

GeoGebra Quickstart

Snelgids voor *GeoGebra*

Vertaald door Beatrijs Versichel en Ivan De Winne

Dynamische meetkunde, algebra en analyse vormen de basis van *GeoGebra*, een educatief pakket, dat meetkunde en algebra als evenwaardige partners combineert. *GeoGebra* heeft reeds verscheidene prijzen in de wacht gesleept.

Een eenvoudig gebruik van *GeoGebra* bestaat in het construeren van punten, vectoren, lijnstukken, rechten en kegelsneden alsook functies. Deze objecten kunnen daarna op een dynamische wijze met de muis gewijzigd worden. Anderzijds kunnen algebraïsche uitdrukkingen worden ingevoerd zoals: $g: 3x + 4y = 7$ of: $c: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$. Er zijn ook heel wat commando's ter beschikking, onder meer voor het afleiden en integreren van functies. Het meest merkwaardige kenmerk van *GeoGebra* is de duale voorstelling van de objecten: elke uitdrukking in het algebrafenster correspondeert met een object in het tekenvenster en omgekeerd.

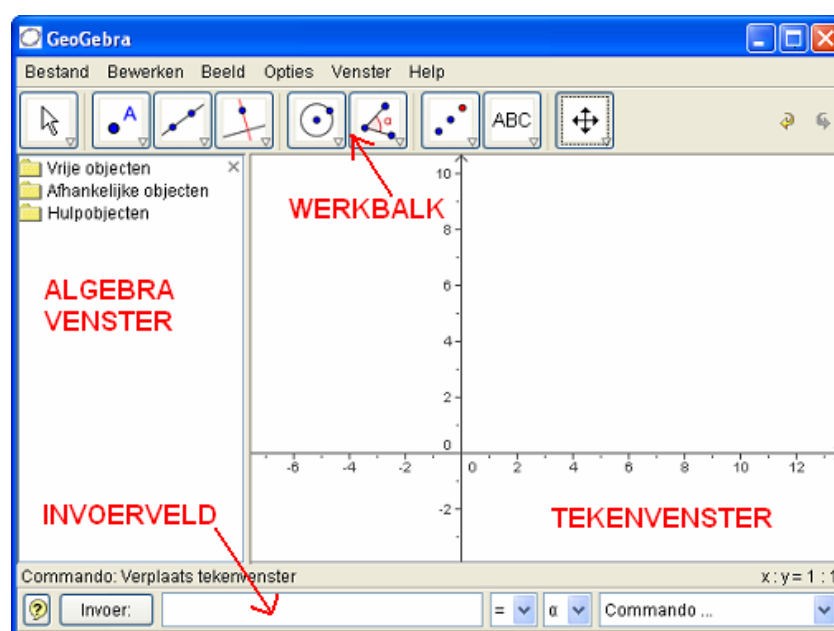
Door de hierna volgende drie voorbeelden te bestuderen kan je vertrouwd raken met *GeoGebra*. Werk ze de één na de ander eens uit en vergeet ook niet rekening te houden met de bijgeleverde tips.

Voorbeeld 1: Omgeschreven cirkel aan een driehoek

Voorbeeld 2: Raaklijnen aan een cirkel

Voorbeeld 3: Afgeleide functie en raaklijn aan de grafiek van de functie

Nadat *GeoGebra* werd opgestart zie je het hierna afgebeelde venster:

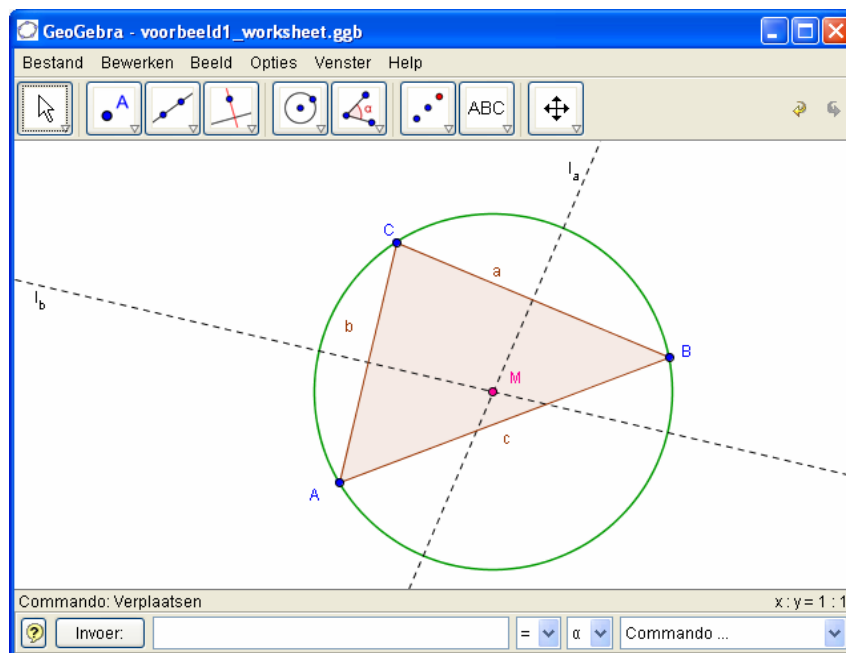


In de werkbalk vind je een aantal tekenopdrachten waarmee je constructies kunt uitvoeren in het tekenvenster. Terzelfder tijd worden de overeenkomstige coördinaten en vergelijkingen getoond in het algebravenster. Het invoerveld kan gebruikt worden om rechtstreeks coördinaten, vergelijkingen, commando's en functies in te voeren; onmiddellijk na het indrukken ENTER worden alle overeenkomstige objecten in het tekenvenster getoond.






Meetkunde en algebra gaan hand in hand samen!

Voorbeeld 1: Omgeschreven cirkel aan een driehoek


Opdracht: Teken een driehoek ABC en construeer de omgeschreven cirkel.



Constructie met de muis

-  Selecteer de opdracht *Veelhoek* in de werkbalk (klik op het kleine pijltje op het derde icoon van links). Klik drie keer in het tekenvenster om de hoekpunten A, B, en C te plaatsen. Sluit de driehoek door terug op A te klikken.
-  Kies vervolgens de opdracht *Middelloodlijn* en construeer twee middelloodlijnen door op twee zijden van de driehoek te klikken.
-  Maak nu gebruik van de opdracht *Snijpunt(en) van 2 objecten* en klik achtereenvolgens op de twee middelloodlijnen om het middelpunt te bepalen van de omgeschreven cirkel van de driehoek.
- Noem dit punt “M” door met de rechter muisknop te klikken op het punt en daarna in het snelmenu te kiezen voor *Naam wijzigen*.
-  Kies om te eindigen de opdracht *Cirkel met middelpunt door punt* en klik eerst op het middelpunt van de cirkel en vervolgens op een hoekpunt van de driehoek.
-  Kies de opdracht *Verplaatsen* en maak gebruik van de muis voor het wijzigen van de positie van één van de hoekpunten - je zal ervaren wat men bedoelt met de term “dynamische meetkunde”.

Enkele tips

- De opdracht *Ongedaan maken* in het “Bewerken”-menu is een zeer nuttig hulpmiddel om een stap terug te keren in de constructie.
- Je kunt objecten onzichtbaar en dan weer zichtbaar maken door op het object te klikken met de rechtermuisknop. Verwijder of plaats een vinkje in het snelmenu bij *Toon object*. Het object zal verdwijnen uit het tekenvenster of er opnieuw in verschijnen.
- De attributen van de objecten (kleur, lijntype, ...) kunnen op een eenvoudige manier gewijzigd worden: gebruik daartoe opnieuw de rechtermuisknop om op het object te klikken en kies *Eigenschappen* in het snelmenu.
- Via het menu “Beeld” kan men het algebravenster, de assen en het rooster verbergen of tonen.
- Om de positie van het tekenvenster te wijzigen, kies je de opdracht *Verplaats tekenvenster*  en maak je eenvoudigweg gebruik van de muis om het te verplaatsen.
- De opdracht *Overzicht constructiestappen* in het menu “Beeld” geeft een lijst met alle constructiestappen die je genomen hebt bij het uitvoeren van de constructie. Dit geeft je de mogelijkheid de constructie stap voor stap te herhalen met de pijltjestoetsen, en laat je ook toe de volgorde van de verschillende constructiestappen te wijzigen (In het “Help”-menu vind je hierover verdere uitleg). Bovendien kan je gebruik maken van het menu “Beeld” om ongewenste kolommen te laten verdwijnen of gewenste kolommen opnieuw te laten verschijnen.
- Verdere informatie over constructies met behulp van de muis is te vinden in het “Help”-menu, in het gedeelte over de “Meetkundige Invoer”.

Constructie door gebruik te maken van het invoerveld

We gaan nu de hoger vermelde constructie opnieuw uitvoeren, echter door gebruik te maken van het invoerveld. Start daartoe een nieuwe tekening met de opdracht *Bestand – Nieuw*. Tik daarna in het invoerveld de volgende commando's in, het invoerveld bevindt zich onderaan op het scherm, sluit elke lijn af met ENTER.

```
A = (2, 1)
B = (12, 5)
C = (8, 11)
Veelhoek[A, B, C]
l_a = Middelloodlijn[a]
l_b = Middelloodlijn[b]
M = Snijpunten[l_a, l_b]
Cirkel[M, A]
```

Enkele tips

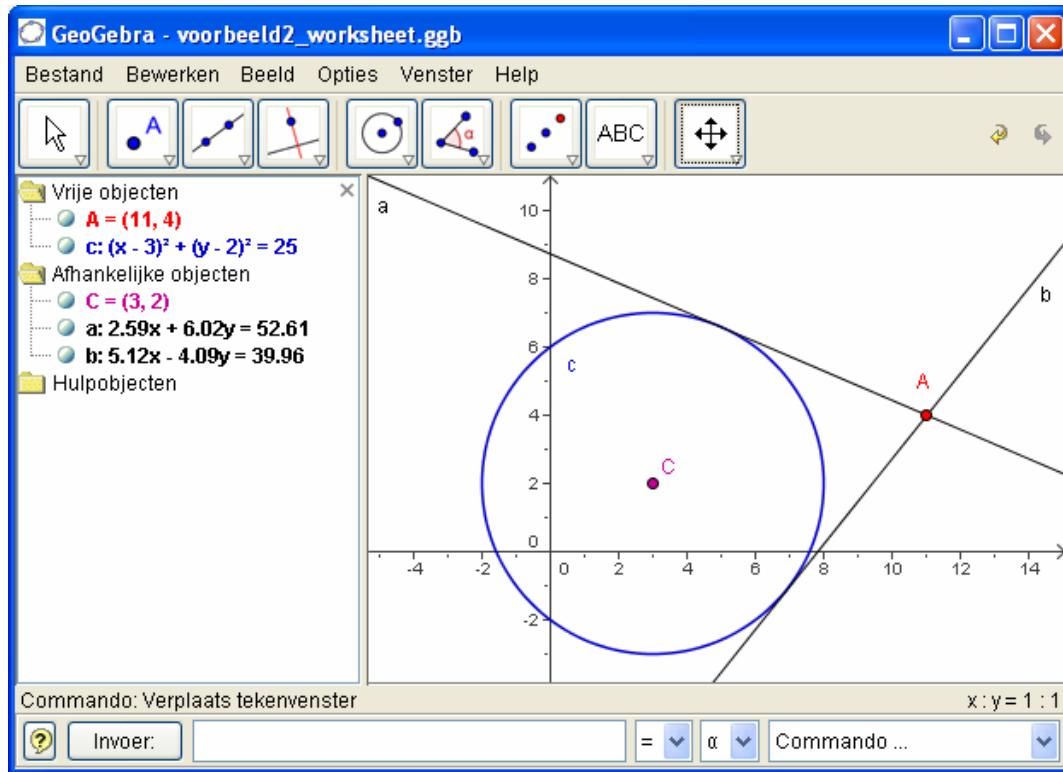
- Automatische vervollediging van de commando's: nadat de eerste twee letters van een commando werden ingetikt, wordt het commando automatisch vervolledigd en getoond. Indien je akkoord gaat met de getoonde suggestie, druk dan ENTER. Indien je niet akkoord gaat met de voorgestelde opdracht, tik dan gewoon de volgende letters van de opdracht verder in.
- Het is niet nodig elk commando in te tikken. Je kunt het ook selecteren uit de lijst met de commando's, deze lijst bevindt zich rechts van het invoerveld.
- Door te klikken op het "invoer"- icoon (rechts onder) wordt het invoerveld geactiveerd. In deze modus kan je op een object in het algebravenster of in het tekenvenster klikken, de naam van het object wordt dan automatisch in het invoerveld geplaatst.
- Meer praktische tips in verband met het invoerveld vind je door op het vraagteken dat zich in de hoek links onder bevindt te klikken.

Je kunt bijzonder goede resultaten bekomen met *GeoGebra* indien je de voordelen van beide manieren van invoeren, namelijk met de muis of via het invoerveld, weet te combineren.

Voorbeeld 2: Raaklijnen aan een cirkel

Opdracht:

Maak gebruik van GeoGebra om de cirkel met vergelijking $c: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$ te tekenen alsook de raaklijnen aan deze cirkel door het punt $A = (11, 4)$.



Constructie door zowel gebruik te maken van het invoerveld als van de muis.

Tik de vergelijking van de cirkel nl. $c: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$ in, in het invoerveld en druk ENTER (*tip: het teken ² kan worden geselecteerd in de lijst die zich rechts van het invoerveld bevindt*).

Voer het commando $C = \text{Middelpunt}[c]$ in, in het invoerveld.

Construeer het punt A door $A = (11, 4)$ in te tikken in het invoerveld.



Kies nu voor de opdracht *Raaklijnen* en klik zowel op het punt A als op de cirkel c.



Na de opdracht *Verplaatsen* te hebben gekozen, kan je met de muis het punt A verplaatsen en de beweging van de raaklijnen observeren.

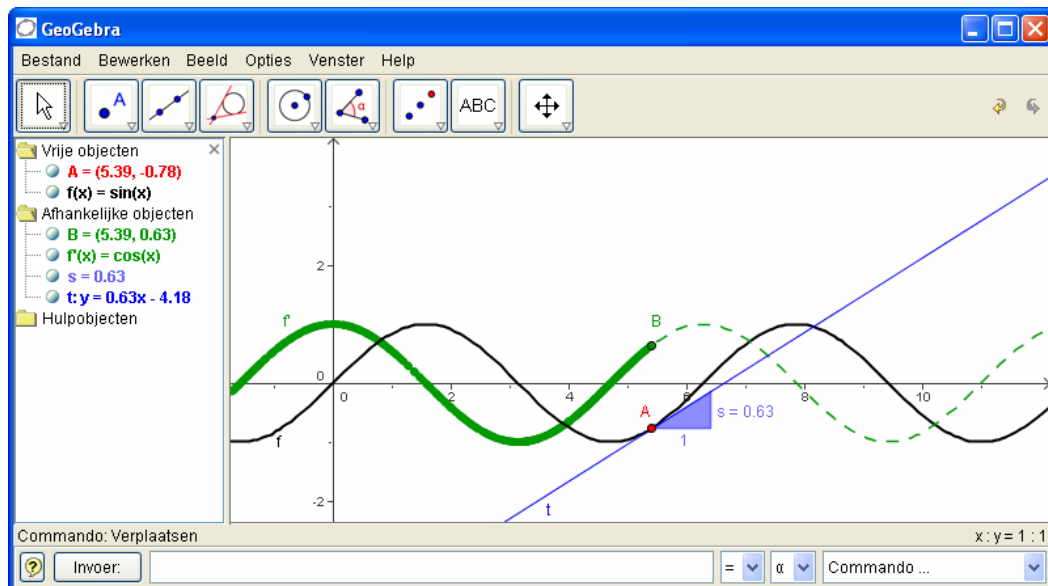
Probeer ook eens de cirkel te verplaatsen en observeer de vergelijking van de cirkel in het algebrafenster.

Enkele tips






- Inzoomen of uitzoomen: klik op een lege plaats in het tekenvenster met de rechtermuisknop en kies de gewenste „Zoom“-factor of houdt de rechtermuisknop ingedrukt terwijl je met de muis beweegt om een „Zoom Venster“ te maken.
- Het is mogelijk om de vergelijking van de cirkel rechtstreeks in het algebravenster te wijzigen door erop te klikken.
- Verdere informatie over de mogelijkheden van het invoerveld is te vinden in het „Help“-menu, in het gedeelte over de algebraïsche invoer.

Voorbeeld 3: Afgeleide van een functie en raaklijn in de grafiek van de functie

Opdracht: Maak gebruik van GeoGebra om de grafiek van de functie $f(x) = \sin(x)$ te tekenen, de afgeleide functie te bepalen alsook de raaklijn aan de grafiek van f in een willekeurig punt te tekenen met de bijbehorende driehoek die de richting van de raaklijn aangeeft.



Versie 1: met behulp van een willekeurig punt op de grafiek van de functie.

-  Voer in het invoerveld het functievoorschrift $f(x) = \sin(x)$ in en druk ENTER.
-  Kies de opdracht *Nieuw punt* en klik op de functie f . Op die manier creëer je een punt A gelegen op de grafiek van f .
-  Kies daarna de opdracht *Raaklijnen* en klik op het punt A en op de functie f .
Wijzig de naam van de raaklijn in t (rechtermuisknop, *Naam wijzigen*).
Tik de opdracht $s = \text{Helling}[t]$ in.
-  Nadat je de opdracht *Verplaatsen* hebt gekozen, verplaats je het punt A met de muis en observeer je op die manier de beweging van de raaklijn.
Tik $B = (x(A), s)$ en stel een *spoor* in voor dit punt (klik op B met de rechtermuisknop).
-  Kies de opdracht *Verplaatsen* en verplaats het punt A met de muis – het punt B zal een spoor achterlaten.
Tik de opdracht *Afgeleide $[f]$* in.

Enkele tips

- Voer nu in het invoerveld een ander functievoorschrift in, bijvoorbeeld $f(x) = x^3 - 2x^2$, de afgeleide functie alsook de raaklijn in een willekeurig punt in de grafiek worden onmiddellijk aangepast aan het nieuwe functievoorschrift.
- Kies de opdracht *Verplaatsen* en verplaats de grafiek van de functie met de muis. Observeer de wijzigingen in de vergelijkingen van de functie en van haar afgeleide.

Versie 2: Met behulp van een punt met a als x-coördinaat

We doen de vorige constructie over op een andere manier. Kies *Bestand – Nieuw* om met een nieuwe tekening te beginnen. Tik daarna in het invoerveld achtereenvolgens elk van de volgende commando's in, druk ENTER op het einde van elke opdracht.

```
f(x) = sin(x)
a = 2
T = (a, f(a))
t = Raaklijn[a, f]
s = Helling[t]
B = (x(T), s)
Afgeleide[f]
```

Kies de opdracht *Verplaatsen* en klik op het getal a. Je kunt nu de waarde van dit getal wijzigen met behulp van de pijltjestoetsen. Terzelfder tijd zal je zien dat het punt T en de raaklijn in dat punt zich over de grafiek van de functie f bewegen.

Schuifbalken: je kunt de waarde van een variabele a ook wijzigen door gebruik te maken van een schuifbalk: klik met de rechtermuisknop op de variabele a in het algebravenster en kies *Toon object*.

Tip: schuifbalken in combinatie met de pijltjestoetsen zijn nuttige instrumenten om parameters te bestuderen, bijvoorbeeld de parameters p en q in de kwadratische functie $y = x^2 + p x + q$.

Raaklijn zonder gebruik te maken van een commando

In *GeoGebra* kan men werken met vectoren en met parametrische vergelijkingen van rechten. Bijgevolg is het mogelijk een raaklijn t te construeren zonder gebruik te maken van de opdracht *Raaklijn[]*. Om dit uit te proberen, verwijder je eerst de raaklijn uit de vorige constructie door er met de rechtermuisknop op te klikken en te kiezen voor *Verwijderen*. Tik daarna de volgende opdrachten in:

```
v = (1, f'(a))
t: X = T + r v
```

v is de richtingsvector van de raaklijn t. Natuurlijk kan je in plaats van r, elke andere letter als parameter gebruiken.

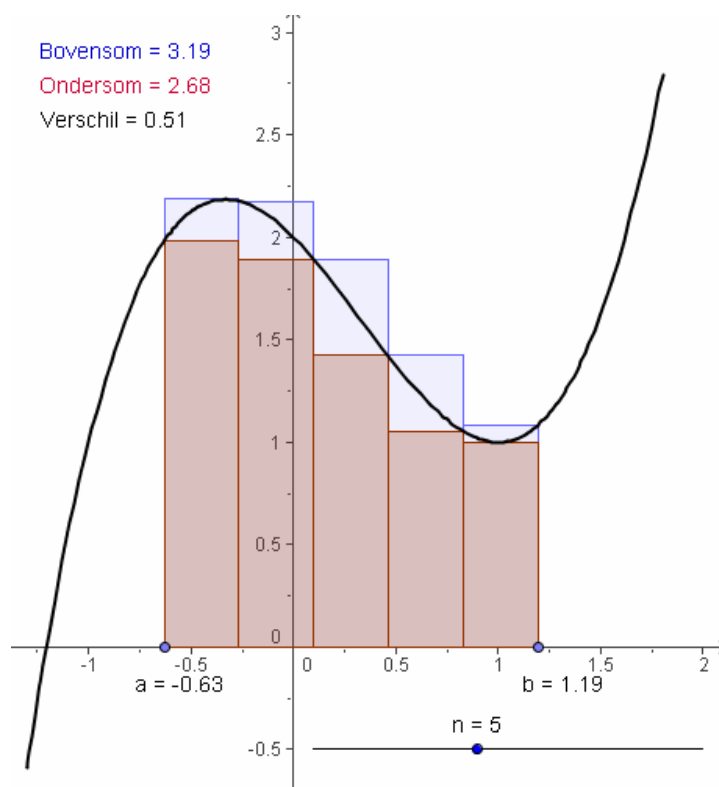
Enkele tips

- Er is een extra mogelijkheid om de raaklijn te construeren met behulp van de richtingsvector: $t = \text{Rechte}[T, v]$.
- Probeer ook de opdracht *Integraal[f]*.
- Verdere tips in verband met de opdrachten van GeoGebra zijn te vinden in het “Help”-menu, in het gedeelte “Algebraïsche invoer – Opdrachten”. Er is ook een *GeoGebra*’s helpbestand in de vorm van een pdf-file beschikbaar op de website www.geogebra.at.

Verdere informatie

Je wordt uitgenodigd *GeoGebra*'s webstek www.geogebra.at te bezoeken. Daar vind je alle verdere informatie alsook de laatste versie van deze software die vrij te gebruiken is.

Met *GeoGebra* kan je op een eenvoudige wijze dynamische werkbladen ontwikkelen die je met elke internet browser (bijv. Firefox, Netscape, of Internet Explorer) kan gebruiken. Voorbeelden en bijkomende informatie hieromtrent is ook te vinden op de *GeoGebra* webstek.



GeoGebra Thuispagina

www.geogebra.at

GeoGebra Gebruiker's Forum

www.geogebra.at/forum

GeoGebraWiki - pool met educatief materiaal

www.geogebra.at/en/wiki

Indien je suggesties hebt of feedback wenst te geven over *GeoGebra* of over deze tekst, dan kan je je steeds wenden tot Markus.Hohenwarter@sbg.ac.at.