

INVASIEPERCOLATIE

Frank den Hollander

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
EURANDOM, Eindhoven

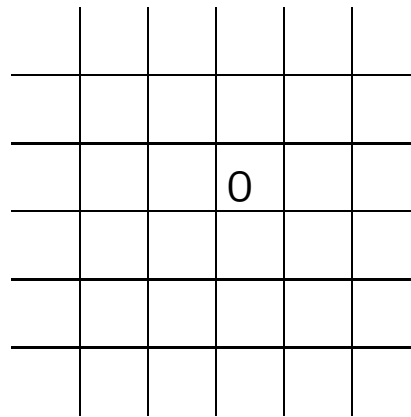
Nationale Wiskunde Dagen 2008

Percolatietheorie is dat onderdeel van de stochastiek dat zich toelegt op het bestuderen van de ruimtelijke eigenschappen van random netwerken.

TOEPASSINGEN:

Olie, elektriciteit, verkeer, computers, telefonie.

PARADIGMA MODEL:



Het kwadratische rooster $\mathbb{Z}^2$

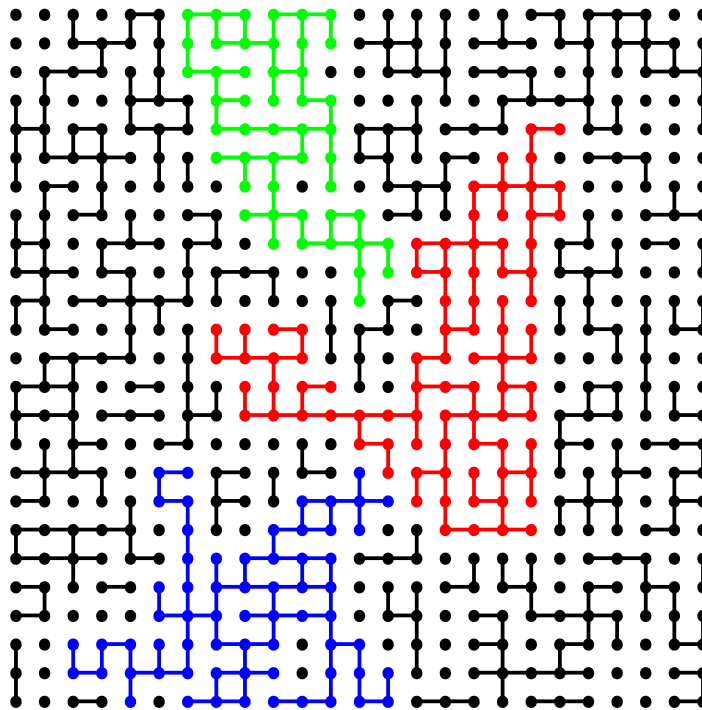
Ken aan elke binding onafhankelijk een random gewicht toe, gekozen volgens de uniforme verdeling op $(0, 1)$.

(1) STATISCHE VARIANT:

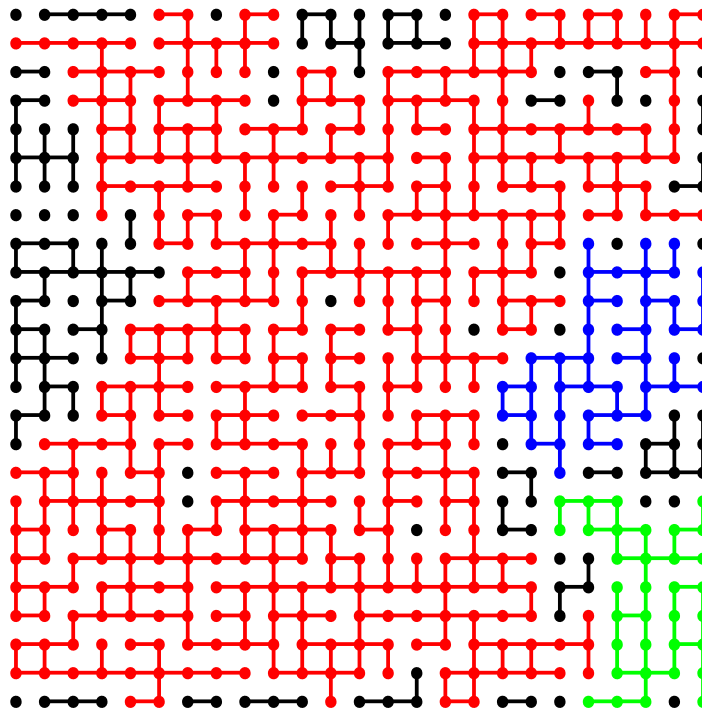
Voor $p \in (0, 1)$, zij $C(p)$ de cluster van punten die met 0 verbonden zijn via bindingen met gewicht $\leq p$. Dan geldt

$$C(0) = \{0\}, \quad C(1) = \mathbb{Z}^2, \quad p \mapsto C(p) \text{ niet-dalend.}$$

Simulatie van $C(p)$ voor $p = 0.45$:



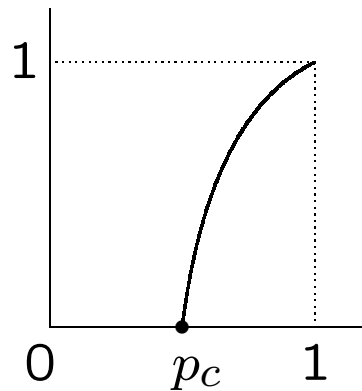
Simulatie van $C(p)$ voor $p = 0.55$:



Definieer

$\theta(p)$ = kans dat $C(p)$ oneindig groot is.

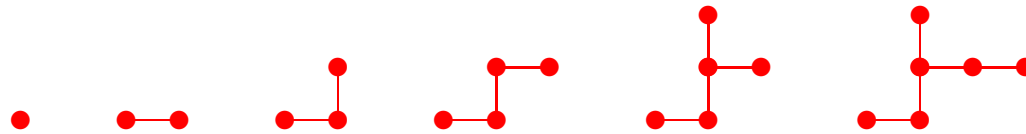
Dan blijkt



De percolatiefunctie $\theta(p)$: $p_c = \frac{1}{2}$

(2) DYNAMISCHE VARIANT:

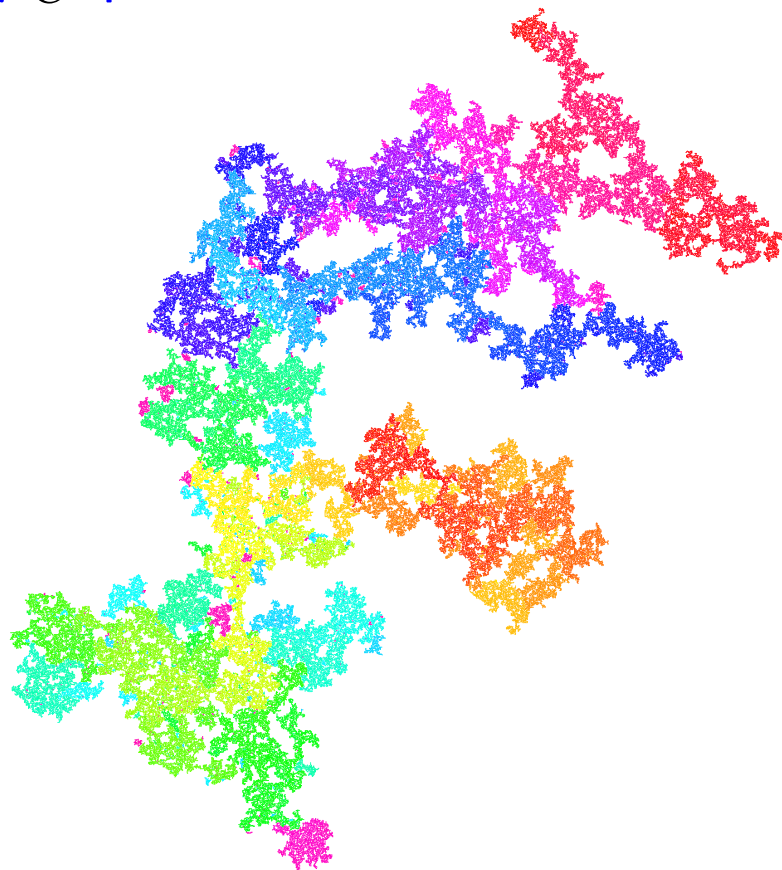
Zij C^* de cluster die iteratief vanuit 0 wordt gegroeid door steeds die binding aan de rand van het cluster toe te voegen die het kleinste gewicht heeft.



Zes toevallige iteraties van het invasiecluster op $\mathbb{Z}^2$

Dit is een model voor de verspreiding van een virus door een netwerk van computers.

Simulatie van C^* :



STELLING:

Chayes, Chayes en Newman 1985

Op den duur accepteert C^* slechts bindingen met gewicht $\leq p_c$.

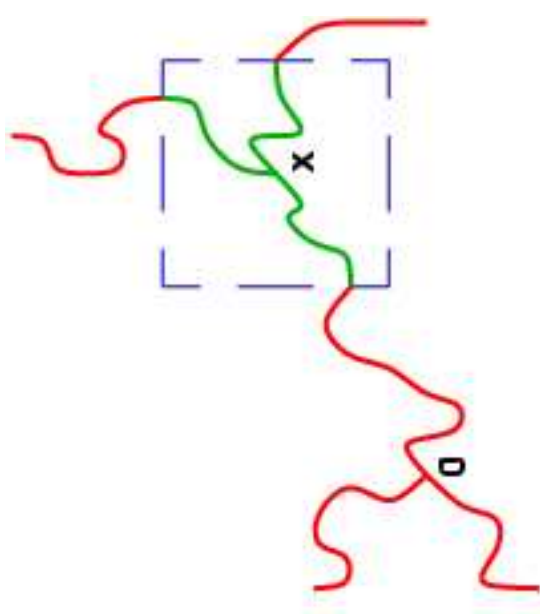
Blijkbaar zijn C^* en $C(p_c)$ nauw aan elkaar verwant. Op welke manier? Dat is nog niet bekend!

“self-organised criticality”

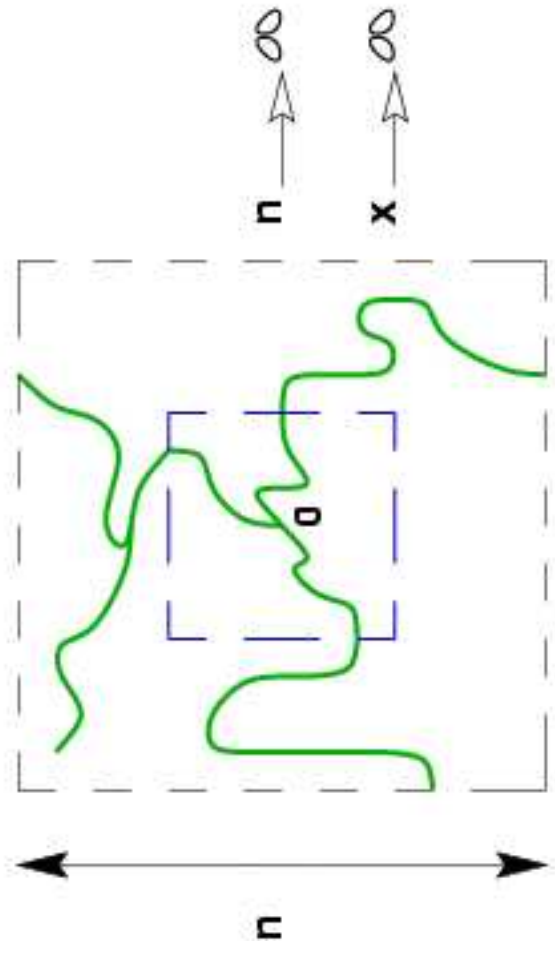
STELLING:

Jarai 2003

Op $\mathbb{Z}^2$ heeft C^* ver van de oorsprong dezelfde lokale structuur als $C(p_c)$ rond de oorsprong, wanneer $C(p_c)$ erg groot is.



C^*



$C(p\epsilon)$

VRAAG:

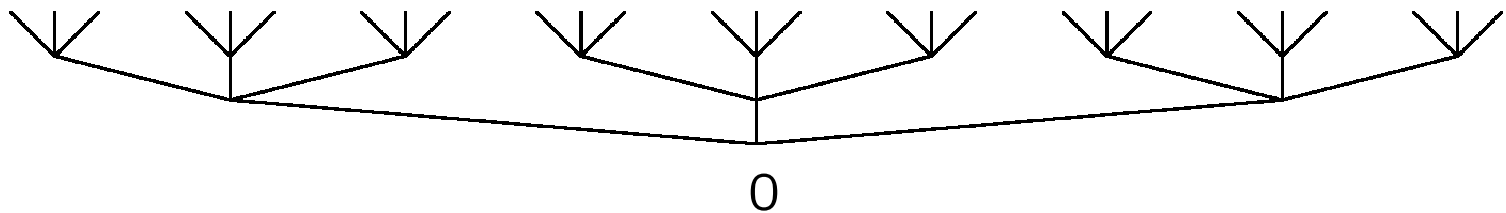
Hebben C^* en $C(p_c)$ wellicht ook dezelfde globale structuur?

VERMOEDEN:

Angel, Goodman, den Hollander en Slade 2007

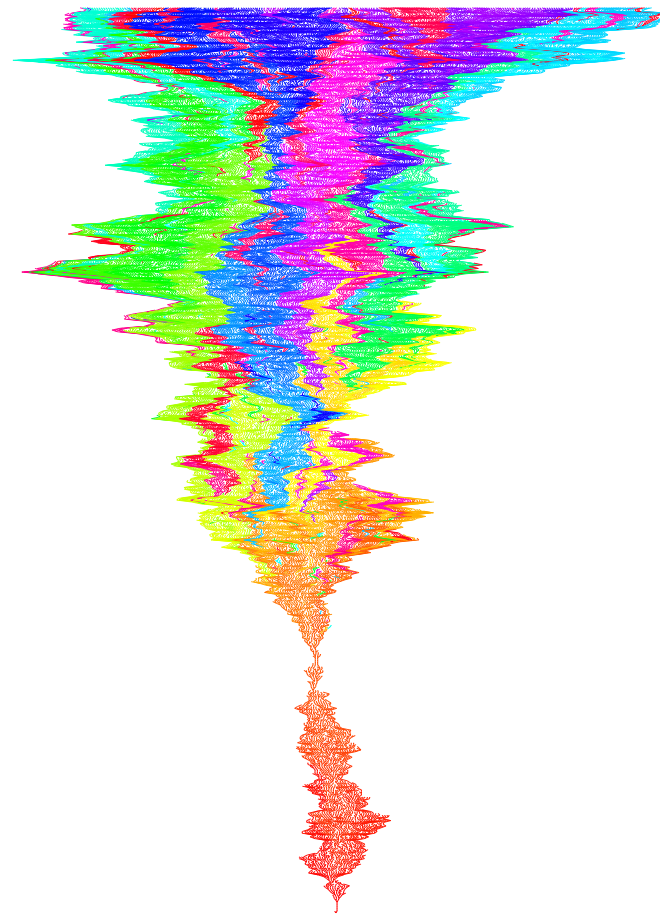
Nee, C^* en $C(p_c)$ hebben kansverdelingen op $\mathbb{Z}^2$ die onderling singulier zijn.

De vermoede discrepantie tussen C^* en $C(p_c)$ is bewezen op reguliere bomen:



De ternaire boom met wortel 0.

Simulatie van C^* op de binaire boom:



Zelfs op reguliere bomen blijkt C^* een veel ingewikkelder structuur te hebben dan $C(p_c)$.

Bijvoorbeeld, het aantal punten in C^* met hoogte $\leq n$ groeit als

$$\Gamma n^2 \text{ voor } n \rightarrow \infty,$$

met Γ een stochastische variabele die door een zeer lastige integraalformule wordt gegeven.

UITDAGING:

Bewijs de discrepantie tussen C^* en $C(p_c)$ voor $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 2$.

HOOP:

Voor d groot genoeg kan het bewijs worden geleverd m.b.v. combinatorische benaderingsmethoden.

Voor $d = 2$ blijkt C^* niet te passen in de recent ontwikkelde theorie van Schramm-Löwner Evolutie.

Wendelin Werner, 2006 Fields Medaille

CONCLUSIE:

Dynamisch gegroeide random netwerken zijn raadselachtig en leven blijkbaar in een heel eigen wereld.