Volume doorheen de eeuwen: in stukjes of in plakjes?

Michel Roelens

geïntegreerde lerarenopleiding bachelor secundair onderwijs
Katholieke Hogeschool Limburg, Diepenbeek
Maria Boodschaplyceum, Brussel
redactie Uitwiskeling
e-mail: Michel.Roelens@ler.khlim.be

Het volume van een piramide of van een kegel? “Oppervlakte grondvlak maal hoogte gedeeld door 3.” Het volume van een bol? “Oppervlakte maal straal gedeeld door 3.” Waarom moet je precies door 3 delen? Je kunt dit controleren met een vloeistof, maar dat geeft nog geen antwoord op de vraag ‘waarom’. De meeste verklaringen maken gebruik van integralen of van flinterdunne plakjes (het principe van Cavalieri). Maar als die plakjes een dikte hebben, krijg je maar een benadering van het ruimtelichaam; zijn ze ‘oneindig dun’, dan hebben ze geen volume. Kan het niet eenvoudiger, zoals in het vlak bij de oppervlakte van een driehoek, door in stukjes te snijden en de stukjes op een andere manier weer bij elkaar te voegen? Om hier een antwoord op te vinden, maken de deelnemers aan deze workshop een tochtje door de geschiedenis. Hierbij ontdekken ze dat het begrip ‘volume’ vroeger helemaal niet werd bekeken als een ‘formule waarin je de juiste afmetingen moet invullen’ en dat de eeuwenlange strijd tussen de ‘stukjes’ en de ‘plakjes’ een verrassende ontknoping kende rond 1900.

1 Inleiding

1.1 Water overgieten

Vul je drie keer na elkaar een piramide met water en giet je dit over in een prisma met hetzelfde grondvlak en dezelfde hoogte, dan wordt het prisma precies tot aan de rand gevuld. Dit experiment wordt vaak in de lagere school of in het begin van het secundair onderwijs uitgevoerd om te laten zien dat het volume van de piramide gelijk is aan één derde van het volume van het prisma. Omdat het volume van een prisma gelijk is aan de oppervlakte van het grondvlak maal de hoogte, levert dit de ‘formule’ op voor het volume van een piramide:

$$\text{volume piramide} = \frac{(\text{oppervlakte grondvlak})\cdot \text{hoogte}}{3}.$$

Dit is overtuigend en het is ook goed dat zulke experimenten in een wiskundeles gebeuren. Maar het vormt geen wiskundig *bewijs* voor deze formule. Het experiment toont niet aan dat de verhouding *exact* één derde is. Bovendien geeft het experiment geen antwoord op de vraag *waarom* de verhouding $\frac{1}{3}$ is en waarom het voor *alle* piramides het geval is.

Bij de aanbreng van de oppervlakte van een driehoek hoort een analoog experiment: met twee identieke (congruente) kartonnen driehoeken kun je één parallellogram vormen. De oppervlakte van de driehoek is dus de helft van de oppervlakte van het parallellogram. Dit geeft:

$$\text{oppervlakte driehoek} = \frac{\text{basis} \cdot \text{hoogte}}{2} .$$

Dit experiment is van een andere orde dan het water gieten bij de piramide: het vormt een (preformeel) *bewijs* waarmee de oppervlakte van een driehoek herleid wordt tot de oppervlakte van een parallellogram. In tegenstelling met het water gieten, wordt hier wel uitgelegd *waarom* je bij de oppervlakte van een driehoek door twee moet delen (op voorwaarde dat de oppervlakte van een parallellogram vooraf gekend is).

Kunnen we met een piramide niet gewoon 'hetzelfde' doen als met een driehoek: drie identieke kopieën tegen elkaar zetten en een prisma vormen? Hier komen we in paragraaf 3 op terug. In paragraaf 2 willen we eerst het volume van een prisma bestuderen.

1.2 Geschiedenis van de wiskundige basisbegrippen

Het begrip 'volume' lijkt er altijd al geweest te zijn, net zoals de begrippen 'getal', 'functie', 'oppervlakte'… Toch is dit niet het geval, althans niet in de vorm die wij nu kennen. Deze begrippen hebben een hele evolutie gekend. Wijzelf, en zeker onze leerlingen, bekijken oppervlakten en volumes als *maatgetallen* die je kunt uitrekenen door de afmetingen van de figuur in te vullen in bepaalde formules. Zo bekeken de Oude Grieken het niet. Zij vergeleken altijd twee oppervlakten of twee volumes. Bovendien bekeken ze de figuren zelf als grootheden: ze schreven "de oppervlakte van " of "het volume van" er nooit bij. Ze zeiden bv. "Twee piramides met gelijke grondvlakken verhouden zich tot elkaar zoals hun hoogtes."

Dit verschil in benadering houdt verband met het getalbegrip. Ons begrip 'reëel getal' is geschikt om maatgetallen van willekeurige grootheden weer te geven. Voor de Oude Grieken waren de enige getallen de natuurlijke getallen (verschillend van 0). Verder bestudeerden zij *verhoudingen* van getallen en van grootheden, maar deze verhoudingen zelf werden niet als getallen bekeken. Als wij zeggen: "De pythagoreeërs bewezen dat $\sqrt{2}$ een irrationaal getal is.", is dit een anachronisme. Zij ontdekten dat de verhouding tussen de diagonaal en de zijde van een vierkant niet gelijk is aan de verhouding van twee (natuurlijke) getallen. Voor ons is dit met terugwerkende kracht equivalent met de irrationaliteit van $\sqrt{2}$.

2 Het volume van een prisma

Om het volume van een piramide te bepalen, willen we steunen op het volume van een prisma. Een prisma kunnen we altijd opdelen in prisma's met driehoekige grondvlakken. En het volume van een prisma met driehoekig grondvlak kunnen we herleiden tot het volume van een parallellepipedum[1]. Het volume van een parallellepipedum kunnen we herleiden tot het volume van een balk.

[1] Een *parallellepipedum* is de ruimtelijke tegenhanger van het parallellogram: een (recht of schuin) prisma met als grondvlak een parallellogram. Een balk is dus een speciaal parallellepipedum, waarbij de hoeken van alle zijvlakken recht zijn. In het Frans wordt een balk trouwens meestal *'un parallélépipède rectangle'* genoemd.

2.1 Het volume van een balk

Het volume van een balk is:

volume balk = lengte · breedte · hoogte = (oppervlakte grondvlak) · hoogte.

Merk op dat zelfs deze elementaire formule het resultaat is van een *limietproces*[2]. In het geval waarbij lengte, breedte en hoogte rationale verhoudingen hebben tot de lengte-eenheid, komt deze formule neer op het tellen van kubusjes. Bijvoorbeeld:

- het volume van een balk met lengte 5 m, breedte 4 m en hoogte 2 m is 40 m^3 want er passen precies $5 \cdot 4 \cdot 2 = 40$ kubusjes van 1 m^3 in deze balk;
- het volume van een balk met lengte $\frac{3}{2}$ cm, breedte $\frac{2}{5}$ cm en hoogte $\frac{3}{4}$ cm is $\frac{9}{20}$ cm^3 (het product van de drie afmetingen). Er passen immers $30 \cdot 8 \cdot 15 = 3600$ kubusjes met ribbe $\frac{1}{20}$ cm in en er passen $20 \cdot 20 \cdot 20 = 8000$ van die kubusjes in een kubus van 1 cm^3, zodat een kubus van 1 cm^3 $\frac{3600}{8000} = \frac{9}{20}$ keer in de balk gaat.

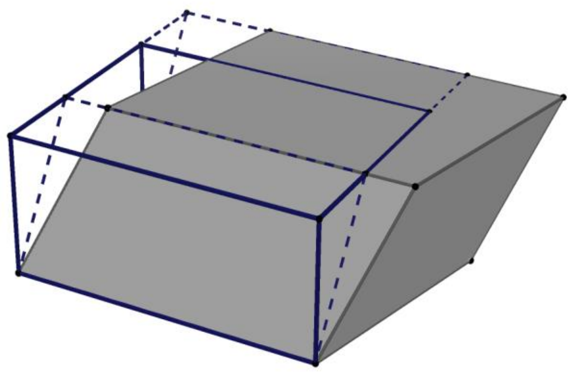
Wanneer één of meer onderlinge verhoudingen tussen de lengte, de breedte en de hoogte irrationaal zijn, kan de balk onmogelijk gevuld worden met identieke kubusjes. Door irrationale verhoudingen te *benaderen* door rationale, kan men met een ‘limietovergang’ aantonen dat de formule voor het volume van de balk geldig blijft. We gaan hier niet dieper op in.

2.2 Volume van een parallellepipedum

Om aan te tonen dat het ook volume van een parallellepipedum gelijk is aan de oppervlakte van het grondvlak maal de hoogte, volstaat het aan te tonen dat dit volume gelijk is aan het volume van een balk waarvan het grondvlak dezelfde oppervlakte heeft en de hoogte gelijk is. Dit is een mooie gelegenheid om duidelijk te maken wat we bedoelen met de ‘stukjes’ en de ‘plakjes’ uit de titel.

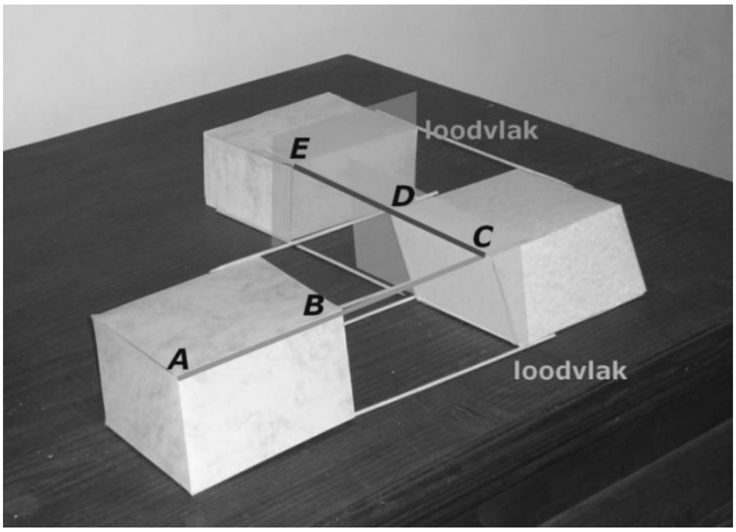
2.2.1 In stukjes of met ‘lucht’

Net zoals je een parallellogram kunt ‘verknippen’ en aaneenplakken tot een rechthoek, kun je een parallellepipedum verknippen en aaneenplakken tot een parallellepipedum. Dit is echter minder overzichtelijk dan bij het parallellogram. Op de figuur hieronder gebeurde het verknippen in twee fasen: van het vol getekende parallellepipedum via het parallellepipedum in stippellijnen (als zijvlakken vier rechthoeken en twee ‘echte’ parallellogrammen) naar de balk waarvan de ribben in doorlopende lijnen getekend zijn. Eigenlijk zou je nog gevallen moeten onderscheiden: als de loodrechte projectie van het ondervlak op het vlak van het bovenvlak volledig buiten het bovenvlak valt, moet je in nog meer stappen verknippen. Maar het analoge probleem stelt zich ook al bij het verknippen van een parallellogram in het vlak.



[2] Je zou natuurlijk ook het volume van een balk kunnen *definiëren* als het product van de drie afmetingen. We werken hier met een meetkundig volumebegrip: het ‘aantal’ eenheidskubusjes dat er in past (desnoods na verknippen of verbrijzelen).

Een alternatief waarbij geen gevalsonderscheid nodig is, bestaat erin het parallellepipedum op dezelfde manier in twee stappen manier te vervormen maar zonder dat de oude en de nieuwe figuren elkaar overlappen. Op de foto hieronder zijn de ribben van een willekeurig parallellepipedum (vooraan links op de tafel) in één richting (AB) verlengd. Deze lijnen worden gesneden met een loodvlak op AB. Op die manier ontstaat een parallellogram, loodrecht op de tafel. Samen met zijn schuifbeeld over de vector $\overrightarrow{AB}$ bepaalt dit een nieuw parallellepipedum, waarvan vier zijvlakken rechthoeken zijn. De oppervlakte van het grondvlak en de hoogte van het nieuwe parallellepipedum zijn dezelfde als bij het oorspronkelijke parallellepipedum. Laten we aantonen dat ze ook hetzelfde volume hebben. Als we het eerste parallellepipedum samen met de 'lucht' tussen het eerste en het tweede verschuiven over de vector $\overrightarrow{AB}$, dan krijgen we dezelfde 'lucht' samen met het tweede parallellepipedum[3]. Bijgevolg hebben ze hetzelfde volume[4]. Door deze procedure nu in de richting van CD te herhalen, verkrijgen we een balk waarvan de oppervlakte van het grondvlak, de hoogte en het volume gelijk zijn aan die van de vorige parallellepipeda. Vermits bij een balk het volume gelijk is aan de oppervlakte van het grondvlak maal de hoogte, geldt dit ook voor het parallellepipedum.



Besluit:

$$\text{volume parallellepipedum} = (\text{oppervlakte grondvlak}) \cdot \text{hoogte} .$$

2.2.2 In plakjes

Een stapel papier vormt een balk. Je kunt de stapel een duw geven zodat die scheef staat en een parallellepipedum vormt (weliswaar nog steeds met rechthoekig grondvlak). Het is aannemelijk dat het volume hetzelfde gebleven is, want het zijn dezelfde bladen papier.

Cavalieri veralgemeende dit principe: de bladen papier van beide stapels hoeven niet congruent te zijn; het volstaat dat ze dezelfde oppervlakte hebben. Bovendien hoeven de stapels niet samengesteld te zijn uit identieke bladen, het volstaat dat de oppervlakte van de bladen die op gelijke hoogte liggen (als beide stapels op de tafel rusten) dezelfde oppervlakte hebben. Dit is het eerste principe van Cavalieri: *"Twee lichamen waarvan de doorsneden op een willekeurige hoogte dezelfde oppervlakte hebben, hebben hetzelfde volume."*. Cavalieri ging nog een stap verder in het veralgemenen. Zijn tweede principe luidt: "*Twee lichamen waarvan de doorsneden op willekeurige hoogte een vaste verhouding hebben (die niet afhangt van deze hoogte), hebben volumes die ook in die verhouding staan*.".[5]

---

[3] Iets preciezer gezegd: we verschuiven het zesvlak dat de unie is van het eerste parallellepipedum en de ruimte (de 'lucht') tussen het eerste en het tweede parallellepipedum.

[4] Waar we hier op steunen is dat een verschuiving het volume bewaart.

[5] Beide principes kunnen ook één dimensie lager geformuleerd worden: twee vlakke figuren waarvan de doorsneden op een willekeurige hoogte even lang zijn (een vaste verhouding hebben), hebben gelijke oppervlakten (hebben oppervlakten in dezelfde verhouding).

Buonaventura Cavalieri (1598-1647)

Deze principes, die Cavalieri expliciet formuleerde, waren al lang vóór Cavalieri toegepast door Archimedes (zie paragraaf 5).

Steunend op het eerste principe van Cavalieri is het heel gemakkelijk om te bewijzen dat het volume van een parallellepipedum gelijk is aan de oppervlakte van het grondvlak maal de hoogte. Construeer een balk waarvan het grondvlak dezelfde oppervlakte heeft als het parallellepipedum en waarvan de hoogte dezelfde is en leg ze op een zelfde tafel. De doorsneden op een willekeurige hoogte hebben dezelfde oppervlakte en dus zijn de volumes gelijk.

Er is echter een verschil tussen de formulering met de 'bladen papier' en de formulering van Cavalieri met de 'doorsneden op een willekeurige hoogte'. De bladen papier hebben een zekere dikte. Het zijn eigenlijk platte balken. Ze kunnen maar bij benadering een parallellepipedum vormen. Hoe dunner het papier, hoe beter deze benadering is. Anderzijds zijn de vlakke doorsneden vlakke figuren zonder dikte. Een som van oppervlakten levert geen volume op; hier gebeurt een problematische 'dimensiesprong'. Pas met de integraalrekening (einde 17de eeuw) is dit probleem opgelost. Het volume is geen som van oppervlakten; de stapel is niet samengesteld uit 'oneindig dunne bladen papier', maar het is een *limiet* van het volume van een stapel balken waarvan tegelijkertijd de dikte naar nul afneemt en het aantal toeneemt naar oneindig, op zo'n manier dat de hoogte van de stapel hierbij niet verandert[6]. Het limietbegrip zelf werd pas in de 19de eeuw door Cauchy en Weierstrass 'mysterieloos' gedefinieerd.[7]

De problemen met de plakjes – tenminste zolang we de uitleg 'elementair' willen houden – vormen een motivatie om de principes van Cavalieri te omzeilen en om de methode van de stukjes te verkiezen. Bij het parallellepipedum is dit alvast mooi gelukt (zie 2.2.1). De piramide is helaas een ander verhaal (zie paragraaf 3).

---

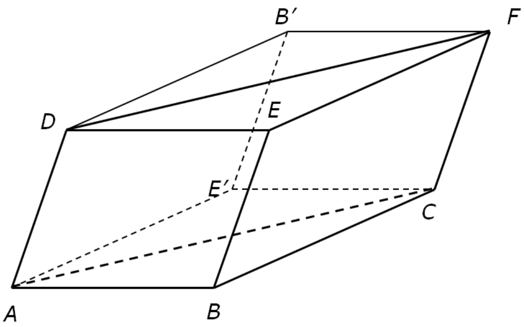
[6] In de 20ste eeuw is een alternatieve oplossing voor dit probleem uitgewerkt. In de *nonstandaardanalyse* worden de reële getallen uitgebreid met oneindig kleine getallen die toch niet nul zijn. In deze theorie kan een oneindige som van oneindig kleine volumes wel een eindig volume verschillend van nul opleveren. Deze theorie vergt echter drastische ingrepen in de logische fundamenten waarop de getallenleer en de analyse gebaseerd zijn.

[7] Met de 'ε-δ-definitie' werd het limietbegrip gestoeld op logica, ongelijkheden en bewerkingen met getallen, en niet meer op vage dynamische ideeën zoals "altijd maar kleiner en kleiner worden".

2.3 Volume van een prisma

2.3.1 Volume van een prisma met driehoekig grondvlak

Met twee congruente kartonnen driehoeken kunnen we een parallellogram maken (zie paragraaf 1). Op een analoge manier kunnen we met twee congruente prisma's met driehoekig grondvlak een parallellepipedum maken (figuur 6). Het prisma *ABC.DEF* wordt met het prisma *FB'D.CE'A* aangevuld tot het parallellepipedum *ABCE'.DEFB'*. Merk op dat het prisma dat erbij komt wel *congruent* is met het oorspronkelijke prisma, maar in het algemeen niet *rechtstreeks congruent*. Het is het puntspiegelbeeld van het oorspronkelijke ten opzichte van het middelpunt van het zijvlak *ACFD*, en in de ruimte is een puntspiegeling geen *verplaatsing* maar een *omkering*.



Het volume van het prisma is de helft van het volume van het parallellepipedum, dus de helft van de oppervlakte van het parallellogram *ABCE'* maal de hoogte, dus de oppervlakte van de driehoek *ABC* maal de hoogte. Besluit:

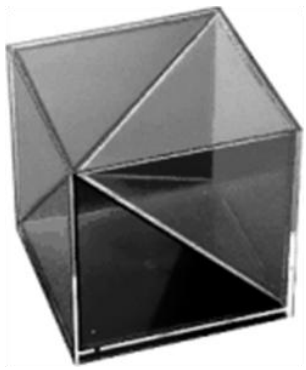
$$\text{volume prisma met driehoekig grondvlak} = (\text{oppervlakte grondvlak}) \cdot \text{hoogte} .$$

2.3.2 Volume van een willekeurig prisma

Het grondvlak van een willekeurig prisma kun je verdelen in driehoeken en op die manier verdeel je het willekeurig prisma in prisma's met driehoekige grondvlakken. Het volume van het willekeurig prisma is de som van de volumes van de deelprisma's. Door het resultaat van 2.3.1 te gebruiken en de gemeenschappelijke factor 'hoogte' buiten haakjes te zetten, vind je dat het volume van het willekeurig prisma gelijk is aan de totale oppervlakte van het grondvlak maal de hoogte. Besluit:

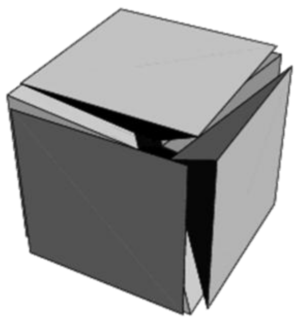
$$\text{volume prisma} = (\text{oppervlakte grondvlak}) \cdot \text{hoogte} .$$

3 Volume van een piramide



3.1 Enkele eenvoudige speciale gevallen

Enkele speciale soorten piramides zijn even makkelijk als de driehoek in het vlak. Dit is vooreerst het geval met een piramide met een vierkant grondvlak, met hoogte gelijk aan de zijde van het grondvlak en met de top loodrecht boven één van de hoekpunten van het grondvlak. Met drie congruente exemplaren kun je een kubus samenstellen. Het volume is bijgevolg één derde van dat van de kubus en dus 'oppervlakte grondvlak maal hoogte gedeeld door 3'. Een tweede speciale geval is een piramide met vierkant grondvlak, met hoogte gelijk aan de helft van de zijde van het grondvlak en met de top loodrecht boven het midden van het grondvlak. Met zes dergelijke piramides kun je een kubus maken. Het volume is bijgevolg één zesde van dat van de kubus en dus weer 'oppervlakte grondvlak maal hoogte gedeeld door 3' (want de hoogte is nu de helft van die van de kubus).



3.2 Volume van een Egyptische piramide in 'plakjes'

Het meten van oppervlakten en volumes is ouder dan de straat. Van de Egyptenaren ten tijde van de farao's (derde millennium v. Chr.) zijn papyrusrollen met hiëroglyfen overgebleven. Hiermee weten we dat zij over methodes beschikten om oppervlakten en volumes te bepalen. Sommige van deze methodes waren niet correct (bv. de oppervlakte van een willekeurige vierhoek als het product van de gemiddelden van de lengten van de overstaande zijden). Maar het volume van een (afgeknotte) piramide konden ze correct berekenen. Hoe ze dit gevonden hebben, weten we niet. Ze leggen ook niet uit 'waarom' hun berekening juist is.

Wat opvalt als je naar een foto van een Egyptische piramide kijkt, is dat die opgebouwd is uit lagen. Het is in feite een *trappiramide*, die aan de buitenkant afgewerkt was met marmer waarmee de trapjes werden gemaskeerd. Op de foto is deze buitenlaag enkel onderaan bewaard gebleven. We weten niet of de lagen een rol hebben gespeeld in het ontdekken van het recept om het volume te berekenen, maar het is een mogelijkheid. Deze lagen bestaan natuurlijk uit verschillende grote stenen, maar we kunnen elke laag ook als één platte, vierkante tegel beschouwen. De lagen doen meteen denken aan de plakjes van Cavalieri, maar dan plakjes met een vaste dikte in plaats van 'oneindig dunne' doorsneden.

Een Egyptische piramide kunnen we 'maken' startend van het tweede speciale geval van 3.1 (één zesde van een kubus) waarvan het grondvlak alvast de juiste grootte heeft. We moeten nog de hoogte aanpassen. We benaderen deze speciale piramide door een trappiramide waarbij de lagen hoogte Δh hebben. Het volume van de speciale piramide (oppervlakte grondvlak maal hoogte gedeeld door 3) is ongeveer gelijk aan de som van de volumes van de lagen. We passen de hoogte aan door verticaal uit te rekken met een aangepaste factor k. Elke laag wordt k keer hoger en dus wordt het volume van elke laag vermenigvuldigd met k. Het volume van de trappiramide is dus ook met k vermenigvuldigd. Dit blijft het geval wanneer we een groter aantal, dunnere lagen nemen. 'In de limiet' krijgen we op die manier een perfecte Egyptische piramide en het volume is oppervlakte grondvlak maal hoogte gedeeld door 3.

Een dergelijke redenering werd voor de komst van de integraalrekening als problematisch bekeken. Democritos van Abdera (5de eeuw v.C.) gebruikte een gelijkaardige redenering en voegde als commentaar toe (Lloyd, 1996): *"What must we think of the surfaces forming the sections? If they are unequal, they will make the pyramid irregular with many indentations, like steps. If they are equal, the pyramid will appear to have the property of the prism and be of equal squares, which is very absurd."*

3.3 Liu Hui en het volume van de yangma

Het voorbeeld dat we in deze paragraaf bestuderen, is opnieuw een speciaal geval van een piramide, maar toch kan men met drie congruente kopieën niet zomaar een balk maken zoals in 3.1. Het is een historische poging om het volume te bepalen door een verdeling in 'stukjes'. Met een eindig aantal stukken zal het echter niet lukken…

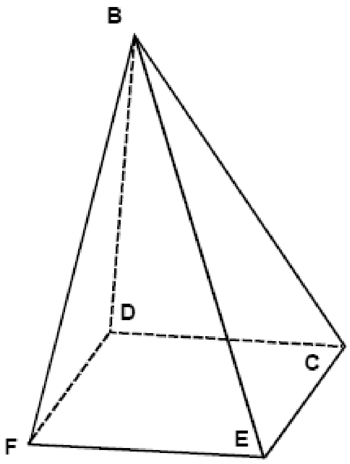
In 213 v. Chr. liet de toenmalige keizer Qin Shih Huang alle bestaande boeken verbranden. Zo'n 40 jaar later, toen het rijk van Qin Shih Huang uit was, noteerde Zhang Cang alle wiskunde die hij zich kon herinneren uit zijn jeugd. Zo ontstonden volgens de legende de *Negen Hoofdstukken over de wiskunst*, het wiskundige standaardwerk in China. De Negen Hoofdstukken bevatte 246 praktische problemen en hun oplossingen. Het boek is geschreven voor ingenieurs, architecten en zakenlui. Het verschil met de *Elementen* van Euclides is dat de Negen Hoofdstukken enkel resultaten en oplossingsmethoden bevatte, geen verklaringen of bewijzen.

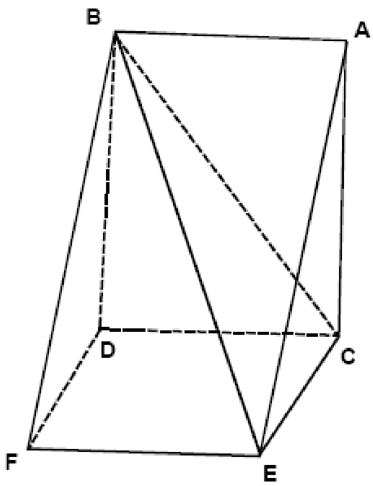
In de derde eeuw na Chr. schreef Liu Hui het werk *Commentaren bij de negen hoofdstukken*. In tegenstelling tot Zhang Cang levert Hui wel bewijzen. Hij geeft onder meer een mooie verklaring voor de formule van het volume van een speciale soort piramiden.

Hui onderzoekt het volume van een piramide waarvan het grondvlak een rechthoek is en waarvan de top loodrecht boven één hoekpunt van het grondvlak staat. Zo'n piramide noemt hij een *yangma*. Een yangma lijkt op de eerste speciale piramide uit 3.1, behalve dat de drie loodrechte afmetingen nu niet meer gelijk hoeven te zijn. Merk op dat we met drie congruente yangma's niet zomaar een balk kunnen vormen.

Liu Hui (220-280)

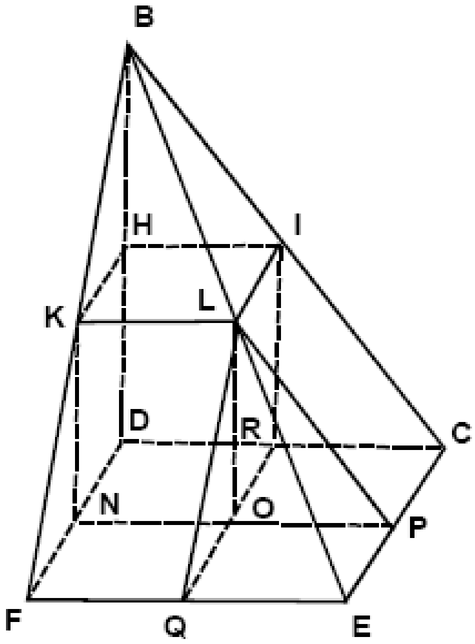
Hui wil aantonen dat het volume van de yangma één derde is van het volume van de balk met zelfde grondvlak en hoogte. Daarvoor breidt hij de yangma uit met een viervlak (dat hij *bienao* noemt), zo dat er een prisma ontstaat met als grondvlak een rechthoekige driehoek. Het is duidelijk dat het volume van dit prisma de helft is van het volume van de balk. Het prisma noemt hij een *qiandu*.

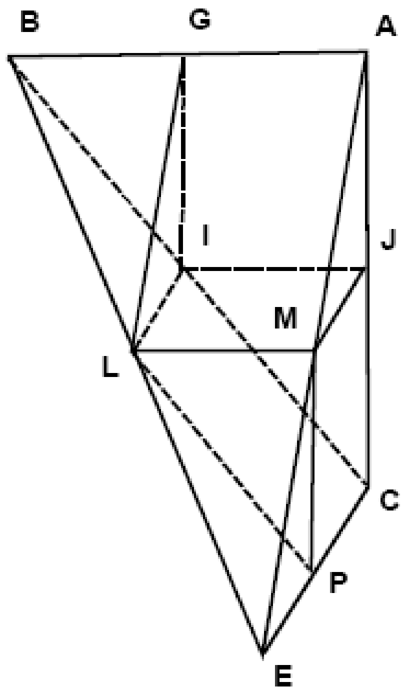




Het volstaat aan te tonen dat het volume van de yangma het dubbel is van dat van de bienao; dan zijn hun volumes immers $\frac{2}{3}$ en $\frac{1}{3}$ van de halve balk, dus $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{6}$ van de hele balk.

Hui splitst beide ruimtefiguren op. Daarvoor gebruikt hij drie snijvlakken: een snijvlak door het midden van de opstaande ribben van de balk, en twee snijvlakken hier loodrecht op (zie de figuur hieronder). Zo verdeelt hij de yangma in twee kleinere yangma's, een kleinere balk en twee kleinere qiandu's. De bienao wordt opgesplitst in twee kleinere bienao's en twee qiandu's.





Als we het aantal kleinere balken tellen, zijn er links, aan de kant van de yangma, twee (namelijk één hele en twee halve) en rechts, aan de kant van de bienao, één (namelijk twee halve). Verder hebben we aan beide kanten twee kleinere versies van de oorspronkelijke figuur.

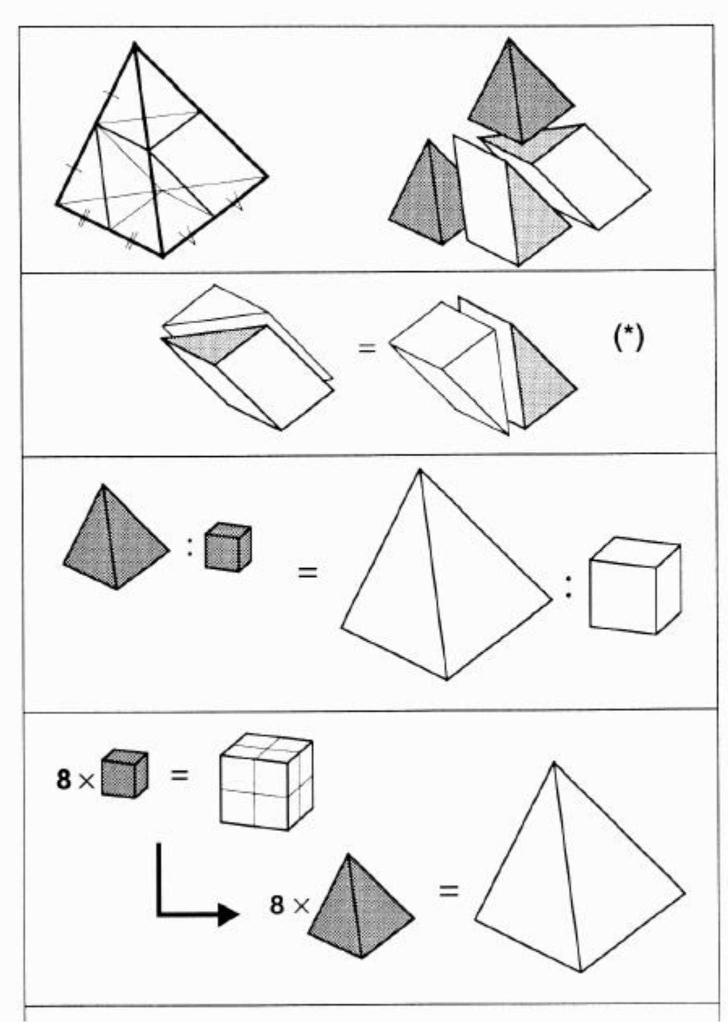
Die kleine yangma's en die kleine bienao's kunnen we weer opdelen. Weer krijgen we telkens twee balken en twee yangma's aan de ene kant en één balk en twee bienao's aan de andere kant. De yangma's en bienao's kunnen weer worden opgedeeld in nog kleinere stukken. Steeds heb je aan de linkerkant dubbel zoveel balkjes als rechts. Als je dat altijd blijft doen, worden de yangma's en de bienao's kleiner en kleiner zodat als het ware de balkjes het hele volume uitmaken. Cauchy zou hier zeggen: het gezamenlijke volume van de kleine yangma's en bienao's kan zo klein gemaakt worden als men wil, kleiner dan een vooraf gekozen klein positief getal ε, door de het aantal stappen groot genoeg te nemen. Maar Hui dacht blijkbaar aan een soort 'fysische limiet' onder dewelke het geen zin meer heeft om over volume te spreken: "De yangma's en de bienao's worden zo klein, dat ze geen volume meer hebben".

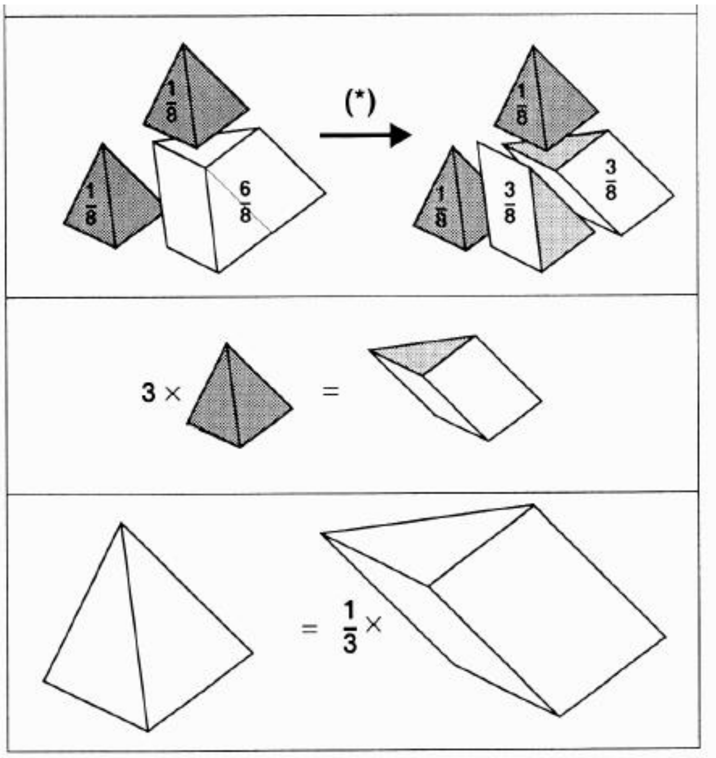
3.4 Volume van een willekeurige piramide in 'stukjes'?

Tot hier toe bewezen we de formule voor het volume van een piramide enkel in speciale gevallen. We willen hier het algemene geval bespreken en dit in 'stukjes' doen, niet in 'plakjes'.

Een eerste bedenking is dat het volstaat te werken met een piramide met driehoekig grondvlak, met andere woorden een willekeurig viervlak. Immers, het grondvlak van een willekeurige piramide kan worden verdeeld in driehoeken en we kunnen dezelfde redenering maken als in 2.3.2.

We bekijken het stripverhaal in figuur 13, uit Kindt (1999).





We laten dit stripverhaal voor zichzelf spreken. Laten we enkel aanstippen dat Martin Kindt gebruik maakt van het effect op het volume van een verdubbeling van alle afmetingen (het volume wordt acht keer zo groot). Hier steunt hij niet zomaar op, maar in het derde en vierde prentje laat hij dit volgen uit een principe dat nog elementairder is: bij het verdubbelen van alle afmetingen van twee lichamen, blijft de verhouding van de twee volumes ongewijzigd. Anders gezegd: een verhouding van volumes is schaalonafhankelijk. Dit principe wordt opnieuw toegepast bij de overgang tussen het voorlaatste en het laatste prentje.

Hiermee is dan algemeen aangetoond dat

$$\text{volume piramide} = \tfrac{1}{3}\ (\text{oppervlakte grondvlak}) \cdot \text{hoogte}\ .$$

Bevat het stripverhaal nu een bewijs ‘in stukjes’ voor het feit dat het volume van een piramide gelijk is aan één derde van dat van een prisma met zelfde grondvlak en hoogte? Eigenlijk niet: het maakt gebruik van ‘stukjes’ (verknippen en herschikken) *en* vergroting/verkleining. In die zin lijkt de redenering op die van Liu Hui, ook al lijkt er hier nergens een limietredenering nodig te zijn. Het effect van de verdubbeling op het volume wordt bij de kubus aangetoond via ‘stukjes’ :de grote kubus kan verdeeld worden in acht kleine kubusjes.

3.5 De onmogelijkheid van een bewijs 'in stukjes'

In het jaar 1900, op het grote wereldcongres van de wiskundigen in Parijs, stelde David Hilbert 23 problemen voor die de wiskunde van de twintigste eeuw in grote mate zouden bepalen. Verschillende van deze problemen zijn intussen opgelost; enkele staan nog open. Het derde probleem van Hilbert kwam neer op de bepaling van het volume van een willekeurig viervlak door 'knippen en plakken' met een eindig aantal stukken. Hilbert had de intuïtie dat dit onmogelijk zou zijn maar hier was nog geen sluitend bewijs voor. De formulering van Hilbert was "bewijs dat er twee viervlakken bestaan met zelfde grondvlak en hoogte maar die niet door tot elkaar kunnen worden omgevormd door knippen en plakken met een eindig aantal stukken. Men kan aantonen dat deze formulering op equivalent is met de onmogelijkheid van de volumebepaling in stukjes. Max Dehn loste het probleem enkele maanden later op door te bewijzen dat het onmogelijk is. Het bewijs van Dehn steunt op hogere wiskunde maar de basisidee is wel te begrijpen: met elk veelvlak associeert hij een 'Dehn-invariant'. Dit is een getal dat hetzelfde is voor veelvlakken die je via een eindige knip- en plakoperatie tot elkaar kunt omvormen. Dan laat hij zien dat er twee viervlakken bestaan waarvan de oppervlakte van het grondvlak en de hoogte gelijk zijn, maar die een verschillende Dehn-invariant hebben.

David Hilbert (1862-1943)

Max Dehn (1878-1952)

Een bewijs voor het volume van een viervlak, en dus van een piramide, is dus onmogelijk zonder gebruik te maken van een limietproces (zoals bij de bewijzen 'in plakjes' of zoals bij het steeds verder opdelen in stukjes bij Liu Hui) of van een vergroting of verkleining (zoals in het stripverhaal van Kindt). Het verknippen en plakken met een eindig aantal stukken volstaat niet, in tegenstelling met de bepaling van de oppervlakte van een driehoek in het vlak. Dit onmogelijkheidsbewijs is het eindpunt van een hele geschiedenis, waarin je naast de *plakjes*-tendens vele pogingen terugvindt om het volume te bepalen met 'stukjes'. Deze pogingen waren dus achteraf gezien tot mislukken gedoemd.

4 Volume van een cilinder en een kegel

Een cilinder kun je benaderen door een prisma door het cirkelvormig grondvlak te benaderen door een regelmatige veelhoek met een toenemend aantal hoekpunten. Op die manier kan met een limietovergang aangetoond worden dat het volume van een cilinder eveneens gelijk is aan:

$$\text{volume cilinder} = (\text{oppervlakte grondvlak}) \cdot \text{hoogte}.$$

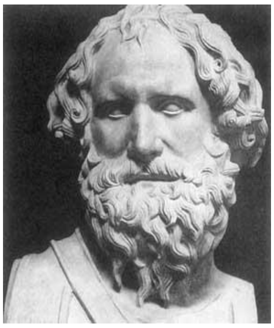
Een kegel kun je op een analoge manier benaderen door een piramide. Op die manier kan aangetoond worden dat het volume van een kegel eveneens gelijk is aan:

$$\text{volume kegel} = \frac{(\text{oppervlakte grondvlak}) \cdot \text{hoogte}}{3}.$$

5. Volume van een bol

Archimedes van Syracuse was de grootste wiskundige, natuurkundige en ingenieur van de Oudheid. In deze paragraaf bekijken we hoe hij het volume van een bol vond.

Archimedes had een werk geschreven over zwaartepunten van vlakke figuren (*Evenwicht in het vlak*) en hij had de wetten van de hefbomen en de balansen bestudeerd. Een balans is in evenwicht als aan beide kanten het product van de massa met de afstand tot het steunpunt hetzelfde is. In de huidige fysicalessen zegt men dat de 'momenten' gelijk moeten zijn. Aan Archimedes schrijft men in dit verband de uitspraak toe: "Geef mij een steunpunt en ik verplaats de aarde.".



Archimedes van Syracuse (287 – 212 v. Chr.)

Een belangrijke verwezenlijking van Archimedes is de bepaling van het volume van een bol. In zijn werk *De bol en de cilinder* toont hij aan dat het volume van een bol gelijk is aan 4 keer het volume van een kegel met als grondvlak een grote cirkel van de bol en als hoogte de straal van de bol. Merk op dat dit op hetzelfde neerkomt als 'onze' formule

$$\text{volume bol} = \tfrac{4}{3}\pi \cdot \text{straal}^3.$$

Hier leidt hij uit af dat een cilinder waar de bol juist in past, anderhalve keer zo groot is als de bol.

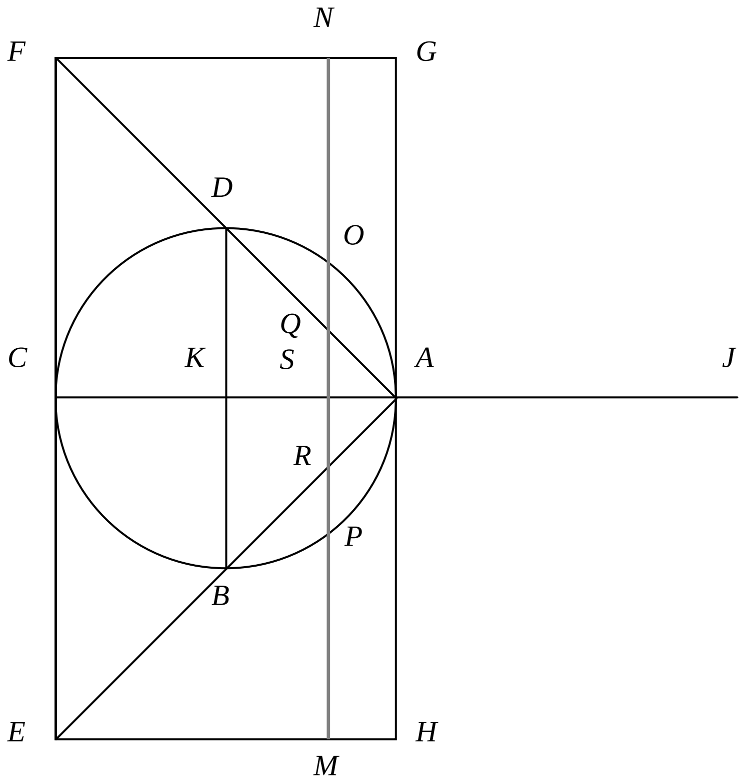
Daarna toont Archimedes aan dat ook de *oppervlakte* van deze cilinder anderhalve keer de oppervlakte van de bol is. Dat de volumes van twee lichamen zich verhouden zoals hun oppervlakten, is iets heel speciaals. Archimedes vond zijn resultaat zo belangrijk dat hij, aldus Plutarchos, een afbeelding van een bol ingeschreven in een cilinder op zijn graf liet aanbrengen.

Het bewijs in *De bol en de cilinder* steunt op de *exhaustiemethode* (uitputtingsmethode) van Eudoxos en past volledig binnen de deductieve opbouw van de Elementen van Euclides. De verhouding van beide volumes wordt geponeerd en vervolgens wordt aangetoond − met een voorloper van Cauchy's epsilon-delta's − dat die verhouding niet groter en ook niet kleiner kan zijn dan de geponeerde waarde.

Rond 1900 ontdekte men in Jeruzalem een *palimpsest*, waarin onder meer een tot dan toe onbekend of vergeten werk van Archimedes verstopt zat. Een palimpsest is een perkamenten boek dat afgeschraapt is en overschreven is met religieuze teksten. In het aldus ontdekte werk *De methode* legt Archimedes uit hoe hij het volume van een bol gevonden heeft, steunend op een denkbeeldige balans waarop oppervlakten in evenwicht worden gehouden. Archimedes beschouwt deze methode niet als een bewijs; ze past niet binnen het euclidische systeem en mengt wiskunde met ideeën uit de fysica. Bovendien steunt de redenering op een 'dimensiesprong': uit verbanden tussen oppervlakten van doorsneden wordt een verband tussen volumes afgeleid. Het is dus een redenering in 'plakjes', een toepassing *avant la lettre* van het principe van Cavalieri (zie 2.2.2).

De verhouding van de volumes van een kegel en de omgeschreven cilinder (één derde) was al gekend vóór Archimedes. Hij vermeldt dat dit resultaat ontdekt is door Democritos en bewezen door Eudoxos.

Om hier het volume van een bol uit af te leiden (of liever: de verhouding van het volume van een bol met dat van een kegel of een cilinder), bedenkt hij een denkbeeldige weegschaal waarmee hij deze drie ruimtelichamen met elkaar in balans brengt. We overlopen deze redenering. De figuur is die van Archimedes, maar we hebben de Griekse letters vervangen door Latijnse. We hebben hierbij ook een presentatie gemaakt, die terug te vinden is op de site www.uitwiskeling.be.



Beschouw

- de bol die ontstaat door de cirkel *ABCD* te wentelen rond de as *AC*;
- de kegel die ontstaat door de driehoek *AEF* te wentelen rond diezelfde as;
- de cilinder die ontstaat door de rechthoek *EFGH* te wentelen rond diezelfde as.

Verleng *AC* aan de kant van *A* en neem hierop een punt *J* zo dat $|AJ| = |CA|$. De as *AJ* bekijkt Archimedes als een balans met steunpunt *A*.

Neem een willekeurig vlak loodrecht op de as (de lijn *MN* op de figuur). De drie lichamen worden gesneden en er ontstaan aldus drie cirkels. De snijcirkel van de cilinder laat Archimedes daar staan in het punt *S*; de snijcirkels van de bol en van de kegel verschuift hij naar het punt *J*. Dan toont hij aan dat (de oppervlakten van) deze drie cirkels de balans in evenwicht brengen als je deze oppervlakten als ‘gewichten’ opvat. Anders gezegd: de oppervlakte van de cirkel met middellijn $[MN]$ vermenigvuldigd met $|AS|$ is gelijk aan de som van de oppervlakten van de cirkels met middellijnen $[OP]$ en $[QR]$ vermenigvuldigd met $|AJ|$.

Dit geldt voor *elke* dwarsdoorsnede. Nu beschouwt Archimedes al deze dwarsdoorsneden samen. Links heeft hij alle dwarsdoorsneden van de cilinder, die hij vervangt door het volume van de cilinder in het zwaartepunt *K*. Rechts heeft hij alle dwarsdoorsneden van de kegel en van de bol, allemaal in dat ene punt *J*. Hij vervangt ze door de som van de volumes van de bol en de kegel, in *J*. Uit het evenwicht volgt:

$$(\text{volume cilinder}) \cdot |AK| = (\text{volume bol} + \text{volume kegel}) \cdot |AJ|$$

$$\text{volume cilinder} = 2\ (\text{volume bol} + \text{volume kegel})\ .$$

Maar Archimedes weet dat het volume van de cilinder gelijk is aan 3 keer dat van de kegel. Dus leidt hij hieruit af:

$$\text{volume bol} = \tfrac{1}{2}\,(\text{volume kegel})\ .$$

De kleinere kegel, die ontstaat door de driehoek *ABD* rond de as te wentelen en die ingeschreven is in de (rechterhelft van) de bol, is een verkleining met factor $\frac{1}{2}$ van de grote kegel en heeft dus als volume één achtste van dat van de grote kegel. Bijgevolg is het volume van de bol gelijk aan 4 keer het volume van deze kleine kegel.

Dit laat Archimedes vermoeden: “De *oppervlakte* van de bol moet gelijk zijn aan 4 keer de oppervlakte van het grondvlak van deze kleine kegel. Ik heb immers de intuïtie dat, aangezien elke cirkel gelijk is aan de driehoek met als basis de omtrek van de cirkel en als hoogte de straal, elke bol ook gelijk moet zijn aan de kegel met als grondvlak de oppervlakte van de bol en als hoogte de straal.” Is dit louter ‘analogie’ of ziet Archimedes de bol als opgedeeld in kleine ‘kegels’? Als je immers de oppervlakte van de bol verdeelt in heel veel kleine stukjes, dan kun je de bol bekijken als samengesteld uit kleine ‘kegels’ waarvan de grondvlakken bijna vlak zijn en met hoogte ongeveer de straal r van de bol.

De methode eindigt met dit vermoeden over de oppervlakte van een bol. In *De bol en de cilinder* bewijst Archimedes dit vermoeden. Daarna bewijst hij, hierop steunend, zijn bevinding over het volume van een bol die hij in *De methode* met een balans had ontdekt.

Referenties

Barra, M. (1998). Che fine farà Allice? Da Euclide al 1965 con l’equisconponibilità, *Cabrirrsae. Bollettino degli utilizzatori di Cabri-Géomètre 15*, 2-5.

Bockstaele, P. (1971). *Meetkunde van de ruimte voor het middelbaar en normaal onderwijs*. Antwerpen: Standaard.

Cromwell, P. R. (1997). *Polyhedra*. Cambridge: Cambridge University Press.

Dunham, W. (1991). *Journey through genius. The great theorems of mathematics*. New York: John Wiley and Sons.

Kindt, M. (1999). Wat te bewijzen is: het volume van een piramide, *Nieuwe Wiskrant 19/2* 30–31.

Lloyd, G. (1996). Finite and infinite in Greece and China, *Chinese Science 13*, 11-34.

Roelens, M., Willems, J. (2005). Oppervlakte en volume door de eeuwen heen. *Uitwiskeling 21/3*, 16–37.

Roelens, M., The volume of a pyramid through the ages. To slice or not to slice, that’s the question! *Proceedings of the 5th European Summer University on history and epistemology in mathematics education (Praag juli 2007), te verschijnen.*

Ver Eecke, P. (1960). *Oeuvres complètes d'Archimède, suivies des commentaires d'Eutocius d'Ascalon*. Liège: Vaillant-Carmanne.

Wilson, A.M. (1995). *The infinite in the finite*, Oxford: Oxford University Press.

http://www.uitwiskeling.be/2103/Presentatie2103_Archimedes.ppt (presentatie over de balansmethode van Archimedes om het volume van een bol te vinden)

http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html (Elementen van Euclides met applets)