

Wiskundige CSI

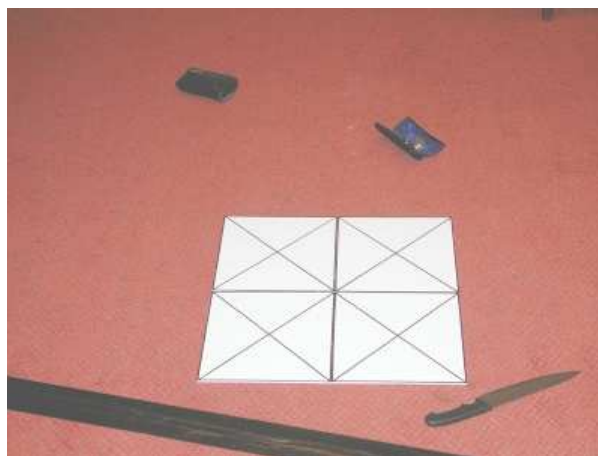
[André Heck]

Meten op een foto

In elke aflevering van de tv-serie *Numb3rs* helpt wiskundige Charlie Eppes zijn broer, FBI-agent Don, met speels gemak om een misdaad op te lossen. In programma's als *CSI* en *Law & Order* zijn resultaten van DNA testen, toxicologisch onderzoek en van zoektochten in databanken in een mum van tijd beschikbaar. In deze misdaadprogramma's kunnen de meest wazige foto's en videobeelden en de slechtste geluidsopnames gemaakt op een plaats delict zodanig opgepoetst worden dat allerlei details snel beschikbaar komen.

De werkelijkheid is weerbarstiger en minder melodramatisch. Bij echt forensisch onderzoek gaat het om zorgvuldige en objectieve verzameling, documentatie en veiligstelling van sporen op een plaats delict of op een plek waar een ongeval plaatsgevonden heeft. Forensische fotografie is een van de technieken die hierbij gebruikt wordt. Vaste onderdelen zijn het maken van overzichtsfoto's vanuit diverse gezichtspunten, het maken van mid-range foto's waarin de aandacht uitgaat naar onderlinge positie van objecten die in het criminele onderzoek of de juridische afhandeling een rol kunnen spelen en het maken van close-up foto's voor interessante details. In dit artikel ga ik in op de tweede soort van forensische foto's.

In figuur 1 is een foto te zien die gemaakt is tijdens de werkgroep *Wiskunde ontwikkelen met foto's* op de Nationale Wiskunde Dagen 2008^[1]. Het is een foto van de plaats delict van een ter plekke in scène gezet misdrijf. Toegegeven, de kwaliteit van de foto voor forensisch gebruik is voor verbetering vatbaar, maar het doel in de werkgroep was om te laten zien dat je in vijf minuten tijd zo'n foto kunt maken, importeren op de computer en desgewenst kunt bewerken voor verder gebruik in een dynamisch meetkunde pakket zoals GeoGebra^[2] of een computerwerkomgeving zoals Coach^[3]. Het mes, de brillendoos en de portemonnee zijn de door deelnemers meegebrachte objecten die in de fictieve misdaad een rol gespeeld hebben. Maar de fotograaf heeft nog een vierde object ter plekke neergelegd: een zogenaamd perspectiefvierkant, bestaande uit vier tegels van gelijke soort en met identieke afmetingen die zodanig aan elkaar geschoven zijn dat ze samen een vierkant vormen. Het perspectiefvierkant is het enige object op de foto waarvan de werkelijke afmeting bekend is en zal gebruikt worden om de onderlinge positie van de andere objecten te bepalen. Zo'n hulpmiddel is nodig omdat je de plaats delict op de foto in perspectief ziet en hierdoor geen zodanig eenvoudige afstandsrelatie tussen objecten hebt dat je deze simpelweg met een liniaal kunt opmeten.



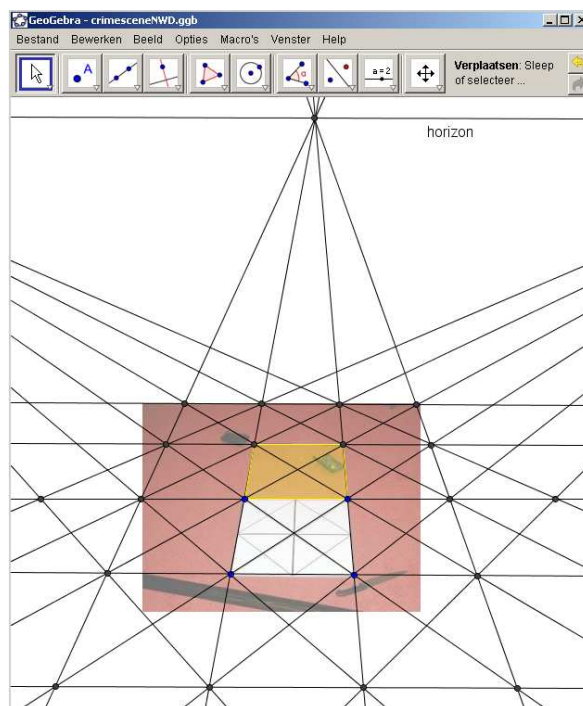
Figuur 1. Foto van de plaats delict.

Gebruik van het perspectiefvierkant in een meetkundige aanpak

Er zijn twee redenen om een perspectiefvierkant in de forensische foto te gebruiken:

1. het is een object op de foto waarvan de werkelijke afmeting in ieder geval nauwkeurig en buiten alle twijfel bekend is;
2. de vorm van dit object is zodanig gekozen dat – zoals de naam suggereert – voor afstandsmetingen met de perspectivische vervorming op de foto rekening gehouden kan worden.

De tweede reden is de belangrijkste en voor de keuze van het perspectiefvierkant heb ik me laten leiden door de gedetailleerde beschrijving in het recente boek *Crime Scene Photography* van Edward Robinson.^[4] In deze sectie leg ik kort uit hoe het vierkant gebruikt kan worden om de locaties van de objecten op de foto met elke gewenste precisie te bepalen. Enerzijds gebeurt dit door een proces van uitbreiding van het perspectiefvierkant tot een groter tegelpatroon over de vloer en anderzijds door een proces van verfijning van dit rooster. Figuur 2 toont de uitbreidingsoperatie uitgevoerd met het dynamische wiskundepakket GeoGebra. Het vierkant waarbinnen de brillendoos zich bevindt is gearceerd.



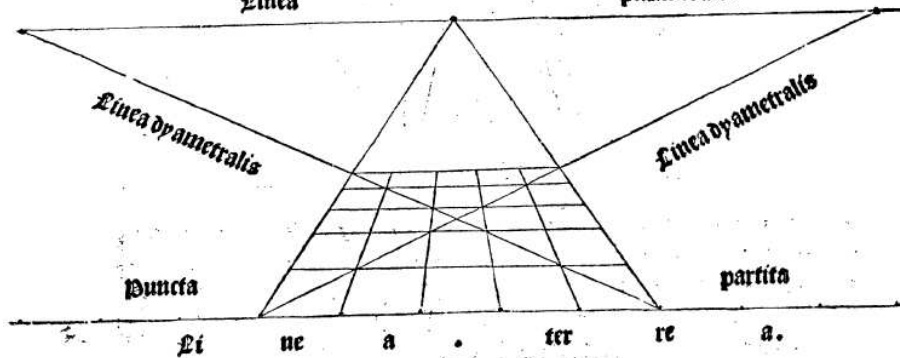
Figuur 2. Uitbreiding van het perspectiefvierkant tot een groter tegelpatroon.

De uitbreiding van het gegeven perspectiefvierkant tot een betegeling van een groter vloeroppervlak vindt zijn oorsprong in de constructies van tegelvloeren in eenpunts of centraal perspectief die in de Renaissance in de schilderkunst ontwikkeld zijn. Een van de meest bekende methoden is afkomstig van Leon Battista Alberti (1407-1472), die hij "modo ottimo" ("beste manier") noemde in zijn verhandeling getiteld *Il Trattato della Pittura e I Cinque Ordini Archittonici* ("over schilderen") en die beter bekend is onder de Italiaanse naamgeving van "costruzione legittima" ("legitieme constructie"). Maar in feite is de methode waarop het perspectiefvierkant in de forensische praktijk gebruikt wordt meer verwant met de zogenaamde *distantiepunt constructie*. Deze methode is voor het eerst beschreven door Jean Pélerin (alias Viator, 1445-1524) in zijn boek *De Artificiali Perspectiva* uit 1505. Figuur 3 toont een fragment uit de derde editie van dit boek dat gaat over de genoemde methode, waarvan aangetoond kan worden dat deze dezelfde resultaten oplevert als Alberti's methode. Figuur 4 toont de vier stappen in de distantiepunt constructie voor een tegelvloer met zestien vierkanten. Deze constructie is met een dynamisch meetkunde pakket eenvoudig na te doen.

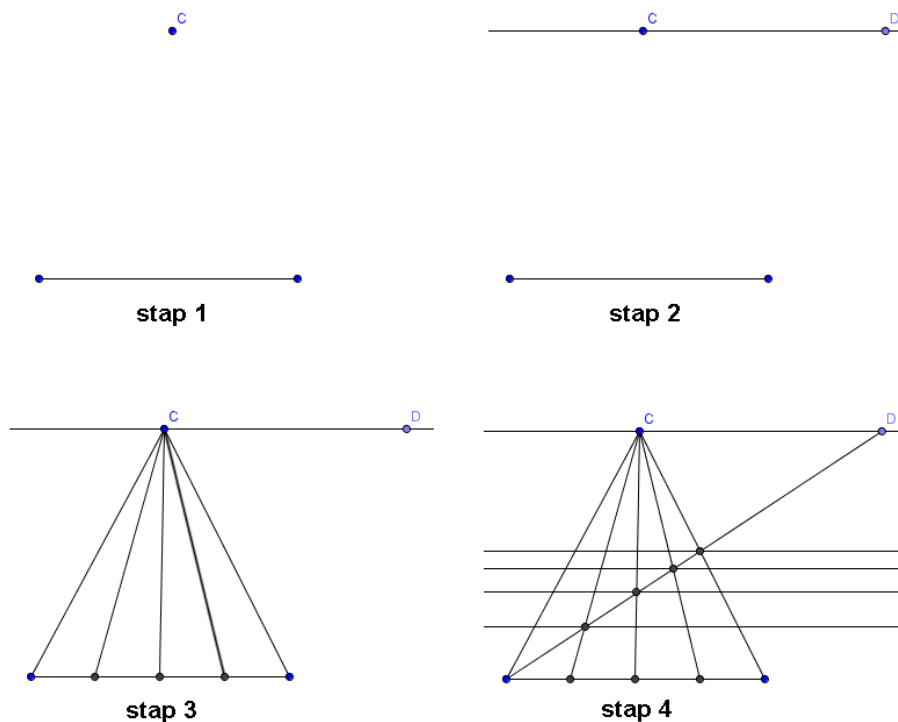
La. ix.

Diminutio quoq; pauimēti accipit super huiusmodi tetragonū/
pūctis partitū a lineis radialib⁹ distinctū a sectionib⁹ diame-
troꝝ pyramidarū inclinatarū sicut p̄missū est vt p̄stat figura sequēti.

Et la diminution du pavement/se pient sur les quadrangle/parti de points
et distinct de lignes radiales/aux sections des diametres des pyramides
inclinees (comme il est devant l'oeil) et appert par la figure sequente.
Linea
pyramidalis



Figuur 3. Fragment uit Pélerin's boek over de distantiepunt constructie.



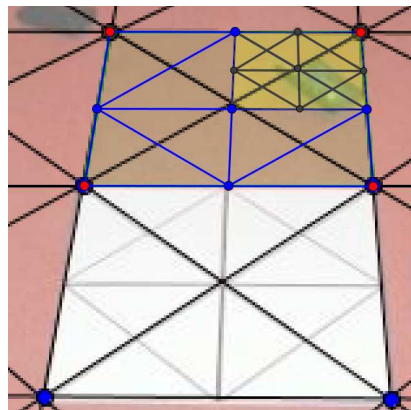
Figuur 4. Stappen in distantiepunt constructie van Pélerin.

De stappen uit de distantiepunt constructie zijn:

1. Teken de basislijn voor de tegelvloer en kies de positie van het centrale punt C.
2. Teken de horizon door C en kies een punt D zodat de afstand CD gelijk is aan de (gewenste) afstand van het oog tot de afbeelding.
3. Verdeel een stukje van de basislijn in een gewenst aantal gelijke delen en verbind de verdelingspunten met C.
4. Teken een rechte lijn van D naar het tegenoverliggende einde van het basislijnstuk en teken door de snijpunten van deze lijn door D met de lijnen door C een lijn parallel aan de basislijn.

De verfijning van het tegelpatroon tot een rooster waarin met meer precisie de locatie van een object is vastgelegd is een proces waarin in de eerste stap elk gewenst kopie van het perspectiefvierkant in het uitgebreide tegelpatroon op zijn beurt verdeeld wordt in vier gelijkvormige perspectiefvierkanten met halve afmeting. Dit proces kun je vervolgens zo vaak herhalen als je nodig acht. In het gegeven voorbeeld is de afmeting van het oorspronkelijke perspectiefvierkant gelijk gekozen aan $\frac{1}{2}$ m. Na de eerste verfijning ontstaat een vierkant van afmeting $(\frac{1}{2})^2$ m. Na de tweede stap in het verfijningproces is de afmeting $(\frac{1}{2})^3$ m. Na n stappen is de nauwkeurigheid waarmee een positie bepaald kan worden dus gelijk aan $(\frac{1}{2})^n$ meter. Je kunt zo nauwkeurig werken als je nodig acht. Figuur 5 illustreert de eerste stap in het verfijningproces voor het vierkant waarin de brillendoos ligt. De procedure is als volgt:

1. Kies een vierkant in het uitgebreide rooster, markeer de vier hoekpunten en verbind ze onderling met lijnstukken.
2. Construeer de middens van de lijnstukken die de gemarkeerde hoekpunten verbinden.
3. Verbind de in de vorige stap gevonden punten met lijnstukken: je hebt nu een kopie van het oorspronkelijke perspectiefvierkant geconstrueerd.
4. Kies in de kopie van het oorspronkelijke perspectiefvierkant een kwadrant, zeg rechtsboven, en herhaal de eerste drie stappen voor dit vierkant. Je hebt nu een perspectiefvierkant geconstrueerd dat tweemaal zo klein is als het perspectiefvierkant waar je mee begon.



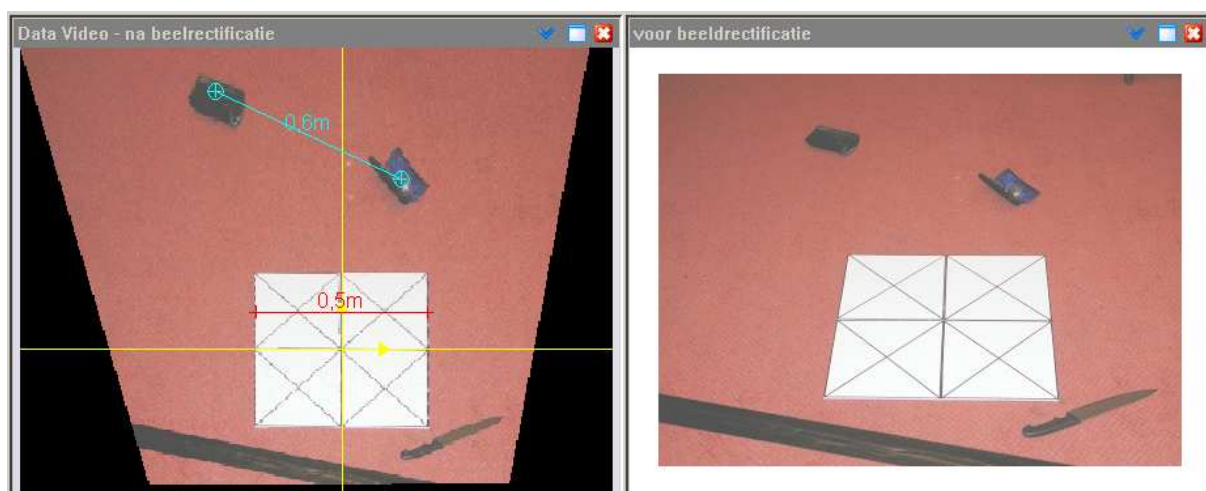
Figuur 5. Verfijning van het rooster.

Het is eigenlijk wel aardig dat de moderne toepassing van wiskunde in forensisch onderzoek teruggrijpt op de wiskunde van het perspectief zoals die in de Renaissance voor schilderkunst ontwikkeld is. Leerlingen zouden met precies dezelfde middelen, d.w.z. projectieve meetkunde en computergebruik, perspectief in kunst kunnen bestuderen; het Zebraboekje *Perspectief, hoe moet je dat zien?*^[6] is hierbij uitermate nuttig. Een meer veelzijdige toepassing van dezelfde wiskunde is haast niet denkbaar. Vanzelfsprekend wordt tegenwoordig de constructiemethode niet meer met de hand door een forensisch onderzoeker gedaan, maar is deze ingebouwd en geautomatiseerd in computerprogramma's zodat direct op digitale foto's gemeten kan worden en posities van objecten te bepalen zijn. Projectieve meetkunde is bij de computerimplementatie van deze methoden de broodnodige fundering.

Gebruik van het perspectiefvierkant voor beeldrectificatie

Het grootste probleem met het meten van posities en afstanden op de foto van de plaats delict is zeggend de perspectivische vervorming. Een alternatief voor de eerder beschreven meetkundige aanpak van het probleem is om voorafgaand aan het opmeten van foto's en video-clips het digitale beeldmateriaal dusdanig te bewerken dat de perspectivische vertekening van objecten verdwijnt. Het is mogelijk om een projectieve transformatie toe te passen op de foto die de perspectivische vertekening van het perspectiefvierkant ongedaan maakt en een foto

oplevert vanuit frontaal-parallel gezichtspunt. Het resultaat, dat verkregen is met de computerwerkomgeving Coach, is in Figuur 6 te zien. Dit herstel van rechte hoeken en parallelle lijnen in het grondvlak is een voorbeeld van beeldrectificatie. Hierna kunnen posities en afstand direct gemeten worden op de bewerkte foto t.o.v. een zelfgekozen assenstelsel. Het gebruikersinterface is door iedere leerling en leraar te hanteren: op de oorspronkelijke foto leg je een vierhoek zodanig neer dat de hoekpunten overeenstemmen met de hoekpunten van een object dat in werkelijkheid een rechthoek is. De software rekent de projectieve afbeelding die de geselecteerde vierhoek in een rechthoek transformeert uit en past deze afbeelding op de digitale foto toe. In dit geval wordt het perspectiefvierkant als rechthoek aangewezen. Hierna is het slechts een kwestie van vergroten of verkleinen in beide richtingen (en eventueel verschuiven van het zichtbare gedeelte van de foto) om uiteindelijk tot een foto met het vierkant en de objecten in beeld te komen. Voor details en toepassingen van beeldrectificatie met Coach verwijs ik naar een eerder artikel verschenen in de *Nieuwe Wiskrant*^[7].



Figuur 6. Beeldrectificatie in Coach 6.

Materialen

Op de website van de NWD 2008^[1] zijn lesmaterialen, te weten GeoGebra en Coach activiteiten, alsmede een online artikel over meten op foto's^[8] beschikbaar gesteld.

Referenties

- [1] www.fi.uu.nl/nwd
- [2] www.geogebra.org
- [3] www.cma.science.uva.nl
- [4] Robinson, E. M. (2007). *Crime Scene Photography*. Academic Press/Elsevier.
- [5] Pélerin, J. (1505). *De Artificiali Perspectiva*. 3^{de} editie uit 1521. Online beschikbaar op: <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1050945/f1.item>
- [6] Verweij, A. & Kindt, M. (1999). *Perspectief, hoe moet je dat zien?* Zebra-reeks deel 2, Epsilon Uitgaven, Utrecht.
- [7] Heck, A. (2004). Een gewichtig model. *Nieuwe Wiskrant*, **23** (4) 46 - 52.
- [8] Heck, A. (2008). Mathematical Brooding over an Egg. Aangeboden aan *The Journal of Online Mathematics and its Applications*.

Over de auteur

André Heck is projectmanager aan het AMSTEL Instituut van de Universiteit van Amsterdam op het gebied van ICT-toepassingen in onderwijs bij wiskunde en natuurwetenschappen.