Fibonacci op de universiteit

Bart Zevenhek

January 16, 2008

De rij van Fibonacci: een manier om mijlen om te rekenen naar kilometers.

De rij van Fibonacci: een manier om mijlen om te rekenen naar kilometers.

- 2 mijl $\approx$ 3 kilometer,

De rij van Fibonacci: een manier om mijlen om te rekenen naar kilometers.

- 2 mijl $\approx$ 3 kilometer,
- 3 mijl $\approx$ 5 kilometer,

De rij van Fibonacci: een manier om mijlen om te rekenen naar kilometers.

- 2 mijl $\approx$ 3 kilometer,
- 3 mijl $\approx$ 5 kilometer,
- 5 mijl $\approx$ 8 kilometer.

De rij van Fibonacci: een manier om mijlen om te rekenen naar kilometers.

- 2 mijl $\approx$ 3 kilometer,
- 3 mijl $\approx$ 5 kilometer,
- 5 mijl $\approx$ 8 kilometer.
- De rij van Fibonacci:
  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$
- Een Engelse mijl is 1.609344 kilometer.

Hoe moet dat dan met 7 mijl?

- De rij van Fibonacci:
  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$

Hoe moet dat dan met 7 mijl?

- De rij van Fibonacci:
  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$
- 7 gaat 3 keer in 21,
- 7 mijl is dus $34/3 = 11,3333\ldots$ kilometer.

Hoe moet dat dan met 7 mijl?

- De rij van Fibonacci:
  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$
- 7 gaat 3 keer in 21,
- 7 mijl is dus $34/3 = 11,3333\ldots$ kilometer.
- Niet erg praktisch, maar kan dit altijd?
- En waarom werkt het eigenlijk?

Hoe moet dat dan met 7 mijl?

- De rij van Fibonacci:
  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$
- 7 gaat 3 keer in 21,
- 7 mijl is dus $34/3 = 11,3333\dots$ kilometer.
- Niet erg praktisch, maar kan dit altijd?
- En waarom werkt het eigenlijk?
- De gulden snede verhouding $\approx 1,618 \approx 1,609$.

Een opgave in het blad Pythagoras

De rij van Fibonacci, waarvan de elementen genoteerd worden met F_i, wordt als volgt geconstrueerd: $F_0 = 0, F_1 = 1$, en verder geldt: $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$.
Bewijs dat er voor elk positief geheel getal n oneindig veel getallen in de rij van Fibonacci zijn die een veelvoud zijn van n.

Een ontdekking bij het oplossen van de opgave

F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}
2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Een ontdekking bij het oplossen van de opgave

F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}
2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

TWEE VERMOEDENS:

- Als $n \neq 5$ een priemgetal is, dan is n een deler van F_{n-1} of van F_{n+1}.
- Als n *niet* een priemgetal is, dan is n *geen* deler van F_{n-1} of van F_{n+1}.

Hendrik Lenstra, Leiden

Een teleurstelling....

- Vraag: Is dit een goede opgave voor een LIO?

Een teleurstelling....

- Vraag: Is dit een goede opgave voor een LIO?
- Antwoord: Het eerste is te bewijzen, maar ...

Een teleurstelling....

- Vraag: Is dit een goede opgave voor een LIO?
- Antwoord: Het eerste is te bewijzen, maar ... het bewijs is te makkelijk voor twee jaar onderzoek.

Een teleurstelling....

- Vraag: Is dit een goede opgave voor een LIO?
- Antwoord: Het eerste is te bewijzen, maar ... het bewijs is te makkelijk voor twee jaar onderzoek.
- Het tweede is niet waar. Tegenvoorbeeld:
  $n = 908658513945001$ is niet een priemgetal,
  maar wel een deler van $F_{908658513945000}$.

Profinite Fibonacci numbers

- Artikel van Hendrik Lenstra in Nieuw Archief voor de Wiskunde 4-12-2005,
- zie: http://www.math.leidenuniv.nl/ hwl/papers/fibo.pdf.
- Onderzoek: niet-formele opzet formaliseren.
- Voorwaarde: eerst oorspronkelijke vraag uitzoeken!

Aan de slag bij Hendrik Lenstra.

- Exactheid bij alles: formuleringen, bewijzen, taalgebruik, uitspraak, beweringen, lay-out.

Aan de slag bij Hendrik Lenstra.

- Exactheid bij alles: formuleringen, bewijzen, taalgebruik, uitspraak, beweringen, lay-out.
- Afscheid van de gulden snede mythe.

Aan de slag bij Hendrik Lenstra.

- Exactheid bij alles: formuleringen, bewijzen, taalgebruik, uitspraak, beweringen, lay-out.
- Afscheid van de gulden snede mythe.
- Wiskundige taal: groepen, ringen, lichamen.

Aan de slag bij Hendrik Lenstra.

- Exactheid bij alles: formuleringen, bewijzen, taalgebruik, uitspraak, beweringen, lay-out.
- Afscheid van de gulden snede mythe.
- Wiskundige taal: groepen, ringen, lichamen.
- Programmeren met algebra-software (Magma) en schrijven in LaTeX.

Aan de slag bij Hendrik Lenstra.

- Exactheid bij alles: formuleringen, bewijzen, taalgebruik, uitspraak, beweringen, lay-out.
- Afscheid van de gulden snede mythe.
- Wiskundige taal: groepen, ringen, lichamen.
- Programmeren met algebra-software (Magma) en schrijven in LaTeX.
- Sfeer op de universiteit van Leiden.

Bewijs van opgave Pythagoras

- Bewijs dat er voor elk getal n oneindig veel getallen in de rij van Fibonacci zijn die een veelvoud zijn van n.

Bewijs van opgave Pythagoras

- Bewijs dat er voor elk getal n oneindig veel getallen in de rij van Fibonacci zijn die een veelvoud zijn van n.
- Voor gegeven getal n is de resten-rij periodiek. Bijv. voor $n = 8$:

0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
0	1	1	2	3	5	0	5	5	2	7	1	0	1

Bewijs van opgave Pythagoras

- Bewijs dat er voor elk getal n oneindig veel getallen in de rij van Fibonacci zijn die een veelvoud zijn van n.
- Voor gegeven getal n is de resten-rij periodiek. Bijv. voor $n = 8$:

0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
0	1	1	2	3	5	0	5	5	2	7	1	0	1

- En $F_0 = 0 \ldots$ klaar!
- Zie: tijdschriften Euclides en Pythagoras.

Een moeizame start: "het instapprobleem".

- De resten-rij voor $n = 8$:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 0, 5, 5, 2, 7, 1, 0, 1, 1, \ldots$$

- Wanneer komt de *tweede* nul? $nul(8) = 6$
- Wat is de periode? $per(8) = 12$
- Hoe hangen $per(n)$ en $nul(n)$ af van n?

Een moeizame start: “het instapprobleem“.

- De resten-rij voor $n = 8$:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 0, 5, 5, 2, 7, 1, 0, 1, 1, \ldots$$

- Wanneer komt de *tweede* nul? $nul(8) = 6$
- Wat is de periode? $per(8) = 12$
- Hoe hangen $per(n)$ en $nul(n)$ af van n?
- De orde van ϑ in de ring $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[X]/(X^2 - X - 1)^*$ (waarbij ϑ de restklasse is van X in $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[X]/(X^2 - X - 1)$).

Afronding van het instapprobleem.

- Voor priemgetal $p \neq 5$ geldt: $nul(p)$ is deler van F_{p-1} of van F_{p+1}.
- Andere bewijzen in Fibonacci Quarterly, Hardy/Wright, door Frits Beukers.
- Tegenvoorbeelden: $323 = 17 \times 19$ is deler van F_{324}, 100 tegenvoorbeelden onder de 250000.
- Artikelen voor tijdschriften Euclides en Pythagoras en op web, workshop zesde klassers, PO Wouter Berkelmans.

Een voorzichtig begin met het echte onderzoek.

De laatste 10 cijfers van F_n			
n	F_n	n	F_n
19	4181	29	514229
199	1942044301	299	7264610201
1999	4076005501	2999	7655102001
19999	9011617501	29999	7451020001
199999	7967737501	299999	4510200001
1999999	7528937501	2999999	5102000001
19999999	3140937501	29999999	1020000001

Een duik in p-adische analyse, met $p = 10$.

- Wat is een 10-adisch getal? Oneindig veel cijfers van 0-9.

Een duik in p-adische analyse, met $p = 10$.

- Wat is een 10-adisch getal? Oneindig veel cijfers van 0-9.
- Een gewoon geheel getal is ook een 10-adisch getal. Bijv: 123 is 10-adisch: $\ldots 0000123$.

Een duik in p-adische analyse, met $p = 10$.

- Wat is een 10-adisch getal? Oneindig veel cijfers van 0-9.
- Een gewoon geheel getal is ook een 10-adisch getal. Bijv: 123 is 10-adisch: $\ldots 0000123$.
- Optellen en vermenigvuldigen gaan zoals in $\mathbb{N}$ 'van achteren naar voren':
  $\ldots 0012345 + \ldots 0006789 = \ldots 0019134$

Een duik in p-adische analyse, met $p = 10$.

- Wat is een 10-adisch getal? Oneindig veel cijfers van 0-9.
- Een gewoon geheel getal is ook een 10-adisch getal. Bijv: 123 is 10-adisch: $\ldots 0000123$.
- Optellen en vermenigvuldigen gaan zoals in $\mathbb{N}$ 'van achteren naar voren':
  $\ldots 0012345 + \ldots 0006789 = \ldots 0019134$
- De ring $\mathbb{Z}_{10}$

Een merkwaardige tabel

De rij van Fibonacci: 10-adisch			
n	F_n	n	F_n
00000019	0000004181	00000029	0000514229
00000199	1942044301	00000299	7264610201
00001999	4076005501	00002999	7655102001
00019999	9011617501	00029999	7451020001
00199999	7967737501	00299999	4510200001
01999999	7528937501	02999999	5102000001
19999999	3140937501	29999999	1020000001

De reeks van Fibonacci continu???

- Als n naar $\ldots 9999$ gaat, dan gaat F_n naar $\ldots 0001$.

De reeks van Fibonacci continu???

- Als n naar $\ldots 9999$ gaat, dan gaat F_n naar $\ldots 0001$.
- $\ldots 9999$ is hetzelfde als -1 want:
  $\ldots 9999 + \ldots 0001 = \ldots 0000$.
- F_{-1} is gelijk aan 1: $\ldots, 8, 5, 3, 2, 1, 1, 0, 1 = F_{-1}$.

De reeks van Fibonacci continu???

- Als n naar $\ldots 9999$ gaat, dan gaat F_n naar $\ldots 0001$.
- $\ldots 9999$ is hetzelfde als -1 want:
  $\ldots 9999 + \ldots 0001 = \ldots 0000$.
- F_{-1} is gelijk aan 1: $\ldots, 8, 5, 3, 2, 1, 1, 0, 1 = F_{-1}$.
- Dus als n naar -1 gaat, gaat F_n naar F_{-1}? Is F_n continu?

De reeks van Fibonacci continu???

- Als n naar $\ldots 9999$ gaat, dan gaat F_n naar $\ldots 0001$.
- $\ldots 9999$ is hetzelfde als -1 want:
  $\ldots 9999 + \ldots 0001 = \ldots 0000$.
- F_{-1} is gelijk aan 1: $\ldots, 8, 5, 3, 2, 1, 1, 0, 1 = F_{-1}$.
- Dus als n naar -1 gaat, gaat F_n naar F_{-1}? Is F_n continu?
- Waarom gaat dit goed voor $2999\ldots$ en niet voor $1999\ldots$?

De reeks van Fibonacci continu???

- Als n naar $\ldots 9999$ gaat, dan gaat F_n naar $\ldots 0001$.
- $\ldots 9999$ is hetzelfde als -1 want:
  $\ldots 9999 + \ldots 0001 = \ldots 0000$.
- F_{-1} is gelijk aan 1: $\ldots, 8, 5, 3, 2, 1, 1, 0, 1 = F_{-1}$.
- Dus als n naar -1 gaat, gaat F_n naar F_{-1}? Is F_n continu?
- Waarom gaat dit goed voor $2999\ldots$ en niet voor $1999\ldots$?
- Periode van de resten-rij voor $n = 10, 100, 1000$ etc.

Pro-eindige getallen

- Oneindig veel cijfers, het k-de cijfer is een getal tussen 0 en k. Bijv:

$$(\ldots 96825342311)_!$$

- $\widehat{\mathbb{Z}} = \{(a_n)_{n\geq 1} \in \prod_{n\geq 1} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} :$ voor elke $n \geq 1$ en elke deler d van n geldt $a_n \equiv a_d \pmod{d}\}$.

Pro-eindige getallen

- Oneindig veel cijfers, het k-de cijfer is een getal tussen 0 en k. Bijv:
$$(\dots 96825342311)_!$$
- $\widehat{\mathbb{Z}} = \{(a_n)_{n\geq 1} \in \prod_{n\geq 1} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} :$ voor elke $n \geq 1$ en elke deler d van n geldt $a_n \equiv a_d \pmod{d}\}$.
- $\widehat{\mathbb{Z}}$ is een uitbreiding van $\mathbb{Z}$, zoals $\mathbb{R}$ dat ook is.
- Op $\widehat{\mathbb{Z}}$ kan je net als op $\mathbb{R}$ analyse bedrijven!

De uitbreiding van F_n naar $\widehat{\mathbb{Z}}$.

- De rij van Fibonacci, F_n, is een functie van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$ en is uit te breiden tot een functie van $\mathbb{Z}$ naar $\mathbb{Z}$.
- Deze functie is uit te breiden tot $\widehat{F}$ van $\widehat{\mathbb{Z}}$ naar $\widehat{\mathbb{Z}}$.
- $\widehat{F}$ blijkt dan een continue functie te zijn!
- Om continuïteit te definiëren, heb je een topologie op $\widehat{\mathbb{Z}}$ nodig....

Topologie en getaltheorie

- Wat betekent ‘dicht bij elkaar’ in $\widehat{\mathbb{Z}}$?
- Topologie: wat is een *open verzameling* van $\widehat{\mathbb{Z}}$?
- Als we hierop antwoord hebben kunnen we spreken over:
  - continuïteit
  - limieten
  - afgeleide
  - machtreeksontwikkelingen

Topologie en getaltheorie

- Wat betekent ‘dicht bij elkaar’ in $\widehat{\mathbb{Z}}$?
- Topologie: wat is een *open verzameling* van $\widehat{\mathbb{Z}}$?
- Als we hierop antwoord hebben kunnen we spreken over:
    - continuïteit
    - limieten
    - afgeleide
    - machtreeksontwikkelingen
- Hiermee kan je bijvoorbeeld de *dekpunten* van $\widehat{F}$ vinden (voor welke s in $\widehat{\mathbb{Z}}$ is $s = \widehat{F}_s$?).
  Er blijken 11 dekpunten te zijn, waaronder $F_0 = 0, F_1 = 1$ en $F_5 = 5$.

Hoe is het om LIO te zijn bij Hendrik Lenstra?

- Aanstekelijk enthousiasme van Hendrik Lenstra, inspirerend, geniaal, didaktisch goed.

Hoe is het om LIO te zijn bij Hendrik Lenstra?

- Aanstekelijk enthousiasme van Hendrik Lenstra, inspirerend, geniaal, didaktisch goed.
- Nadeel: je voelt je zo klein.....

Hoe is het om LIO te zijn bij Hendrik Lenstra?

- Aanstekelijk enthousiasme van Hendrik Lenstra, inspirerend, geniaal, didaktisch goed.
- Nadeel: je voelt je zo klein.....
- Voordeel: je gaat je leerlingen weer beter begrijpen.....

Hoe is het om LIO te zijn bij Hendrik Lenstra?

- Aanstekelijk enthousiasme van Hendrik Lenstra, inspirerend, geniaal, didaktisch goed.
- Nadeel: je voelt je zo klein.....
- Voordeel: je gaat je leerlingen weer beter begrijpen.....
- Op veel manieren in lespraktijk te gebruiken.

Behoefte aan meer?

- http://www.math.leidenuniv.nl/ bzeven/
- Hendrik Lenstra: http://www.math.leidenuniv.nl/ hwl/
- Leraar In Onderzoek: www.nwo.nl/lio
- P.Stevenhagen, *Syllabi ALGEBRA 1,2 en 3*, http://websites.math.leidenuniv.nl/algebra/
- Frits Beukers, *Getaltheorie voor beginners*
- Hardy/Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*
- A.van der Schoot, *De ontstelling van Pythagoras*