriële revolutie ondergaan. Maar hoe slim zijn mieren eigenlijk? Met andere woorden, hoeveel van de complexiteit op kolonieniveau valt toe te schrijven aan de complexiteit van de individuele mier? De wiskunde vormt, samen met experimentele biologie, een belangrijk onderdeel in het onderzoek naar deze vragen.

Tijdens deze workshop zal een aantal fenomenen aan het licht komen waarin het wiskundig karakter van mieren – als individu of als kolonie – wordt bekeken. Mieren blijken bijvoorbeeld een verbazingwekkend simpel maar krachtig algoritme te gebruiken om groottes van ruimtes te schatten, gerelateerd aan een bekende manier om pi te benaderen. Op het collectieve niveau gebruiken mieren ook verschillende vormen van gedrag om informatie over te dragen, en zich binnen in het nest te organiseren. We zullen een aantal wiskundige modellen bekijken, meestal gebruikmakend van eenvoudige differentiaalvergelijkingen.

Onderwerpen die hier de revue zullen passeren zijn emigraties van kolonies naar nieuwe nesten, het collectief zoeken naar voedsel en de organisatie van de mierenkolonie binnen in het nest. De nadruk komt hierbij te liggen op het bespreken van de verschillende soorten modellen (stochastisch of deterministisch), en de inzichten die elk type te bieden heeft.

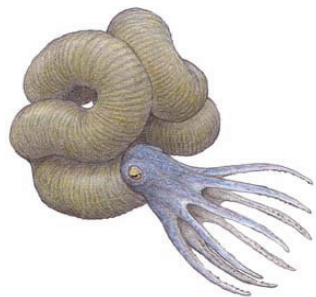
Simpele spiralen en sublieme slakken

Dr. Sander Kranenbarg

Leerstoelgroep Experimentele Zoölogie, Wageningen

zaterdag 10.30-11.15 uur

Weekdieren zoals slakken en tweekleppigen hebben geen inwendig skelet. Ze zoeken vaak bescherming in een uitwendig kalkskelet. Iedereen kent dit skelet wel in de vorm van de schelp van een mossel of het huisje van de tuinslak. Maar het skelet van weekdieren is er in vele vormen en kleuren. Een exotisch voorbeeld is het skelet van de uitgestorven ammoniet *Nipponites mirabilis* (zie figuur).



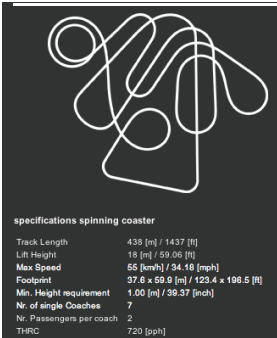
Ondanks de enorme morfologische diversiteit, is er een verrassend eenvoudig mechanisme waarmee de biologische variatie verklaard kan worden. Dit mechanisme is gebaseerd op de logaritmische spiraal, die in allerlei biologische fenomenen terug te vinden is. Naast het uitwendige skelet van weekdieren vind je de logaritmische spiraal in hoorns en slagstanden, maar ook in de positie van bladeren aan een tak of de plaatsing van zaden in het hart van een zonnebloem.

In deze presentatie wil ik u graag meenemen in de fascinatie dat zo'n simpel principe zulke complexe resultaten kan opleveren.

Pretparken en logistiek

Wiskunde wordt pas echt alledaags in de logistiek. In het bijzonder wanneer het gaat om goederenstromen en voorraadbeheer. Van Nederland distributieland tot het pakje boter in de winkel. Welke wiskunde gaat schuil achter de gevulde schappen van onze supermarkt?

Iets minder alledaags zijn ritjes in grote pretparken. Eén van 's werelds grootste achtbaanbouwers laat zien hoe dat zonder wiskunde niet zou kunnen. Naast deze presentaties zijn er twee werkgroepen rond kermisattracties.



Reuzenrad: aan de hand van een schaalmodel van een reuzenrad (een fietswiel) onderzoeken we kijkhoeken vanaf verschillende posities. Met de meetresultaten maken we een schaaltekening en bepalen de hoogte van het reuzenrad.

Skydiver: een voorbeeld waarin theorie en praktijk hand in hand gaan. Bij het meten en modelleren van lengte en slingertijd, staat het gebruik van het programma VU-grafiek centraal.

Deelnemers krijgen instructiebladen mee, zodat ze na het weekend hiermee aan de slag kunnen in hun klas.

De wiskunde achter de containerlogistiek

Dr. Iris Vis

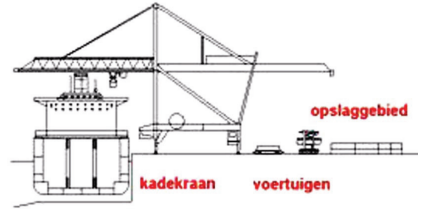
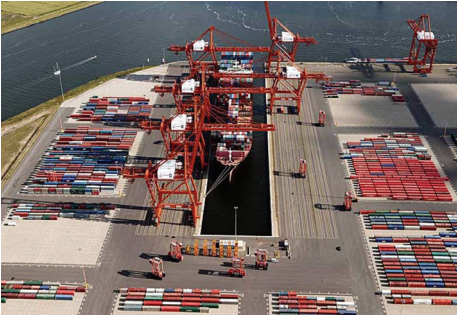
Faculteit der Economische Wetenschappen en Bedrijfskunde

Vrije Universiteit Amsterdam

vrijdag 14.00-14.45 uur

Met een jaarlijkse groei van 10% overvleugelt de containermarkt momenteel de groei van de wereldeconomie. In 2006 werden honderden miljoenen containers getransporteerd over de hele wereld. Bijna de helft van deze containers gaat via de 20 grootste havens in de wereld, waaronder Rotterdam. Om deze razendsnelle groei bij te kunnen houden, groeit ook de vloot van containerschepen jaarlijks in aantal en capaciteit. De tijdfactor is van groot belang bij containertransporten. Het overslagproces van containers in een haven wordt gezien als het duurste onderdeel omdat er geen waarde wordt toegevoegd, het schip ligt immers stil. De uitdaging voor havens is dan ook om de aanmeertijd van een schip te minimaliseren om zo rederijen tevreden te stellen en de concurrentie voor te blijven. Om dit doel te bereiken moet het terminalmanagement vele keuzes maken bij elk van de logistieke processen die een rol spelen bij het efficiënt lossen en laden van de schepen. Toegepaste wiskunde speelt een belangrijke rol bij het

formuleren van tools die dit beslissingsproces ondersteunen. De complexiteit van de logistieke processen zorgt voor een continue uitdaging voor onderzoekers om nieuwe wiskundige technieken te ontwikkelen die razendsnel een goede en liefst optimale oplossing produceren. In deze presentatie bespreken we enkele vuistregels en wiskundige technieken meer in detail en laten zo zien hoe wiskunde kan worden gebruikt om in snelle rekentijd goede oplossingen te verkrijgen die direct besparingen in aanmeertijden en logistieke kosten kunnen opleveren.



Links: Het laden/lossen van een containerschip bij Ceres Paragon Amsterdam.

Boven: Schematische weergave van logistieke processen in een container terminal.

Zie: <http://www.irisvis.nl/container>

Wiskundige voorkennis: stof onderbouw middelbare school.

Skydiver & Grande Route

Anja Moeijes en Adri Knop
 SG Tabor, Hoorn
 vrijdag 15.30-17.00 (90 minuten)

Welke scholier kent Walibi niet, welke school is nog nooit naar dit attractiepark geweest tijdens een schoolreisje? Rondom diverse attracties van dit park zijn natuurwetenschappelijke projecten gemaakt. Niet alleen techniek, aardrijkskunde, natuurkunde en biologie spelen daarbij een rol, maar natuurlijk ook de wiskunde. We willen jullie kennis laten maken met enkele wiskundige opdrachten uit deze serie. Eén doelopdracht rondom de attractie Skydiver. Dit is een reusachtige slinger waarbij je wordt opgetakeld tot een hoogte van ruim 54 meter. Maar klopt dat eigenlijk wel?? Om deze vraag te kunnen beantwoorden gaan we een 'laboratoriumopstelling van de slingerproef maken'.



Eerst worden er in het klein (klaslokaal) metingen verricht aan de slinger. Deze meetresultaten worden in VU-grafiek ingevoerd. Door die meetresultaten te vergelijken met een wortel formule kan een leerling het verband vinden tussen de slingerlengte en slingertijd. Met een YouTube filmpje kun je de slingertijd meten, de slingerlengte bepalen en controleren of je door Walibi niet iets op de mouw gespeld wordt.

Deze opdracht is uitgevoerd met tweede klas vmbo-leerlingen. De opdracht sluit naadloos aan bij een practicumles met VU-Grafiek of een toepassing bij het hoofdstuk wortelverbanden.

Een andere in het oog springende attractie, hoewel minder spectaculair, is het reuzenrad. Hoe hoog ben je eigenlijk bovenin? Om deze vraag te kunnen beantwoorden gebruiken we een zelfgemaakte hoekmeter. Met de tweedeklassers hebben we deze opdracht in Walibi uitgevoerd, maar je zou er ook voor kunnen kiezen om de hoogte te bepalen van je eigen school, of een hoge toren in de buurt. Leerlingen zijn een lesje aan het knutselen met karton, draadjes en rietjes. Ondertussen meten ze hoeken, maken schaaltekeningen en rekenen met verhoudingstabellen.

Deelnemers aan de workshop krijgen alle bouwbeschrijvingen en zelf gemaakte prototypes mee, zodat ze op school direct aan de slag kunnen.

Wiskunde in achtbanen

Ir. Timo J.M. Klaus MBA

KumbaK The Amusement Engineers, Waalre

zaterdag 9.15-10.00 uur

Achtbanen; indrukwekkende stalen of houten constructies waarover treintjes met duizelingwekkende snelheden voortrazen. Steeds hoger, steeds sneller en vooral steeds spannender. Looping, cobra-roll, corkscrew en horseshoe en vele andere Engelse termen worden gebruikt om de verschillende ruimtelijke elementen waaruit een achtbaan is opgebouwd te beschrijven.

Naast de natuurkundige wetten ligt wiskunde aan de basis van het ontwerp van achtbanen en haar elementen. Zo is wiskunde onmisbaar om de baan van de achtbaan in de ruimte te definiëren waarbij de versnellingen en snelheden dusdanig zijn dat een spannende maar toch zeker ook veilige rit mogelijk wordt. Als dan de juiste baan bepaald is, is vervolgens wiskunde ook onmisbaar voor de sterkteberekeningen van de achtbaanconstructie en de voertuigen.



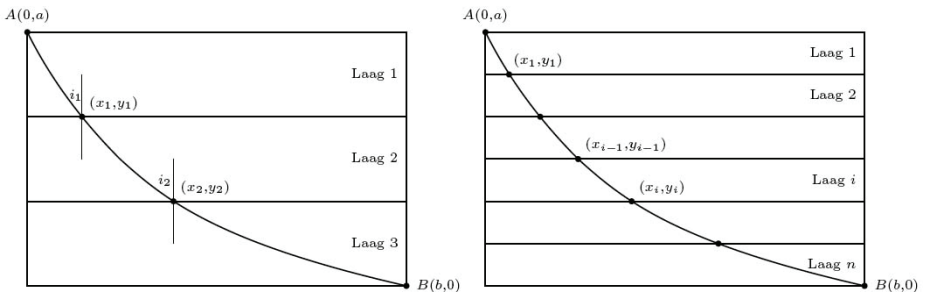
In deze presentatie zullen enkele voorbeelden worden gegeven uit het ontwerpproces van een achtbaan. Uit deze voorbeelden zal blijken dat eigenlijk relatief eenvoudige wiskunde aan de basis ligt van deze tot de verbeelding sprekende attracties.

De topsnelheid van zwaartekracht

Drs. Emiel van Elderen en Dr. Joost de Groot
 Faculteit EWI, TU Delft
 zaterdag 10.30-11.15 uur

De opleiding Technische Wiskunde van de Technische Universiteit Delft organiseert jaarlijks de activiteiten ‘Wiskunde in Actie’ en ‘Wiskunde Actief’. Deze zijn bestemd voor leerlingen met een N-profiel uit 6-, 5- of het eind van 4-vwo en hun docenten. De doelstelling van deze activiteiten is om scholieren (en docenten) in contact te brengen met een niet alledaags onderwerp uit de wiskunde en dit bij voorkeur te laten toepassen op een probleem uit een ander vakgebied (bijvoorbeeld elektrotechniek, informatica, economie, etc.). Vaak dient het onderwerp als basis voor werkstukken binnen genoemd profiel.

Voor een impressie wordt in deze presentatie het onderwerp van het afgelopen jaar behandeld: ‘De topsnelheid van zwaartekracht’. Bewegingen onder invloed van de zwaartekracht, zoals bij schommels, ruimtesondes en achtbanen, zijn fascinerend. Het begrijpen van deze bewegingen, of beter, het modelleren hiervan, is een wiskundige uitdaging. Ons doel is het ontwerpen van een snelste glijbaan tussen twee gegeven punten. Uitgegaan wordt van een aantal bekende wiskundige gereedschappen zoals differentiëren en integreren. Hiermee wordt een stap gemaakt naar het onderwerp differentiaalvergelijkingen. Dit wordt vervolgens gebruikt bij het ontwerp.



Quod erat demonstrandum

Elk even getal kan geschreven worden als som van twee priemgetallen. Wie naar de NWD komt om het bewijs van dit vermoeden van Goldbach aan te horen moeten we teleurstellen. We hebben het vermoeden dat dit vermoeden voorlopig nog wel even een vermoeden zal blijven. Al weet je dat natuurlijk nooit zeker. Er worden tot op de dag van vandaag nieuwe wiskundige bewijzen gevonden. In de meeste gevallen gaat het dan om een stelling die al eerder bewezen is.

Nieuwe bewijzen en alles wat eraan vooraf gaat vormen de rode draad in dit thema. Deze bewijzen zijn zo briljant in hun eenvoud, dat deelnemers het gevoel krijgen: hoe is het mogelijk dat ik dit zelf niet bedacht heb? Zo krijgt iedereen inspiratie om weer een jaar lang enthousiast met wiskunde aan de slag te gaan. Kom maar langs en u zult het ervaren: Q.E.D.

Elementaire bewijzen: niet altijd eenvoudig

Ir. Koen Vervloesem

Heverlee, België

vrijdag 14.00-14.45 uur

Wiskundigen zijn niet tevreden als ze eenmaal een vermoeden bewezen hebben. Dat bewijs is meestal niet het einde van de zoektocht, maar juist het begin. Ze gaan dan onmiddellijk op zoek naar ‘betere’ manieren om de stelling te bewijzen. De wiskundige John Dawson beschrijft in een artikel uit 2006 acht motivaties om alternatieve bewijzen te zoeken van al bewezen resultaten:

1. Gaten of onvolkomenheden in bestaande argumenten wegwerken. Bijvoorbeeld een niet-constructief bewijs vervangen door een constructief bewijs, een efficiënter algoritme bewijzen of controversiële hypothesen vermijden.
2. Een eenvoudiger redenering dan vroegere bewijzen opstellen. Bijvoorbeeld het aantal berekeningen of het aantal te testen gevallen verminderen, een korter bewijs opstellen, minder hypothesen gebruiken of de kennis van minder concepten vooronderstellen.
3. De kracht van verschillende methodologieën aantonen.
4. Een rationele reconstructie van historische praktijken leveren.
5. Een resultaat uitbreiden of veralgemenen naar andere contexten.
6. Een nieuwe route naar een al bewezen resultaat vinden.
7. Methodologische puurheid: geen concepten gebruiken die buiten de context van de vraagstelling liggen.
8. Bevestiging van een al bewezen stelling door een nieuw bewijs.

In deze sessie toetsen we deze motivaties aan een aantal relatief nieuwe bewijzen die bevredigender of verrassender zijn dan het originele bewijs, zoals Filip Saidaks bewijs uit 2006 dat er oneindig veel priemgetallen bestaan. We bekijken ook een aantal bewijzen die op één of andere manier onbevredigend zijn en wiskundigen sterk gemotiveerd hebben om betere bewijzen te vinden, zoals de classificatie van eindige enkelvoudige groepen en het computerbewijs van de vierkleurenstelling.

Wiskundige weblog van de spreker: <http://www.vervloesem.eu/qed/>.

Wiskundige voorkennis: elementaire getaltheorie en meetkunde.

Het Isis-probleem: van het oude Egypte naar de 21ste eeuw!

Dirk De Bock

Hogeschool-Universiteit Brussel en K.U. Leuven, België

vrijdag 15.30-17.00 uur (90 minuten)

Het Isis-probleem, dat zijn naam ontleent aan een mythische connectie met de cultus van de oud-Egyptische godin Isis, luidt als volgt: Welke rechthoeken, met gehele getallen als zijden (gemeten met een zekere eenheid), hebben de eigenschap dat hun oppervlakte en hun omtrek (als getal) gelijk zijn? Een 2 bij 5 rechthoek heeft oppervlakte 10 en omtrek 14 en bezit de bedoelde eigenschap dus niet, maar er zijn er andere waarbij dat wel het geval is.



De deelnemers aan deze workshop worden vooraf uitgenodigd om zich te buigen over drie vragen:

1. Bepaal alle rechthoeken met gehele zijden waarvoor oppervlakte = omtrek.
2. Bewijs je bevinding (i.e. dat dit de enige zijn).
3. Ga op zoek naar alternatieve bewijzen.

Tijdens de workshop zal blijken dat, hoewel het Isis-probleem weinig technische of geavanceerde wiskunde vereist, het toch geen standaard- of routineopgave is. Bewijzen kunnen vanuit verschillende invalshoeken worden geleverd (van informeel wiskundig redeneren tot algebra, meetkunde of analyse). Sommige bewijzen zijn ook overtuigender dan andere: ze leren niet enkel dat, maar ook waarom de gevonden rechthoeken de enige zijn. In een recent Leuvense onderzoek, medebegeleid door prof. Brian Greer, werd aan enkele tientallen Vlaamse wiskundeleraren-in-opleiding (zowel aan de hogeschool als aan de universiteit) gevraagd de rechthoeken met bovenvermel-

de eigenschap te bepalen en dit ook te bewijzen. Daarna kregen de kandidaat-leraren vijf alternatieve bewijzen aangeboden en werd hen gevraagd die te becommentariëren. De resultaten leveren mooie inzichten in de conceptuele en esthetische criteria die kandidaat-leraren hanteren om een bewijs te beoordelen. In deze workshop gaan we tenslotte in op enkele mogelijkheden om het Isis-probleem te veralgemenen en proberen we ook een link te leggen met enkele fundamentele aspecten van ‘dimensionaliteit’.

In één oogopslag

Dr. Marco Swaen en Marleen Kooiman
 Hogeschool van Amsterdam
 zaterdag 9.15-10.00 uur

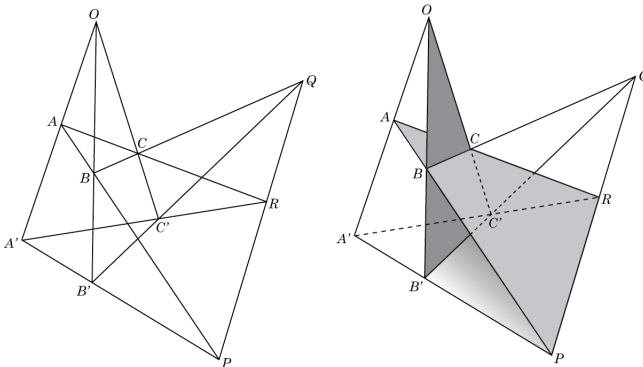
Als je een bewijs dóórhebt, dan ‘zie je het’. Om het bewijs te begrijpen moet je lezen, denken, herlezen; maar breekt het begrip eenmaal door, dan tellen de woorden niet meer en zien we het.

Soms is ‘zien’ ook letterlijk een bewijsmethode, het bewijs is dan een tekening waarnaar je met de juiste blik moet kijken om in één oogopslag de waarheid te zien.

In deze workshop laten we een aantal mooie oogopslagbewijzen de revue passeren, waarbij de deelnemers ruim de tijd krijgen zelf de juiste blik te vinden.

De stellingen die we bewijzen hebben betrekking op de projectieve meetkunde, een vak dat ontstond uit de meetkunde van het perspectief – geen wonder dat de juiste blik hier bewijskracht heeft. Tegenwoordig ressorteert het vakgebied onder de algebraïsche meetkunde. De visuele benadering lijkt daarmee verdwenen, maar juist door de algebraïsche bril blijken sommige stellingen opeens ook gevallen van ‘dat zie je zo’ te zijn.

Marleen Kooiman verdiepte zich als 17-jarige voor haar profielwerkstuk in de projectieve meetkunde en vond zelf generalisaties van de stelling van Desargues. Marco Swaen was haar begeleider.



Wiskunde en gadgets

Onze leerlingen zijn weg van elektronische hebbedingen. Ze nemen de nieuwste iPhone, iPod en PDA al snel mee naar school. Ook docenten worden gestimuleerd om nieuwe leermiddelen in te zetten. Denk bijvoorbeeld aan digitale schoolborden, digitale leeromgevingen en table pc's, die steeds meer aangeboden worden. Hoe kunnen we al die gadgets gebruiken in het onderwijs?

Het enthousiasme dat bij de nieuwe hebbedingen hoort is aanstekelijk en blijkt goed te benutten in de dagelijkse praktijk.

Omdat het bijna onmogelijk is om op de hoogte te blijven van de nieuwste ontwikkelingen, komen docenten uiteenzetten hoe de laatste gadgets kunnen worden gebruikt in de wiskundeles.

MobileMath: een wiskundespel op mobieltjes met GPS

Monica Wijers

Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

vrijdag 14.00-14.45 uur

‘Alsof je zelf de liniaal bent’, zo omschreef een van de leerlingen de ervaringen met het spelen van MobileMath. MobileMath is een mobiel ‘location-based-spel’ voor de onderbouw van het voorgezet onderwijs ontwikkeld door het Freudenthal Instituut en Waag Society. Op drie scholen is het spel gespeeld, steeds in de omgeving van de school. Teams scoren punten doordat ze met een mobiele telefoon met GPS-functionaliteit vierhoeken, rechthoeken en parallellogrammen ‘lopen’ in het speelveld. Na het spel is de kaart met de vierhoeken online op het EduGIS-portaal beschikbaar om in te zetten voor klassikale reflectie of om te laten zien aan ouders, vrienden enzovoort. In deze presentatie lichten we het spel toe, bespreken enkele gespeelde spellen en gaan we in op de resultaten uit de pilots. Want de vraag is natuurlijk: en hebben ze er ook iets van geleerd?

Wiskundeonderwijs binnen een nieuw medium

Wouter Potters, Twente Academy, Universiteit Twente

Peter Boon, Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

vrijdag 15.30-17.00 uur (90 minuten)

Het web speelt een belangrijke rol in de informatievoorziening van een groeiende groep mensen. Voor het onderwijs biedt het medium veel nieuwe mogelijkheden, maar we moeten ook constateren dat het gebruik hiervan bij het vak wiskunde voor veel docenten en leerlingen beperkt is. Deels komt dit door de specifieke eisen die het vak stelt

aan het medium. Enerzijds vraagt het vak om ondersteuning voor de specifieke wiskundetaal en notaties (een gebruiksvriendelijke formule-editor is nog steeds zeldzaam binnen webomgevingen), anderzijds is het opbouwen van wiskundige kennis meer dan het ‘websurfend’ bijeenharken van informatie. Goed webbased lesmateriaal houdt rekening met deze eisen.

In deze workshop brengen we de deelnemers in contact met twee belangrijke initiatieven op het gebied van webbased wiskundeonderwijs, de ‘Online Leeromgeving’ gemaakt door de Universiteit van Twente en de ‘Digitale Wiskunde Omgeving’ van het Freudenthal Instituut.

Na een presentatie van de mogelijkheden kunnen de deelnemers zelf ervaren hoe wiskundeonderwijs in een webomgeving kan werken. De deelnemers bekijken de omgevingen vanuit de rol als leerling en vanuit de rol als docent. Maar ook de auteursmogelijkheden komen aan bod. Deelnemers krijgen de kans om zelf digitale wiskundeactiviteiten te ontwerpen binnen een internetomgeving.

Didactiek van het digibord

Michel van Ast

Lerarenopleiding, Hogeschool Utrecht

zaterdag 9.15-10.00 uur

Digitale schoolborden (kortweg digiborden) zijn een enorme hype in het onderwijs. We kunnen er niet langer omheen. In steeds meer lokalen wordt het traditionele krijtjesbord vervangen door een digibord. Maar biedt een dergelijk bord didactisch gezien veel meerwaarde? Het is net als met een schoolboek: het succes en de meerwaarde hangen af van de docent die het gebruikt.

Het is de moeite waard om in deze workshop de kansen die het digibord biedt voor het wiskundeonderwijs nader te bekijken aan de hand van een aantal concrete voorbeelden. En dan niet vanuit het digibord als gadget, maar met een didactische bril op:

- de didactiek van het digibord, bestaat die?
- visualiseren;
- betekenisvol leren;
- leerlingen activeren;
- zichtbaarheid van leren.



Wiskunde op Lowlands – daar zit muziek in

Wim den Herder

Wiskunde, Universiteit van Amsterdam

zaterdag 10.30-11.15 uur

Het jaarlijkse muziekfestival Lowlands trekt vooral veel bezoekers die van zon, bier en muziek willen genieten. Op het eerste gezicht niet de meest voor de hand liggende plek om wiskundige workshops te houden. Toch is dat dit jaar voor het tweede achtereenvolgende jaar gebeurd, en met succes. Zes verschillende presentaties over wiskunde, met als taak de vluchtige aandacht van de Lowlandsganger te trekken en te behouden. Luchtig en ludiek, maar toch ook met de benodigde diepgang.

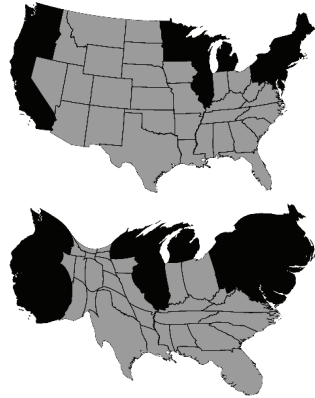
In deze workshop zal na een korte introductie één van de Lowlands-workshops worden herhaald, waarin aan de hand van fruitsoorten de wiskunde in muziek wordt behandeld. Wim den Herder analyseert ritmische structuren en laat interessante muziekfragmenten horen én zien, waarbij het publiek naar hartenlust mee mag klappen.

Zie ook YouTube: <http://nl.youtube.com/watch?v=VT36rC1J6tg>

Wiskunde van de kaart

Stel dat je weet hoe je de wereldbol op een platte kaart weergeeft. Kun je op zo'n kaart nog de oppervlakte van landen precies weergeven? Of kun je op zo'n kaart de lengte van bergwegen correct op schaal weergeven? En kun je ook andere data netjes representeren op een kaart zoals het bruto nationaal product of het aantal behaalde Olympische medailles?

Dit is slechts een greep uit de vragen die aan de orde kunnen komen in de voordrachten van dit thema. Daarnaast is er een workshop waarin u zelf aan de slag kunt om uw plaats te bepalen.



Uitslag van de presidentsverkiezingen van 2004: geografisch (boven) en in verhouding tot het aantal inwoners (onder).

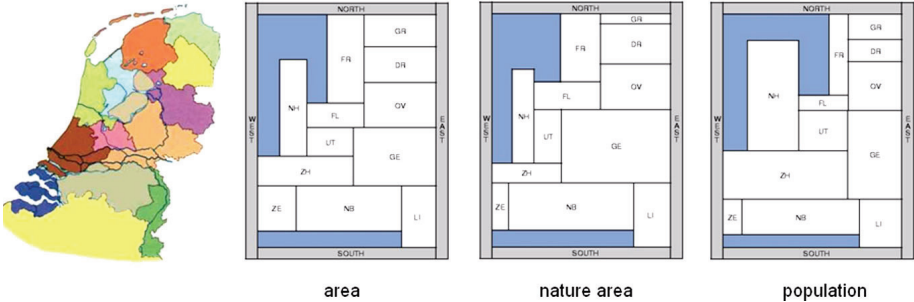
Rectangular cartograms

Dr. Bettina Speckman
Faculteit Wiskunde en Informatica, TU Eindhoven
vrijdag 14.00-14.45 uur

Cartographers have developed many different techniques to visualize statistical data about a set of regions like countries, states or municipalities. Cartograms are among the most well known and widely used of these techniques. The regions of a cartogram are deformed such that the area of a region corresponds to a particular geographic variable. The most common variable is population: in a population cartogram, the area of each region is proportional to its population. Since the sizes of the regions are not their true sizes they generally cannot keep both their shape and their adjacencies. A good cartogram, however, preserves the recognizability in some way.

Globally speaking, there are three types of cartogram. The standard type (the contiguous area cartogram) has deformed regions so that the desired sizes can be obtained and the adjacencies kept. The second type of cartogram is the non-contiguous area cartogram. The regions have the true shape, but are scaled down and generally do not touch anymore. The third type of cartogram is the rectangular cartogram, introduced by Raisz in 1934, where each region is represented by a rectangle. Rectangular cartograms are highly stylized; as Raisz writes: 'simple distortion of the map would be misleading', because it is important to emphasize that a cartogram is not a map. Rectangular cartograms also have the advantage that the sizes (area) of the regions can be estimated much easier than with other types of cartograms.

Good rectangular cartograms are hard to generate: the area specifications for each rectangle may make it impossible to realize correct adjacencies between the regions. However, combining methods from VLSI layout, graph drawing, and optimization we show how to generate visually pleasing rectangular cartograms effectively.



Disclaimer: there will be hardly any mathematics, but many pictures instead ...

Correcte waterstroming op bergmodellen

Drs. Marc van Kreveld
 Departement Informatica, Universiteit Utrecht
 zaterdag 9.15-10.00 uur

In Geografische InformatieSystemen (GIS) worden hoogtemodellen gebruikt om hoogte boven zeeniveau te representeren. Twee bekende modellen zijn het hoogtetgrid en het getrianguleerde hoogtemodel. Nu is bekend dat in bergen, lokale minima weinig voorkomen, want water dat wegstroomt uit een lokaal minimum, via een pas, ‘verwijderd’ dit minimum door erosie. Vaak zijn lokale minima dan ook meetfouten van de hoogte, of worden ze veroorzaakt door andere eigenschappen van het bouwen van een hoogtemodel.



We zullen in deze presentatie waterstroming op getrianguleerde hoogtemodellen onder de loep nemen. We nemen aan dat water altijd zo steil mogelijk omlaag gaat. Dat betekent dat we uit de vorm van het hoogtemodel kunnen voorspellen waar water zal verzamelen en riviertjes zullen ontstaan. Lokale minima zijn ongewenst, en we zullen bekijken op welke manieren we ze kunnen weghalen door de hoogtedata te corrigeren. We kijken ook naar andere artefacten die kunnen optreden, en wat we kunnen doen om het hoogtemodel hydrologisch meer correct te maken.

Soms hebben we naast een hoogtemodel ook de ligging van riviertjes als data beschikbaar in het GIS. Dan weten we dat de vorm van de bergen zo moet zijn dat het water ook werkelijk op die plek zou stromen. Als dat niet zo is, dan is er weer sprake van meetfouten of artefacten. We moeten ervoor zorgen dat het hoogtemodel zo is dat de hoogte afneemt langs de rivier, en het water niet kan 'ontsnappen' uit de plaats waar de rivier ligt. Correctie is noodzakelijk als het hoogtemodel wordt gebruikt voor simulaties die erosie voorspellen. Om deze correcties te doen zijn algoritmen nodig. Daarom komen bij deze presentatie de hydrologie, de geomorfologie en de algoritmie samen met de wiskunde.

Plaatsbepaling met de sterren, hoe werkt dat?

Dr. Steven Wepster

Faculteit Bètawetenschappen, Universiteit Utrecht

zaterdag 10.30-11.15 uur

Lange tijd hebben geografen en zeevarenden posities bepaald met behulp van de zon en de sterren. In deze workshop leert u hoe dat werkt.



visserijschool, Oostende, 1904, Andrew Pittcairn-Knowles

Eerst maakt u kennis met een manier om de beweging van de hemellichamen, zoals die zich aan ons voordoet, te beschrijven. Het blijkt voordeel te hebben om te doen alsof de aarde het onbeweeglijk middelpunt is van een enorm grote bol, waarop de hemellichamen zich bevinden. Op die bol leggen we een coördinatensysteem aan, zodat we met boldriehoeksrekening verbanden kunnen beschrijven tussen de plaats van een hemellichaam op de bol en onze eigen positie op aarde. Deze verbanden maken het mogelijk om onze positie te berekenen, maar dan zijn er wel wat gegevens nodig. Zo moeten we weten wat de precieze coördinaten van het hemellicht zijn: die hangen af van datum en tijd, en voor elk gewenst moment kunnen we ze berekenen met een computerprogramma of opzoeken in een almanak. En verder blijken we de hoogte van het hemellicht boven onze horizon nodig te hebben: dit meten we met een sextant of een ander hoekmeetinstrument. Voor de rest komt het aan op rekenen...en tekenen!

Wiskunde tussen vo en ho

Wiskunde D heeft het afgelopen schooljaar bewezen een zeer veelzijdig vak te zijn. De ruimte die bij het vak wordt geboden voor inhoud, werkvorm, toetsing en samenwerking met het hoger onderwijs geven dit vak een modern en dynamisch karakter. Met dit thema willen we op de 15^e NWD innovaties in dit schoolvak blijven stimuleren. Een gevarieerde groep sprekers zorgt voor het tonen van inspirerende wiskundelessen, boeiend lesmateriaal en interessante onderwerpen die zich lenen voor uw klas.

Leerling als onderwijsassistent

Lidy Wesker, Jac.P. Thijsse College, Castricum
Henk Staal, Hogeschool van Amsterdam
Drs. Willem Hoekstra, Onderwijscentrum VU, Amsterdam
vrijdag 14.00-14.45 uur

Vraag aan een leerling of hij/zij wiskundeleraar wil worden en je krijgt al snel te horen: ‘echt niet, veel te moeilijke stof’ en ‘aan vervelende leerlingen, zoals wij?!’ Maar vraag aan diezelfde leerlingen of ze hun eigen wiskundedocenten uit de onderbouw willen assisteren en ze antwoorden: ‘gaaf, de stelling van Pythagoras en de heks!’ In deze presentatie willen wij onze ervaringen met u delen van een module waarbij Tweede Fase-leerlingen als onderwijsassistent worden ingezet in de onderbouw. De onderbouwdocent krijgt tijdelijk extra handen in de klas, de onderbouwleerlingen zien rolmodellen aan het werk en de Tweede Fase-leerlingen krijgen een ander beeld van het leren en onderwijzen van wiskunde.

Wiskundige avonturen op de bol

Dr. Monique Pijls
Instituut Leraren Opleiding, Universiteit van Amsterdam
vrijdag 15.30-17.00 uur (90 minuten)

In het Nederlandse wiskundecurriculum vinden we voornamelijk meetkunde in het platte vlak. En als het al om ruimtemeetkunde gaat, dan is de weergave nog altijd tweedimensionaal. Toch zijn er verrassende avonturen te beleven in de wereld van de bolmeetkunde, startend op een niveau dat voor iedereen begrijpelijk is. Ga maar eens wat tekenen op een sinaasappel, en je merkt dat vormen zich anders gedragen dan we gewend zijn in het platte vlak. En uiteindelijk leiden deze eigenschappen tot nieuwe structuren als de niet-euclidische meetkunde.

De Hongaarse wiskundige István Lenárt is al jarenlang gefascineerd door dit fenomeen en heeft geëxperimenteerd met alle mogelijke materialen om bolmeetkunde inzichtelijk te maken. Hij ontwierp een model, een doorzichtige bol, waarop wiskundige constructies uitgevoerd kunnen worden met behulp van een speciale passer, bolliniaal en stiften. Hierbij hoort ook een bundel met ‘wiskundige avonturen’, problemen die starten op een zeer eenvoudig niveau en leiden naar complexe meetkundige constructies op de bol. In deze workshop gaan we met dit materiaal en de opdrachten aan de slag. We kijken ook naar ervaringen van leerlingen in 5-vwo. In Hongarije is bolmeetkunde nu een onderdeel van het nationale curriculum geworden. Na het volgen van deze workshop kunt u dit onderdeel in ieder geval in uw eigen programma opnemen!



Zie: www.lenartsphere.com en www.rhombus.be

Complexe stromen

Aad Goddijn

Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht
vrijdag 15.30-17.00 uur (90 minuten)

Hoe werkt een zender, zoals die in Lopik of in je GSM? Hoe werkt een laagdoorlaatfilter van een geluidsversterker? Wat is resonantie? Wat betekent het dat wisselspanning en -stroom in een spoel 'loodrecht op elkaar staan'? Hoe bereken je de uitgangsspanning bij een ingewikkelde schakeling op een makkelijke manier?

In de module *Complexe Stromen*, die twee keer met succes gebruikt is op het Junior College in Utrecht, bouwden we kennis van en inzicht in de complexe getallen op in samenhang met het onderzoeken van elektrische netwerken. Interessante en bruikbare antwoorden op bovenstaande vragen kwamen daaruit voort. De weg naar het complexe vlak sloeg niet bij de reële nul ruwweg linksaf naar het nieuwe getal i ; de geleidelijke opbouw ging uit van eigenschappen van sinusvormige signalen, die samenhangen met verrassende natuurkundige fenomenen. Poolcoördinaten en vectoren speelden een belangrijke rol.

Het rekenen met complexe getallen in elektrische netwerken bleek in de klas goed mogelijk; fase- en amplitudekarakteristieken verschenen, op enkel- en dubbellogaritmisch papier. Maar de raadsels die met de stevige abstracties samenhangen, bleven gelukkig ook opduiken in de vorm van hardnekkige vragen:

Hoe ziet zo'n complexe stroom er nu als elektronentreintje uit?

Wat betekent dat machtsverheffen nu precies in $i^{-2i} = 23.14069$, zoals de rekenmachine beweert, en waarom is dat gelijk aan e^π ?

De eerste vraag gaat over de aard van het gebruik van wiskunde in de natuurkunde en de tweede over het legitimeren van eigenhandig opgebouwde nieuwe wiskundige constructies. Pittig, en belangrijk.

Aan het eind van de module spelen de complexe getallen een eigen meetkundig spel. Eenvoudige veeltermfuncties blijken van de eenheidscirkel krommen met lussen te maken zoals de oude Griek Ptolemaeus ze al gebruikte in zijn model voor het planeetstelsel. Verbeeld dynamische meetkundesoftware geeft ook een uitzicht op de beoemde hoofdstelling van de algebra.

De module is gemaakt in opdracht van het Junior College Utrecht (www.jcu.uu.nl). De module is ontwikkeld door Aad Goddijn (Freudenthal Instituut) en Joost van Hoof (Departement Natuur- en Sterrenkunde) van de Universiteit Utrecht. De module is bedoeld voor wiskunde D en NLT in vwo-6 en wordt in 2009 voorgedragen voor certificering.

Modellen en Dynamische systemen

Prof.dr. Ferdinand Verhulst
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht
zaterdag 9.15-10.00 uur



Modellen voor de werkelijkheid kun je met behulp van wiskundige methoden bestuderen. Het maken van zo'n model is echter iets heel anders. Het is de kunst om bij een ingewikkeld verschijnsel op een eenvoudige manier de kern van het verschijnsel weer te geven. We zullen daar voorbeelden van zien uit de economie; zo begrijp je al gauw waarom westerse landen steeds welvarender worden en ontwikkelingslanden steeds armer. Iets heel anders is, zoals

we zullen zien bij de varkensmarkt, het modelleren van veranderingen van de welvaart door conjunctuurschommelingen. Het opgooien en vallen van een bal is een veel simpeler verschijnsel, maar het modelleren leidt onverwacht snel tot moeilijk lijkende wiskundige vergelijkingen. Daar kunnen we toch wat over zeggen. Verwant hieraan in de mechanica, maar heel anders van wiskundige behandeling is de beweging van robotduikbootjes voor oceaanonderzoek, de sloccums.

De volledige tekst van de module Modellen en Dynamische Systemen is te downloaden via www.epsilon-uitgaven.nl.

Problemen oplossen én uitleggen: een wiskunde D-module in het samenwerkingsmodel

Dr. Quintijn Puite en ing. Marjanne de Nijs
Faculteit Educatie, Instituut Archimedes, Hogeschool Utrecht
zaterdag 10.30-11.15 uur

Met ingang van vorig schooljaar is het nieuwe vak wiskunde D in de tweede fase havo/vwo ingevoerd. Als een school daarbij kiest voor het zogenaamde samenwerkingsmodel, wordt een gedeelte van het wiskunde D-programma uitgevoerd in samenwerking met een instelling voor hoger onderwijs in het kader van Wiskunde in Wetenschap (voor het vwo) of Wiskunde in Technologie (voor de havo). De Universiteit Utrecht en de Hogeschool Utrecht hebben hiertoe twee modules ontwikkeld, waarvan we er één in deze workshop uitgebreid zullen belichten: de module 'Problemen oplossen én uitleggen' (voor havo of vwo).

In deze module wordt door leerlingen gewerkt aan wiskundige problemen die weinig voorkennis vereisen maar vooral veel creativiteit en logisch nadenken. Daarbij wordt niet alleen (met Polya in het achterhoofd) gekeken naar hoe je deze zou kunnen oplossen, maar ook naar hoe je anderen daarbij kunt helpen. Elke deelnemende leerling krijgt hier uiteindelijk een keer de rol van leraar toebedeeld, waarbij men z'n mededeelnemers moet helpen en uiteindelijk zelfs 'met het krijtje voor het bord moet'. De module is ontwikkeld op de HU, Faculteit Educatie en heeft voor leerlingen een duidelijk beroepsoriënterende component: hoe is het eigenlijk om leraar te zijn?

Tijdens de workshop zullen alle onderdelen van de module aan bod komen, zodat geïnteresseerden een goed beeld krijgen wat de module precies inhoudt. Daarbij worden de deelnemers actief aan het werk gezet met opgaven uit de module. De benodigde wiskundige voorkennis hiervoor is onderbouwwiskunde. Tenslotte bespreken we de ervaringen die vorig jaar met deze module zijn opgedaan op scholen in Amersfoort en Bilthoven.

De modules zijn opgezet vanuit het kernteam wiskunde D van het bètasteunpunt BEST-Utrecht (www.best-utrecht.nl), dat sinds juni 2007 operationeel is. Dit regionale steunpunt kan ondersteuning bieden bij de invoering en uitvoering van de nieuwe bètavakken wiskunde D, NLT en informatica.

Wiskunde in samenhang

Een natuurkundige, een bioloog en een wiskundige zitten op een bankje voor een huis. Ze zien twee mensen het huis binnengaan en even later komen er drie weer uit.

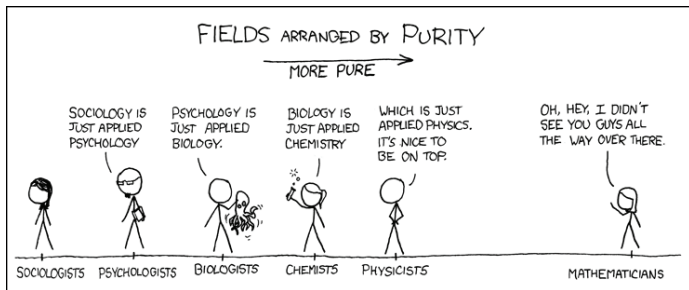
De natuurkundige: dit is onmogelijk.

De bioloog: ze hebben zich voortgeplant.

De wiskundige: als er nu iemand het huis binnengaat is het huis weer leeg.

We kennen ze allemaal, de grapjes over wiskundigen en andere natuurwetenschappers.

Maar zijn ze echt zo verschillend? En wie zijn wij zonder elkaar?



Centraal in dit thema staat het doorbreken van het hokjesdenken. Wiskunde is niet een geïsoleerd vak waar leerlingen wel of niet goed in zijn, maar staat in direct verband met haar omgeving. Die omgeving ontwikkelt de wiskunde die zij nodig heeft en wiskundig onderzoek stimuleert de innovatie in maatschappij en wetenschap.

Thermodynamica van alledag

Dr. ing. Ger Koper

DelftChemTech, TU Delft

vrijdag 14.00-14.45 uur

Vaak wordt vergeten dat thermodynamica een vak is dat geboren is uit de behoefte om processen in de directe omgeving te beschrijven. Het vak wordt geroemd om zijn sterk axiomatische opbouw waardoor de geldigheid van conclusies groot is. Echter, zonder beschrijving van stoffeïenschappen kan men niets met dit vak beginnen en dat is precies waar de praktijk belangrijk wordt. Bij deze presentatie zullen we u aan den lijve laten ondervinden hoe eenvoudige situaties op thermodynamische wijze kunnen worden geanalyseerd. De wiskunde die daarbij nodig is is eenvoudig maar krijgt door de praktische toepassing een nieuwe dimensie.

Wiskunde in balans

Dr. Jeroen Spandaw, Technische Wiskunde, TU Delft

Prof. dr. Rob Mudde, Toegepaste Natuurwetenschappen, TU Delft

zaterdag 10.30-11.30 uur (60 minuten)

Hoe diep kun je de mist in kijken? Hoe lang moet een struisvogelei worden gekookt? Om deze vragen te beantwoorden kun je een model van mist of van het koken van een ei maken. Dat kan in beide gevallen met hetzelfde wiskundige instrument: de balansvergelijking. Dit is een fundamentele techniek, die bij zeer uiteenlopende voorbeelden kan worden ingezet.



In deze workshop zullen we eerst demonstreren hoe deze aanpak in zijn werk gaat. Hierbij besteden we tevens aandacht aan dimensieanalyse. Deze eenvoudige algebraïsche techniek is een buitengewoon handig hulpmiddel bij het modelleren. Ook meer algemene modelleervaardigheden als vereenvoudigen, schatten, interpreteren van oplossingen en verfijnen van het model komen aan de orde.

In het tweede deel zullen de deelnemers zelf problemen analyseren en oplossen met behulp van de geleerde technieken zoals de balansvergelijking. De voorbeelden komen uit het dagelijks leven en uit de industrie.

De workshop richt zich op eerstegraadsdocenten wiskunde.

Winnaars workshop

Negen docenten stuurden dit jaar een voorstel in om een werkgroep op de NWD te verzorgen. De jury koos er twee uit.

Pygram

Odette De Meulemeester, KSO Glorieux, Ronse, België

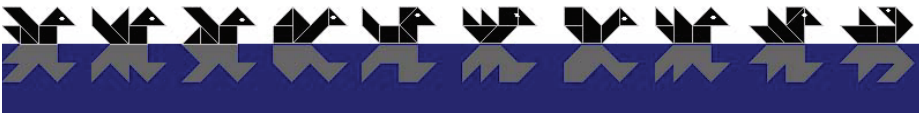
Matthijs Coster, Voorschoten

vrijdag 15.30-17.00 uur (90 minuten)

Pygram is een tangramachtige puzzel van Matthijs Coster. Het was een prijsvraag in het tijdschrift Pythagoras. Volgens leerlingen van het KSO Glorieux te Ronse (die een deel van de wedstrijd gewonnen hebben) zijn er heel wat verrassende meetkundetoe-passingen voor de onderbouw mee te bedenken. Deelnemers krijgen heel wat uitgewerkte voorbeelden en kunnen nadien zelf proberen met een pygramset spiegelbeelden en gelijkvormige figuren te leggen.

Het onderwerp leidt tot creativiteit bij leerlingen en docenten, laat allerlei begrippen en stellingen langskomen en zet aan tot redeneren en bewijzen. Als vanzelf ontstaat teamwork. Het materiaal is direct geschikt om geheel of gedeeltelijk op school toe te passen. We beginnen met de verschillende puzzelstukjes te bekijken. Als er tijd en interesse is kunnen we ook een computerprogramma Pygram bekijken dat Aad van de Wetering gratis beschikbaar stelt (breng een stick mee aub).

Het gaat vooral over symmetrie, gelijkvormigheid en de stelling van Pythagoras. Voor symmetrie bedachten we een memoryspel op een voorstelling van de stelling van Pythagoras. Pygramsetten snijden we met Filocad en zijn te krijgen tijdens de workshop. Omdat $8 + 1 = 9$ is, vonden we een schitterend voorbeeld voor de stelling van Pythagoras. We eindigen met een pygram-sudokuwedstrijd. Dit laatste kan een idee zijn voor de wiskundestand op een open dag bijvoorbeeld.



Zelf modelleren, wat ervaar je dan?

Ir. Xandra C. Snoeker, Stedelijk Daltoncollege, Zutphen

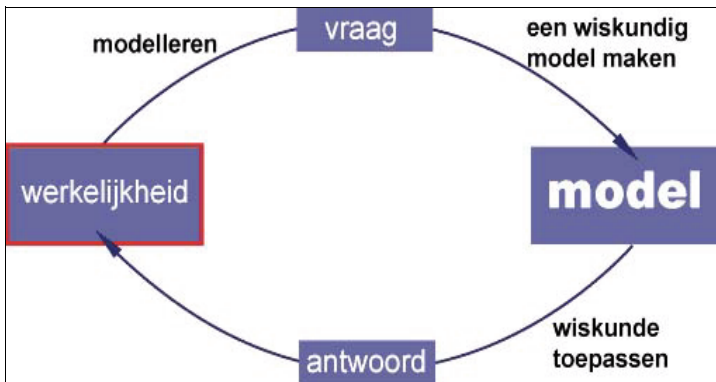
Dr. Nellie C. Verhoef, Universiteit Twente, Enschede

vrijdag 15.30-17.00 uur (90 minuten)

Als je van leerlingen de vraag krijgt: ‘Waarom moeten we dit nu leren?’, sta je als docent gauw met je mond vol tanden als je wiskunde ziet als op zichzelf staand vak. Wiskundige technieken worden toegepast in tal van wetenschappen. Wiskundige modellen worden op allerlei manieren gebruikt om problemen te beschrijven en op te lossen. Hoe komen die modellen tot stand? Wat kun je er vervolgens mee doen? Als je leerlingen de kans geeft zelf een wiskundig model op te stellen en daarmee een optimalisatievraagstuk op te lossen, worden nut en noodzaak van wiskundige technieken snel duidelijk.

In deze workshop ligt het accent op het zelf ervaren van wat het betekent om te modelleren: tegen welke problemen loop je aan? Welke kennis heb je wel/niet paraat? Waarover ben je enthousiast? Welke gekwantificeerde grootheden kies je bij welke problemen? Welke wiskundige activiteiten komen aan de orde?

In groepen wordt gewerkt aan een rijke, uitdagende context. De ervaringen worden in een breder kader geplaatst en vergeleken met recente pilotervaringen met de startmodule Modelleren voor wiskunde D. Uiteindelijk komen de vragen aan de orde wat leerlingen hier nu van leren en hoe de beoogde rol van de docent eruit zou kunnen zien.



Voor deze werkgroep graag uw grafische rekenmachine meenemen!

Informatiemarkt

Op de informatiemarkt in de Rotonde, in de Boston 12/14 zaal en in de gangen kunt u stands vinden van organisaties, instellingen en instituten die zich op een of andere wijze met wiskunde of wiskundeonderwijs bezighouden. Er zijn stands van:

- Aarde-NU, Universiteit Utrecht
- APS, Utrecht
- Busy Brains/Denkspellen
- Casio Benelux
- Educatieve Partners Nederland
- Epsilon Uitgaven
- Freudenthal Instituut
- Kangoeroe
- Lekopro
- Math4All
- Noordhoff Uitgevers
- NVvW
- NWO
- Optische Fenomenen
- Productief
- Pythagoras
- Schooltv
- Selexyz
- SLO
- Texas Instruments
- Twente Academy
- Vierkant
- Visiria Uitgeverij
- Wiskunde in perspectief
- Wiskunde Olympiade

De openingstijden van de informatiemarkt zijn:

vrijdag 10.00 - 11.00 uur
12.00 - 18.00 uur
zaterdag 08.30 - 11.45 uur

Avondprogramma

De NWD is in belangrijke mate bedoeld als ontmoetingsplaats. De koffie-, thee- en lunchpauzes bieden u de gelegenheid van gedachten te wisselen met collega's. Maar, zoals u op de volgende pagina's kunt lezen, er is meer te doen!

Vrijdagavond na de hoofdlezing is er nog ruim gelegenheid om bij te praten en te ontspannen.

Het avondprogramma is dit jaar rondom Boston 9. De spelletjes staan in de Atriumlounge. Dat geeft meer ruimte en lucht voor dit populaire onderdeel, daarnaast zullen er verschillende activiteiten plaatsvinden variërende van quiz tot muziek. Op enkele plekken in de gangen en lounge staan barren opgesteld waar u een drankje kunt bestellen en een plek kunt zoeken om met elkaar bij te kletsen. Ook het Cheers sportcafé (in de kelder) en de centrale bar (achter de receptie) zijn open.

‘Het vermaakt, het verrast en geeft energie. Het is een fenomeen dat je met je eigen zintuigen moet ondergaan om het te kunnen bevatten. Ben je klaar voor een avondvullende explosie van groove, passie en geluk?’ Kom dan om 21.30 uur naar Boston 9, daar treedt voor u op ‘Bouba Dioup & the Paradiddles’.



Het GrootNietTeVermijden NWD-orkest

Graag willen we de NWD afsluiten met een of twee liederen, met teksten van Marjolein Kool, die door de voltallige NWD-populatie uit volle borst worden meegezongen. Om dit gezang van enige muzikale omlijsting te voorzien zijn we op zoek naar enthousiaste leden (m/v) van het GrootNietTeVermijden NWD-orkest.

Het idee is dat we op vrijdagavond bij elkaar komen om de begeleiding van de liederen door te spelen. Daarbij zijn overigens ook zangers al welkom. Na deze generale repetitie volgt dan zaterdag de premiere.

Speel je een instrument en heb je belangstelling om hieraan mee te doen? Breng het instrument mee naar de NWD en meld je aan door een email te sturen naar Paul Drijvers (p.drijvers@fi.uu.nl). Je krijgt dan vast bladmuziek opgestuurd, zodat je goed beslagen ten ijs kunt komen!

Funrun

Een vast onderdeel van de Nationale Wiskunde Dagen is de funrun op zaterdagochtend. We lopen weer het bekende rondje van precies 6 km. Deelname is gratis en als beloning krijgt u na afloop een T-shirt.

Voor de snelste dame en de snelste heer is er een echte (wissel)beker.

De snelste tijd in 2008 was 21.55, gelopen door Erik Nijhof. Jessica Bom liep met 28.54 de snelste tijd bij de vrouwen.



Vanaf 6.30 uur staan er koffie, thee en een banaan klaar in de lobby. De start van de funrun 2009 is stipt om 7.00 uur in de morgen, voor de ingang van NH Leeuwenhorst. Wandelen mag trouwens ook, maar dan adviseren we u het halve rondje van 3 km te doen en wat eerder te vertrekken. U kunt de funrun ook skeeleren.

Er is geen tijdslimiet, maar u wordt vriendelijk verzocht vóór de eerste lezingen terug te zijn.

Nationale Wiskunde Dagen 2010

De zestiende Nationale Wiskunde Dagen zijn gepland op *vrijdag 5 en zaterdag 6 februari 2010*. Bij het organiseren van deze zestiende NWD hopen we gebruik te kunnen maken van uw opmerkingen en suggesties naar aanleiding van de NWD van dit jaar. U ontvangt daartoe ter plekke een *evaluatieformulier*.

Wij hopen dat u uw opmerkingen gedurende de twee dagen wilt noteren en het formulier aan het eind wilt deponeren in de blauwe bakken. Wij stellen uw mening zeer op prijs!

Programmacommissie

Jan Aarts	Jan van Maanen
Henk Broer	Hans van Lint
Joke Daemen	Hans Melissen
Joop Doorman	Martin v. Reeuwijk
Michiel Doorman	Sjoerd Rienstra
Swier Garst	Michel Roelens
Tom Goris	Dirk Siersma
Job van de Groep	Hans Sterk
Adri Knop	Lidy Wesker
Marjolein Kool	Chris Zaal

Uitvoerend comité

Mieke Abels	Ank v.d. Heiden
Freek van der Blij	Bas Holleman
Peter Boon	Henk v.d. Kooij
Michiel Doorman	Jan de Lange
Paul Drijvers	Sonia Palha
Sylvia Eerhart	Mariozee Wintermans
Tom Goris	

Nationale Wiskunde Dagen
Freudenthal Instituut
Postbus 9432, 3506 GK Utrecht
tel. 030-263 55 54, fax 030-266 04 30
email: nwd@fi.uu.nl, website: www.fi.uu.nl/nwd

De Nationale Wiskunde Dagen worden georganiseerd door het Freudenthal Instituut (Universiteit Utrecht) onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde van het Wiskundig Genootschap en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, in samenwerking met het Interfacultair Instituut voor Lerarenopleiding, Onderwijsontwikkeling en Studievaardigheden (ivlos) van de Universiteit Utrecht.

De vijftiende NWD wordt gesteund door bijdragen van NH Leeuwenhorst Hotels, Texas Instruments, Casio en 'getal en ruimte'.

NH
HOTELS

 TEXAS INSTRUMENTS
CASIO.

getal & ruimte
op getal en ruimte kun je rekenen

