

# Waar zijn de reële getallen?

*Frits Beukers*

NWD 2008

Noordwijkerhout, 2 februari 2008

Getallen

Alles is getal

Alles is getal (?)

# Elementaire getallen

Natuurlijke getallen:

$0, 1, 2, 3, \dots$



# Elementaire getallen

Natuurlijke getallen:

$0, 1, 2, 3, \dots$

Breuken:

$3/4, 5/37, 234/17, \dots$

# Elementaire getallen

Natuurlijke getallen:

$0, 1, 2, 3, \dots$

Breuken:

$3/4, 5/37, 234/17, \dots$

Negatieve getallen:

$-1, -5, -1/2, -37/5, \dots$

# Elementaire getallen

Natuurlijke getallen:

$0, 1, 2, 3, \dots$

Breuken:

$3/4, 5/37, 234/17, \dots$

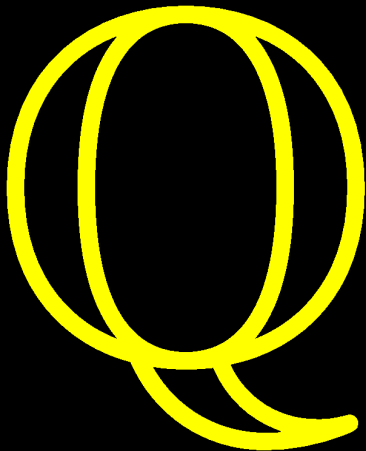
Negatieve getallen:

$-1, -5, -1/2, -37/5, \dots$

Rationale getallen:

Al het bovenstaande

Rationale getallen



Reële getallen

$\mathbb{R}$

# Axiomas van $\mathbb{R}$

## Optellen en vermenigvuldigen

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$a + 0 = 0 + a = a$$

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

$$a + b = b + a$$

$$a + (-a) = 0$$

$$a \times b = b \times a$$

$$a \times a^{-1} = 1 \text{ (mits } a \neq 0)$$

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

$$0 \neq 1$$

# Axiomas van $\mathbb{R}$

## Optellen en vermenigvuldigen

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$a + 0 = 0 + a = a$$

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

$$a + b = b + a$$

$$a + (-a) = 0$$

$$a \times b = b \times a$$

$$a \times a^{-1} = 1 \text{ (mits } a \neq 0)$$

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

$$0 \neq 1$$

## Ordering

$$a < b \text{ of } a = b \text{ of } a > b$$

$$a < b \text{ en } b < c \Rightarrow a < c$$

$$a < b \Rightarrow (a + c) < (b + c)$$

$$a > 0 \text{ en } b > 0 \Rightarrow a \times b > 0$$

# Axiomas van $\mathbb{R}$

## Optellen en vermenigvuldigen

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad a + 0 = 0 + a = a$$

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c) \qquad a \times 1 = 1 \times a = a$$

$$a + b = b + a \qquad a + (-a) = 0$$

$$a \times b = b \times a \qquad a \times a^{-1} = 1 \text{ (mits } a \neq 0)$$

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c \qquad 0 \neq 1$$

## Ordering

$$a < b \text{ of } a = b \text{ of } a > b \qquad a < b \text{ en } b < c \Rightarrow a < c$$

$$a < b \Rightarrow (a + c) < (b + c) \qquad a > 0 \text{ en } b > 0 \Rightarrow a \times b > 0$$

## Volledigheid

Elke begrensde en stijgende rij  
getallen heeft een limiet.



# Modellen van $\mathbb{R}$

Informeel:

- Verhoudingen van lijnstukken (Eudoxus, circa 375 v Chr), zie Euclides, Elementen, deel V

# Modellen van $\mathbb{R}$

Informeel:

- Verhoudingen van lijnstukken (Eudoxus, circa 375 v Chr), zie Euclides, Elementen, deel V
- Punten op de reële getallenrechte

# Modellen van $\mathbb{R}$

Informeel:

- Verhoudingen van lijnstukken (Eudoxus, circa 375 v Chr), zie Euclides, Elementen, deel V
- Punten op de reële getallenrechte
- Eindige en oneindige decimale ontwikkelingen  
(uitgezonderd de oneindige ontwikkelingen die vanaf zeker moment uit alleen negens bestaan, denk aan  $0.5699999999 \dots = 0.57$ ).

# Modellen van $\mathbb{R}$

Informeel:

- Verhoudingen van lijnstukken (Eudoxus, circa 375 v Chr), zie Euclides, Elementen, deel V
- Punten op de reële getallenrechte
- Eindige en oneindige decimale ontwikkelingen  
(uitgezonderd de oneindige ontwikkelingen die vanaf zeker moment uit alleen negens bestaan, denk aan  $0.5699999999 \dots = 0.57$ ).

Formeel:

- Dedekindsneden (R.Dedekind 1858,1872)

# Modellen van $\mathbb{R}$

## Informeel:

- Verhoudingen van lijnstukken (Eudoxus, circa 375 v Chr), zie Euclides, Elementen, deel V
- Punten op de reële getallenrechte
- Eindige en oneindige decimale ontwikkelingen  
(uitgezonderd de oneindige ontwikkelingen die vanaf zeker moment uit alleen negens bestaan, denk aan  $0.5699999999 \dots = 0.57$ ).

## Formeel:

- Dedekindsneden (R.Dedekind 1858,1872)
- Klassen van Cauchy rijen in  $\mathbb{Q}$  (Weierstrass, Heine, Cantor, e.a 1860-1870)

Stelling

$$\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$$

Eerste bewijs:

# Een irrationaal getal

Stelling (Pythagoras ?)

$\sqrt{2}$  is irrationaal



# Een irrationaal getal

Stelling (Pythagoras ?)

$\sqrt{2}$  is irrationaal (en dus  $\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$ )

# Een irrationaal getal

Stelling (Pythagoras ?)

$\sqrt{2}$  is irrationaal (en dus  $\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$ )

We laten zien dat  $\sqrt{2} - 1$  irrationaal is.

# Een irrationaal getal

Stelling (Pythagoras ?)

$\sqrt{2}$  is irrationaal (en dus  $\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$ )

We laten zien dat  $\sqrt{2} - 1$  irrationaal is. Merk op:

$$(A) \quad \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

# Een irrationaal getal

Stelling (Pythagoras ?)

$\sqrt{2}$  is irrationaal (en dus  $\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$ )

We laten zien dat  $\sqrt{2} - 1$  irrationaal is. Merk op:

$$(A) \quad \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 = \sqrt{2} - 1 + 2$$

# Een irrationaal getal

Stelling (Pythagoras ?)

$\sqrt{2}$  is irrationaal (en dus  $\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$ )

We laten zien dat  $\sqrt{2} - 1$  irrationaal is. Merk op:

$$(A) \quad \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 = \sqrt{2} - 1 + 2$$

Stel  $\sqrt{2} - 1$  rationaal,

# Een irrationaal getal

Stelling (Pythagoras ?)

$\sqrt{2}$  is irrationaal (en dus  $\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$ )

We laten zien dat  $\sqrt{2} - 1$  irrationaal is. Merk op:

$$(A) \quad \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 = \sqrt{2} - 1 + 2$$

Stel  $\sqrt{2} - 1$  rationaal,

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{p}{q}$$

# Een irrationaal getal

Stelling (Pythagoras ?)

$\sqrt{2}$  is irrationaal (en dus  $\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$ )

We laten zien dat  $\sqrt{2} - 1$  irrationaal is. Merk op:

$$(A) \quad \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 = \sqrt{2} - 1 + 2$$

Stel  $\sqrt{2} - 1$  rationaal,

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{p}{q}$$

Invullen in (A):

$$\frac{q}{p} = \frac{p}{q} + 2$$

# Een irrationaal getal

Stelling (Pythagoras ?)

$\sqrt{2}$  is irrationaal (en dus  $\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$ )

We laten zien dat  $\sqrt{2} - 1$  irrationaal is. Merk op:

$$(A) \quad \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 = \sqrt{2} - 1 + 2$$

Stel  $\sqrt{2} - 1$  rationaal,

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{p}{q}$$

Invullen in (A):

$$\frac{q}{p} = \frac{p}{q} + 2$$

Links: breuk met noemer  $p$

Rechts: breuk met noemer  $q$



# Een irrationaal getal

Stelling (Pythagoras ?)

$\sqrt{2}$  is irrationaal (en dus  $\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$ )

We laten zien dat  $\sqrt{2} - 1$  irrationaal is. Merk op:

$$(A) \quad \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 = \sqrt{2} - 1 + 2$$

Stel  $\sqrt{2} - 1$  rationaal,

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{p}{q}$$

Invullen in (A):

$$\frac{q}{p} = \frac{p}{q} + 2$$

Links: breuk met noemer  $p$

Rechts: breuk met noemer  $q$

Dus  $p = q$  en  $\sqrt{2} - 1 = p/q = 1$ .

# Een irrationaal getal

## Stelling (Pythagoras ?)

$\sqrt{2}$  is irrationaal (en dus  $\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$ )

We laten zien dat  $\sqrt{2} - 1$  irrationaal is. Merk op:

$$(A) \quad \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 = \sqrt{2} - 1 + 2$$

Stel  $\sqrt{2} - 1$  rationaal,

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{p}{q}$$

Invullen in (A):

$$\frac{q}{p} = \frac{p}{q} + 2$$

Links: breuk met noemer  $p$

Rechts: breuk met noemer  $q$

Dus  $p = q$  en  $\sqrt{2} - 1 = p/q = 1$ .



Stelling (Euler, 1738)

Het getal  $e$  is irrationaal

## $e$ en $\pi$

Stelling (Euler, 1738)

Het getal  $e$  is irrationaal

Stelling (Lambert, 1768)

Het getal  $\pi$  is irrationaal

## $e$ en $\pi$

Stelling (Euler, 1738)

Het getal  $e$  is irrationaal

Stelling (Lambert, 1768)

Het getal  $\pi$  is irrationaal

Bewijzen minder eenvoudig dan dat voor  $\sqrt{2}$ .

## $e$ en $\pi$

Stelling (Euler, 1738)

Het getal  $e$  is irrationaal

Stelling (Lambert, 1768)

Het getal  $\pi$  is irrationaal

Bewijzen minder eenvoudig dan dat voor  $\sqrt{2}$ .

Vermoeden

De getallen  $e + \pi$  en  $e\pi$  zijn irrationaal

## $e$ en $\pi$

Stelling (Euler, 1738)

Het getal  $e$  is irrationaal

Stelling (Lambert, 1768)

Het getal  $\pi$  is irrationaal

Bewijzen minder eenvoudig dan dat voor  $\sqrt{2}$ .

Vermoeden

De getallen  $e + \pi$  en  $e\pi$  zijn irrationaal

Stelling (Gel'fond, 1929)

Het getal  $e^\pi$  is irrationaal

$$\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$$

Tweede bewijs:



# Decimale ontwikkeling

Voorbeeld,

0,871328464231920093...

# Decimale ontwikkeling

Voorbeeld,

0,871328464231920093...

betekent: de kleinste bovengrens (tevens limiet) van

0,8

0,87

0,871

0,8713

0,87132

0,871328

⋮

## Reële getallen en decimalen

Omgekeerd: bij elk reëel getal hoort een decimale ontwikkeling.

## Reële getallen en decimalen

Omgekeerd: bij elk reëel getal hoort een decimale ontwikkeling.

Voorbeeld:

0,871328464231920093...

# Reële getallen en decimalen

Omgekeerd: bij elk reëel getal hoort een decimale ontwikkeling.

Voorbeeld:

0, 871328464231920093...

maal 10: **8,71328464231920093...**

## Reële getallen en decimalen

Omgekeerd: bij elk reëel getal hoort een decimale ontwikkeling.

Voorbeeld:

$$\begin{array}{ll} & 0,871328464231920093\dots \\ \text{maal } 10: & \mathbf{8},71328464231920093\dots \\ \text{min } 8: & 0,71328464231920093\dots \end{array}$$

## Reële getallen en decimalen

Omgekeerd: bij elk reëel getal hoort een decimale ontwikkeling.

Voorbeeld:

|          |                                |
|----------|--------------------------------|
|          | 0,871328464231920093...        |
| maal 10: | <b>8</b> ,71328464231920093... |
| min 8:   | 0,71328464231920093...         |
| maal 10: | <b>7</b> ,1328464231920093...  |

## Reële getallen en decimalen

Omgekeerd: bij elk reëel getal hoort een decimale ontwikkeling.

Voorbeeld:

|          |                                |
|----------|--------------------------------|
|          | 0,871328464231920093...        |
| maal 10: | <b>8</b> ,71328464231920093... |
| min 8:   | 0,71328464231920093...         |
| maal 10: | <b>7</b> ,1328464231920093...  |
| min 7:   | 0,1328464231920093...          |



## Reële getallen en decimalen

Omgekeerd: bij elk reëel getal hoort een decimale ontwikkeling.

Voorbeeld:

|          |                                |
|----------|--------------------------------|
|          | 0,871328464231920093...        |
| maal 10: | <b>8</b> ,71328464231920093... |
| min 8:   | 0,71328464231920093...         |
| maal 10: | <b>7</b> ,1328464231920093...  |
| min 7:   | 0,1328464231920093...          |
| maal 10: | <b>1</b> ,328464231920093...   |

## Reële getallen en decimalen

Omgekeerd: bij elk reëel getal hoort een decimale ontwikkeling.

Voorbeeld:

|           |                                |
|-----------|--------------------------------|
|           | 0,871328464231920093...        |
| maal 10:  | <b>8</b> ,71328464231920093... |
| min 8:    | 0,71328464231920093...         |
| maal 10:  | <b>7</b> ,1328464231920093...  |
| min 7:    | 0,1328464231920093...          |
| maal 10:  | <b>1</b> ,328464231920093...   |
| enzovoort |                                |

## Toegepast op $1/7$

$$10 \text{ maal } 1/7: \quad 10/7 = 1 + 3/7$$

## Toegepast op $1/7$

$$\begin{array}{ll} 10 \text{ maal } 1/7: & 10/7 = 1 + 3/7 \\ \text{min } 1, \text{ maal } 10: & 30/7 = 4 + 2/7 \end{array}$$

## Toegepast op $1/7$

$$10 \text{ maal } 1/7: \quad 10/7 = \textcolor{red}{1} + \textcolor{green}{3}/7$$

$$\text{min } 1, \text{ maal } 10: \quad 30/7 = \textcolor{red}{4} + \textcolor{green}{2}/7$$

$$\text{min } 4, \text{ maal } 10: \quad 20/7 = \textcolor{red}{2} + \textcolor{green}{6}/7$$

## Toegepast op $1/7$

$$10 \text{ maal } 1/7: \quad 10/7 = \mathbf{1} + \mathbf{3/7}$$

$$\text{min } 1, \text{ maal } 10: \quad 30/7 = \mathbf{4} + \mathbf{2/7}$$

$$\text{min } 4, \text{ maal } 10: \quad 20/7 = \mathbf{2} + \mathbf{6/7}$$

$$\text{min } 2, \text{ maal } 10: \quad 60/7 = \mathbf{8} + \mathbf{4/7}$$

## Toegepast op $1/7$

$$10 \text{ maal } 1/7: \quad 10/7 = \mathbf{1} + \mathbf{3/7}$$

$$\text{min } 1, \text{ maal } 10: \quad 30/7 = \mathbf{4} + \mathbf{2/7}$$

$$\text{min } 4, \text{ maal } 10: \quad 20/7 = \mathbf{2} + \mathbf{6/7}$$

$$\text{min } 2, \text{ maal } 10: \quad 60/7 = \mathbf{8} + \mathbf{4/7}$$

$$\text{min } 8, \text{ maal } 10: \quad 40/7 = \mathbf{5} + \mathbf{5/7}$$

## Toegepast op $1/7$

$$\begin{array}{ll} 10 \text{ maal } 1/7: & 10/7 = \mathbf{1} + \mathbf{3/7} \\ \text{min } 1, \text{ maal } 10: & 30/7 = \mathbf{4} + \mathbf{2/7} \\ \text{min } 4, \text{ maal } 10: & 20/7 = \mathbf{2} + \mathbf{6/7} \\ \text{min } 2, \text{ maal } 10: & 60/7 = \mathbf{8} + \mathbf{4/7} \\ \text{min } 8, \text{ maal } 10: & 40/7 = \mathbf{5} + \mathbf{5/7} \\ \text{min } 5, \text{ maal } 10: & 50/7 = \mathbf{7} + \mathbf{1/7} \end{array}$$



## Toegepast op $1/7$

|                 |                  |
|-----------------|------------------|
| 10 maal $1/7$ : | $10/7 = 1 + 3/7$ |
| min 1, maal 10: | $30/7 = 4 + 2/7$ |
| min 4, maal 10: | $20/7 = 2 + 6/7$ |
| min 2, maal 10: | $60/7 = 8 + 4/7$ |
| min 8, maal 10: | $40/7 = 5 + 5/7$ |
| min 5, maal 10: | $50/7 = 7 + 1/7$ |
| min 7, maal 10: | $10/7 = 1 + 3/7$ |

## Toegepast op $1/7$

$$\begin{array}{ll} 10 \text{ maal } 1/7: & 10/7 = \mathbf{1} + \mathbf{3/7} \\ \text{min } 1, \text{ maal } 10: & 30/7 = \mathbf{4} + \mathbf{2/7} \\ \text{min } 4, \text{ maal } 10: & 20/7 = \mathbf{2} + \mathbf{6/7} \\ \text{min } 2, \text{ maal } 10: & 60/7 = \mathbf{8} + \mathbf{4/7} \\ \text{min } 8, \text{ maal } 10: & 40/7 = \mathbf{5} + \mathbf{5/7} \\ \text{min } 5, \text{ maal } 10: & 50/7 = \mathbf{7} + \mathbf{1/7} \\ \text{min } 7, \text{ maal } 10: & 10/7 = \mathbf{1} + \mathbf{3/7} \end{array}$$

Nu volgt herhaling van zetten

## Toegepast op $1/7$

$$\begin{array}{ll} 10 \text{ maal } 1/7: & 10/7 = \mathbf{1} + \mathbf{3}/7 \\ \text{min } 1, \text{ maal } 10: & 30/7 = \mathbf{4} + \mathbf{2}/7 \\ \text{min } 4, \text{ maal } 10: & 20/7 = \mathbf{2} + \mathbf{6}/7 \\ \text{min } 2, \text{ maal } 10: & 60/7 = \mathbf{8} + \mathbf{4}/7 \\ \text{min } 8, \text{ maal } 10: & 40/7 = \mathbf{5} + \mathbf{5}/7 \\ \text{min } 5, \text{ maal } 10: & 50/7 = \mathbf{7} + \mathbf{1}/7 \\ \text{min } 7, \text{ maal } 10: & 10/7 = \mathbf{1} + \mathbf{3}/7 \end{array}$$

Nu volgt herhaling van zetten

Dus:

$$1/7 = 0, \mathbf{142857\ 142857\ 142857\ 142857\ \dots}$$

# Periodieke decimale ontwikkelingen

## Stelling (folklore)

De decimale ontwikkeling van een rationaal getal is ofwel eindig, ofwel oneindig en (vanaf zeker moment) periodiek.

# Periodieke decimale ontwikkelingen

## Stelling (folklore)

De decimale ontwikkeling van een rationaal getal is ofwel eindig, ofwel oneindig en (vanaf zeker moment) periodiek.

Er zijn vele niet-periodieke decimale ontwikkelingen. Bijvoorbeeld

$0,1010010001000010000010000\dots$

(1 één, 1 nul 1 één, 2 nullen 1 één, 3 nullen, één 1, etc).

# Periodieke decimale ontwikkelingen

## Stelling (folklore)

De decimale ontwikkeling van een rationaal getal is ofwel eindig, ofwel oneindig en (vanaf zeker moment) periodiek.

Er zijn vele niet-periodieke decimale ontwikkelingen. Bijvoorbeeld

$0,1010010001000010000010000\dots$

(1 één, 1 nul 1 één, 2 nullen 1 één, 3 nullen, één 1, etc).

Dit laatste getal is dus niet rationaal.

# Periodieke decimale ontwikkelingen

## Stelling (folklore)

De decimale ontwikkeling van een rationaal getal is ofwel eindig, ofwel oneindig en (vanaf zeker moment) periodiek.

Er zijn vele niet-periodieke decimale ontwikkelingen. Bijvoorbeeld

$0,1010010001000010000010000\dots$

(1 één, 1 nul 1 één, 2 nullen 1 één, 3 nullen, één 1, etc).

Dit laatste getal is dus niet rationaal.

Conclusie (wederom):  $\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$ .

$$\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$$

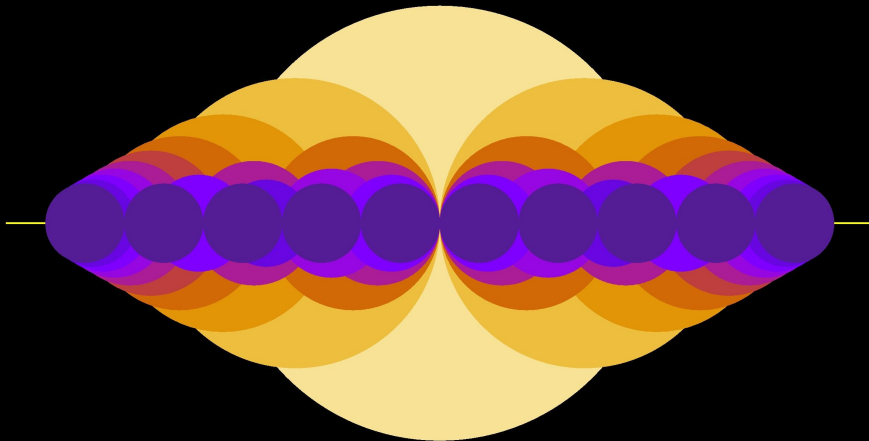
Derde bewijs:



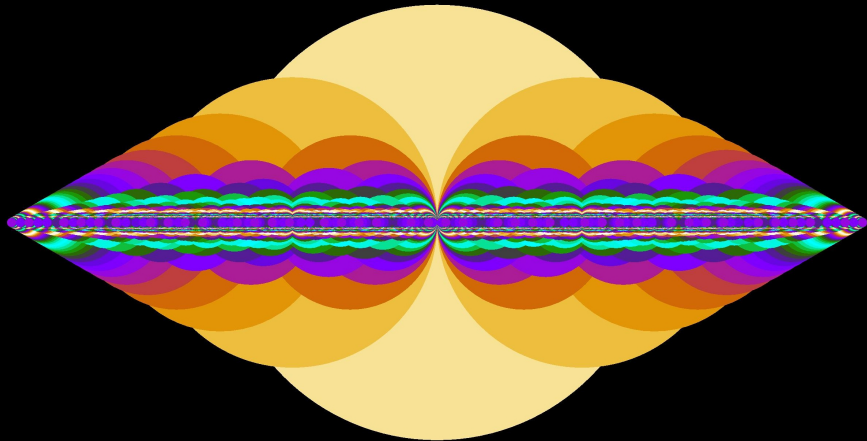
# De getallenrechte

---

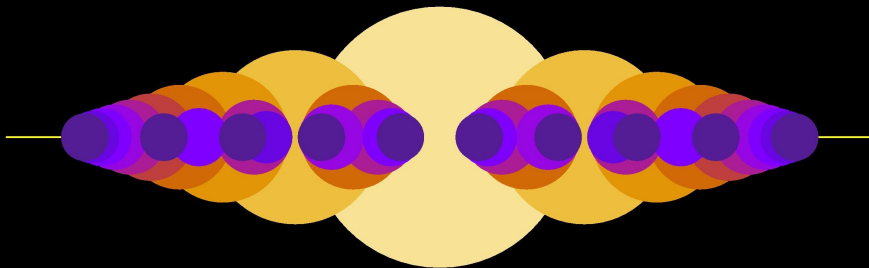
$0 < p/q < 1$ ,  $2 \leq q \leq 11$ ,  $\text{straal} = 0.5/q$



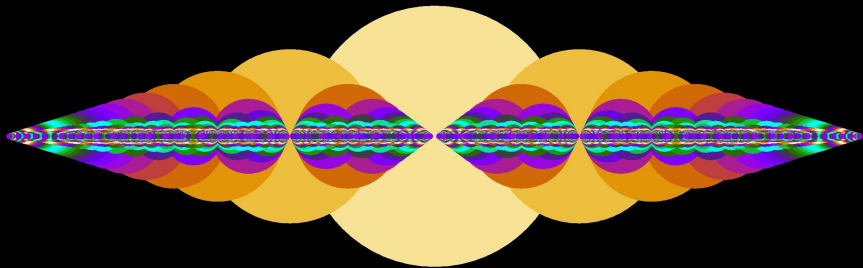
$0 < p/q < 1$ , straal =  $0.5/q$



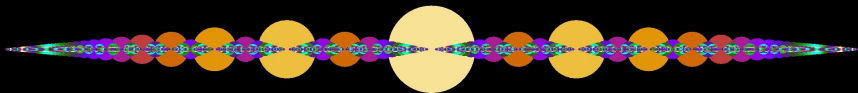
$0 < p/q < 1$ ,  $2 \leq q \leq 11$ ,  $\text{straal} = 0.3/q$



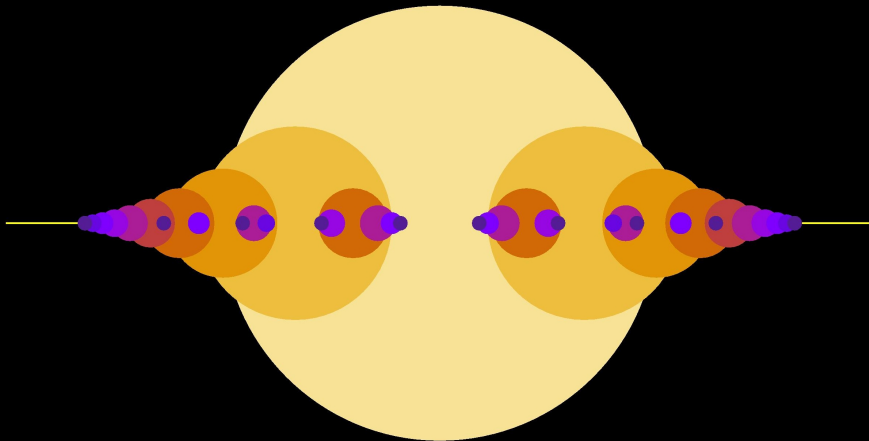
$0 < p/q < 1$ ,  $\text{straal} = 0.3/q$



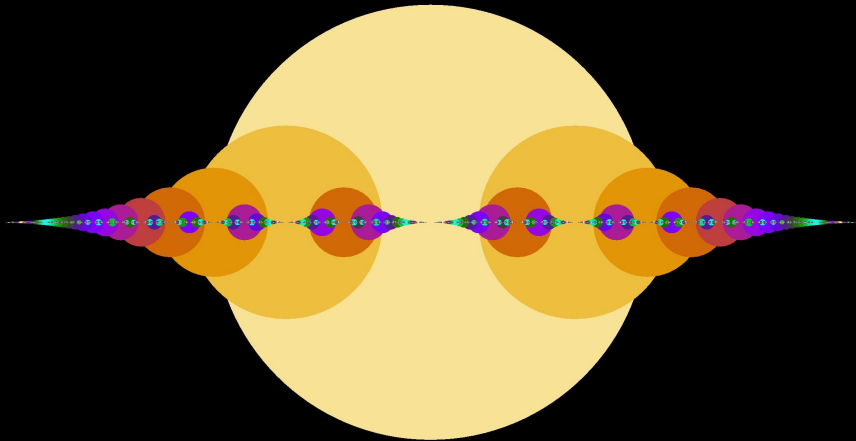
$0 < p/q < 1$ ,  $\text{straal} = 0.1/q$



$0 < p/q < 1$ ,  $2 \leq q \leq 11$ ,  $\text{straal} = 1/q^2$

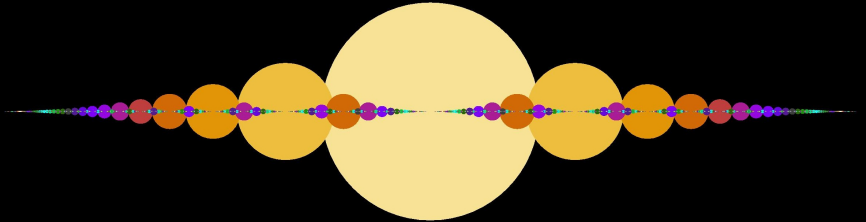


$0 < p/q < 1$ , straal  $= 1/q^2$

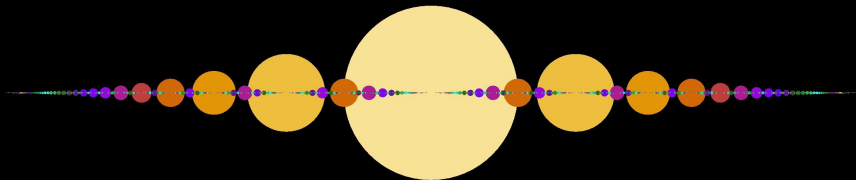




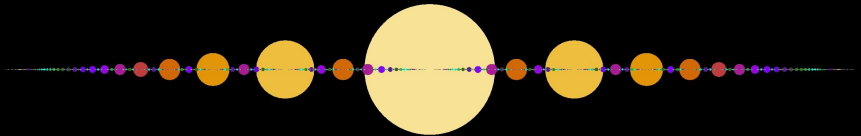
$$0 < p/q < 1, \text{ straal} = 0.5/q^2$$



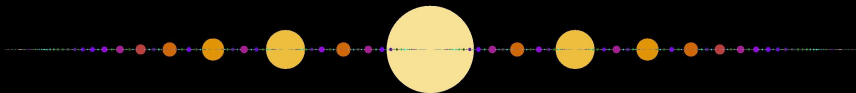
$0 < p/q < 1$ ,  $\text{straal} = 0.4/q^2$



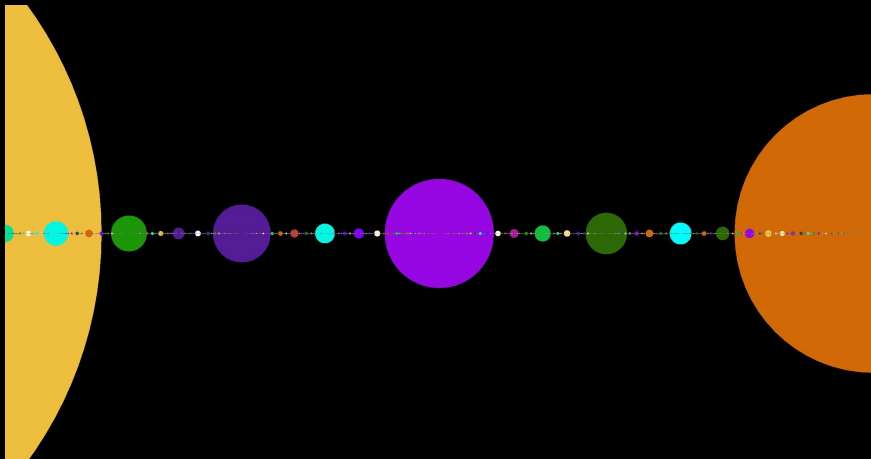
$0 < p/q < 1$ ,  $\text{straal} = 0.3/q^2$



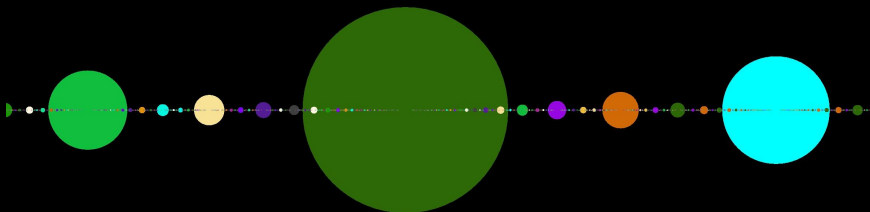
$$0 < p/q < 1, \text{ straal} = 0.2/q^2$$



$0.35 < p/q < 0.4$ ,  $\text{straal} = 0.2/q^2$



$$0.38 < p/q < 0.39, \text{ straal} = 0.2/q^2$$



## Een plekje voor $\mathbb{Q}$

Er geldt:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1.$$

## Een plekje voor $\mathbb{Q}$

Er geldt:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1.$$

Waarom?

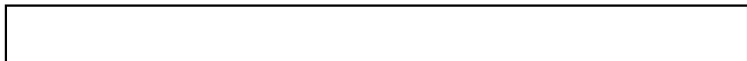


## Een plekje voor $\mathbb{Q}$

Er geldt:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1.$$

Waarom? Neem een balk met lengte 1:

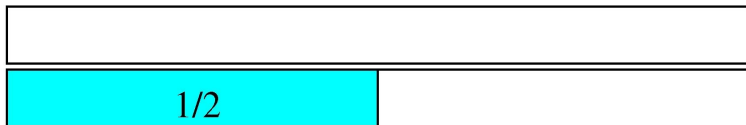


## Een plekje voor $\mathbb{Q}$

Er geldt:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1.$$

Waarom? Neem een balk met lengte 1:

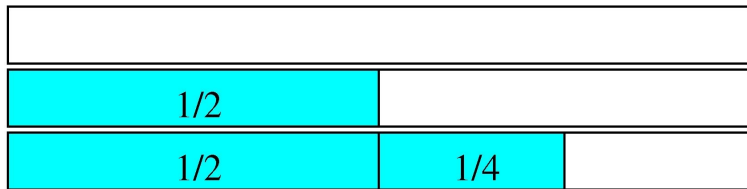


## Een plekje voor $\mathbb{Q}$

Er geldt:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1.$$

Waarom? Neem een balk met lengte 1:

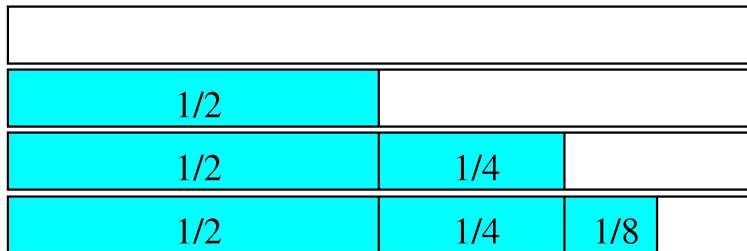


## Een plekje voor $\mathbb{Q}$

Er geldt:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1.$$

Waarom? Neem een balk met lengte 1:

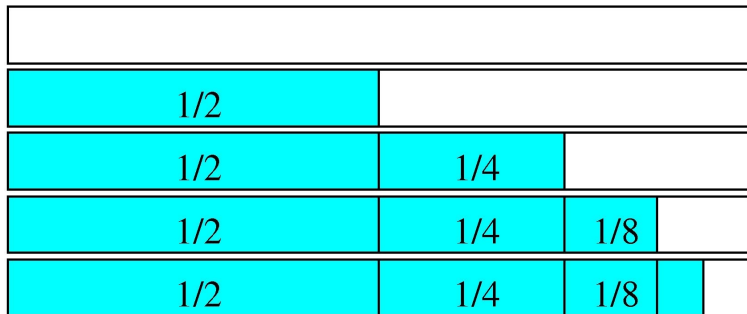


## Een plekje voor $\mathbb{Q}$

Er geldt:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1.$$

Waarom? Neem een balk met lengte 1:

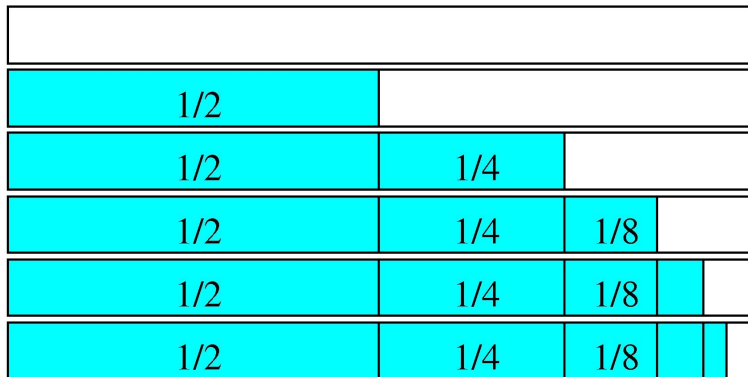


## Een plekje voor $\mathbb{Q}$

Er geldt:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1.$$

Waarom? Neem een balk met lengte 1:



## $\mathbb{Q}$ heeft maat nul

De positieve breuk  $p/q$  stippen we aan met een viltstift met doorsnede

$$\frac{1}{1000} \times \frac{1}{2^{p+q}} = \frac{1}{1000} \times \frac{1}{2^p} \times \frac{1}{2^q}$$

## $\mathbb{Q}$ heeft maat nul

De positieve breuk  $p/q$  stippen we aan met een viltstift met doorsnede

$$\frac{1}{1000} \times \frac{1}{2^{p+q}} = \frac{1}{1000} \times \frac{1}{2^p} \times \frac{1}{2^q}$$

Sommeren over  $p = 1, 2, 3, \dots$  geeft

$$\frac{1}{1000} \times \frac{1}{2^q}$$



$\mathbb{Q}$  heeft maat nul

De positieve breuk  $p/q$  stippen we aan met een viltstift met doorsnede

$$\frac{1}{1000} \times \frac{1}{2^{p+q}} = \frac{1}{1000} \times \frac{1}{2^p} \times \frac{1}{2^q}$$

Sommeren over  $p = 1, 2, 3, \dots$  geeft

$$\frac{1}{1000} \times \frac{1}{2^q}$$

Sommeren over  $q = 1, 2, 3, \dots$  geeft vervolgens

$$\frac{1}{1000}$$

## $\mathbb{Q}$ heeft maat nul

De positieve breuk  $p/q$  stippen we aan met een viltstift met doorsnede

$$\frac{1}{1000} \times \frac{1}{2^{p+q}} = \frac{1}{1000} \times \frac{1}{2^p} \times \frac{1}{2^q}$$

Sommeren over  $p = 1, 2, 3, \dots$  geeft

$$\frac{1}{1000} \times \frac{1}{2^q}$$

Sommeren over  $q = 1, 2, 3, \dots$  geeft vervolgens

$$\frac{1}{1000}$$

Conclusie:  $\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$

## $\mathbb{Q}$ heeft maat nul

De positieve breuk  $p/q$  stippen we aan met een viltstift met doorsnede

$$\frac{1}{1000} \times \frac{1}{2^{p+q}} = \frac{1}{1000} \times \frac{1}{2^p} \times \frac{1}{2^q}$$

Sommeren over  $p = 1, 2, 3, \dots$  geeft

$$\frac{1}{1000} \times \frac{1}{2^q}$$

Sommeren over  $q = 1, 2, 3, \dots$  geeft vervolgens

$$\frac{1}{1000}$$

Conclusie:  $\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$

Sterker nog: 'bijna' alle reële getallen zijn irrationaal.

# Rationale punten in het vlak

Ter vermaak:

Elk punt van de vorm

$$\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{q}\right)$$

in het éénheidsvierkant geven we aan met een viltstiftpunt waarvan de grootte afhangt van  $q$ .

# Rationale punten in het vlak

Ter vermaak:

Elk punt van de vorm

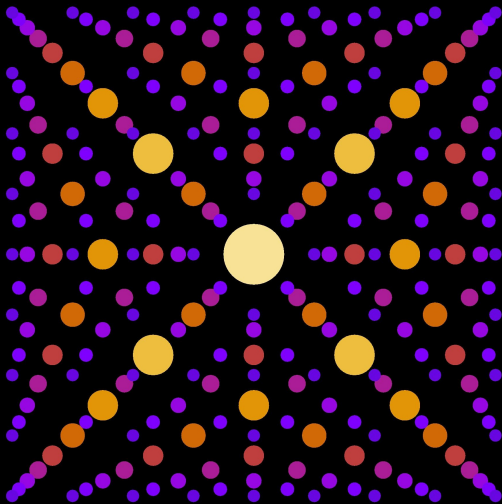
$$\left( \frac{p}{q}, \frac{r}{q} \right)$$

in het éénheidsvierkant geven we aan met een viltstiftpunt waarvan de grootte afhangt van  $q$ .

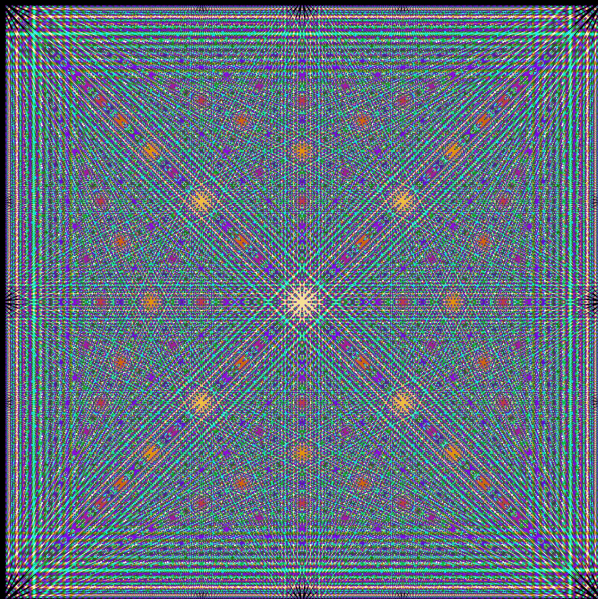
We kiezen grootten van de vorm

$$\sim \frac{1}{q} \qquad \sim \frac{1}{q^{1.5}}$$

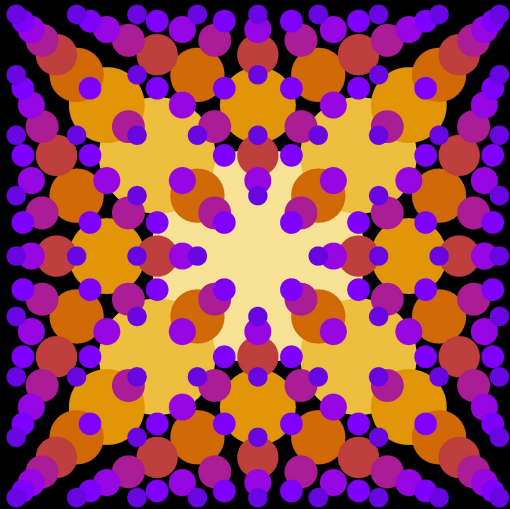
$0 < p/q, r/q < 1, 2 \leq q \leq 10$ , straal =  $0.1/q$



$0 < p/q, r/q < 1$ ,  $\text{straal} = 0.1/q$

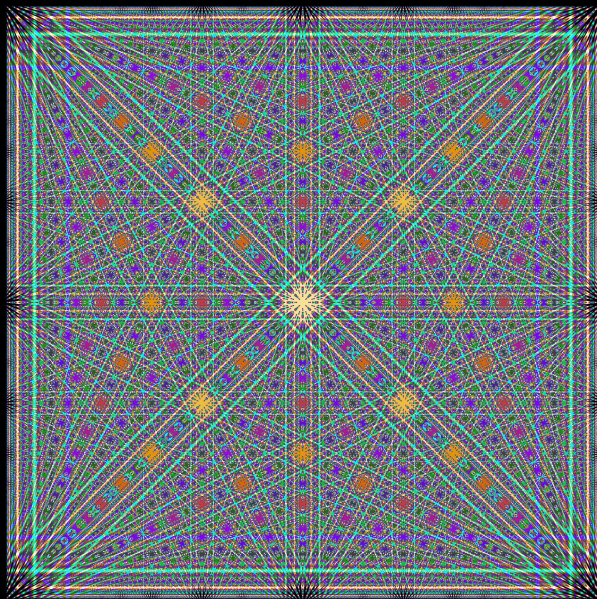


$0 < p/q, r/q < 1, 2 \leq q \leq 10$ ,  $\text{straal} = 0.5/q^{1.5}$

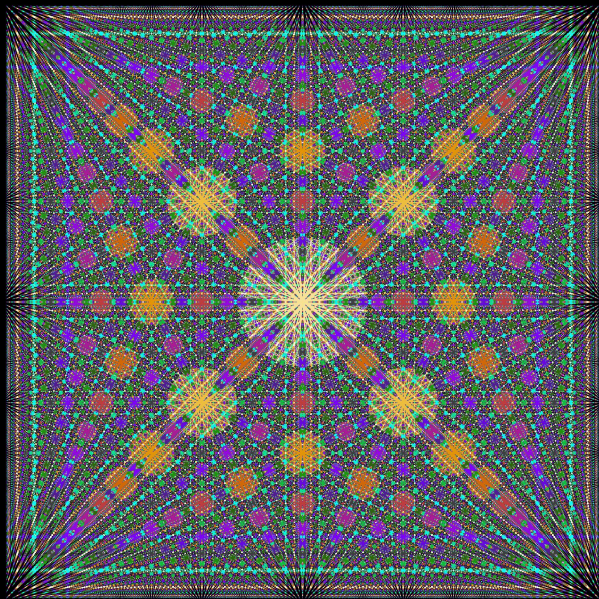




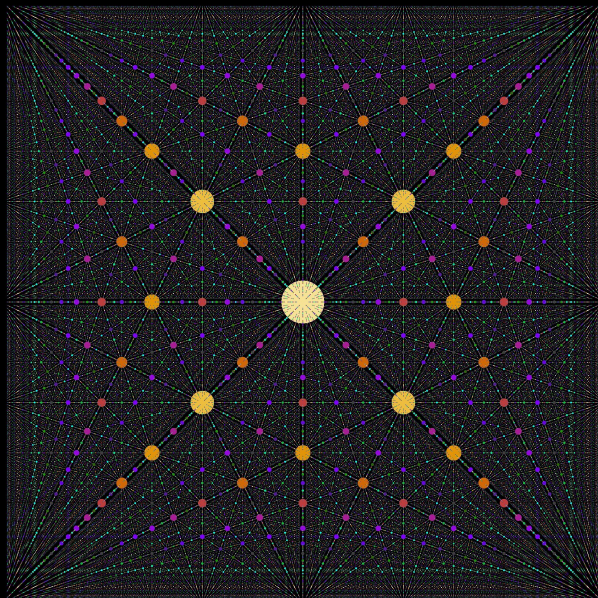
$0 < p/q, r/q < 1$ ,  $\text{straal} = 0.5/q^{1.5}$



$0 < p/q, r/q < 1$ ,  $\text{straal} = 0.3/q^{1.5}$



$0 < p/q, r/q < 1$ ,  $\text{straal} = 0.1/q^{1.5}$



## Algebraïsche getallen

Het irrationale getal  $\sqrt{2}$  is nulpunt van  $x^2 - 2$ .

## Algebraïsche getallen

Het irrationale getal  $\sqrt{2}$  is nulpunt van  $x^2 - 2$ .

Het getal  $\sqrt[3]{17}$  is nulpunt van  $x^3 - 17$ , etc.

# Algebraïsche getallen

Het irrationale getal  $\sqrt{2}$  is nulpunt van  $x^2 - 2$ .

Het getal  $\sqrt[3]{17}$  is nulpunt van  $x^3 - 17$ , etc.

We noemen dit algebraïsche getallen.

# Algebraïsche getallen

Het irrationale getal  $\sqrt{2}$  is nulpunt van  $x^2 - 2$ .

Het getal  $\sqrt[3]{17}$  is nulpunt van  $x^3 - 17$ , etc.

We noemen dit algebraïsche getallen. De nulpunten van

- $x^3 - x + 2$
- $3x^5 + 8x^2 - 2x + 5$
- $x^{101} - x^{61} + 23$
- etcetera.

noemen we ook algebraïsche getallen.

# Algebraïsche getallen

Het irrationale getal  $\sqrt{2}$  is nulpunt van  $x^2 - 2$ .

Het getal  $\sqrt[3]{17}$  is nulpunt van  $x^3 - 17$ , etc.

We noemen dit algebraïsche getallen. De nulpunten van

- $x^3 - x + 2$
- $3x^5 + 8x^2 - 2x + 5$
- $x^{101} - x^{61} + 23$
- etcetera.

noemen we ook algebraïsche getallen.

## Definitie

Een nulpunt van een veelterm met gehele coëfficiënten noemen we een *algebraïsch getal*.



# Algebraïsche getallen

Het irrationale getal  $\sqrt{2}$  is nulpunt van  $x^2 - 2$ .

Het getal  $\sqrt[3]{17}$  is nulpunt van  $x^3 - 17$ , etc.

We noemen dit algebraïsche getallen. De nulpunten van

- $x^3 - x + 2$
- $3x^5 + 8x^2 - 2x + 5$
- $x^{101} - x^{61} + 23$
- etcetera.

noemen we ook algebraïsche getallen.

## Definitie

Een nulpunt van een veelterm met gehele coëfficiënten noemen we een *algebraïsch getal*.

NB: Rationale getallen zijn ook algebraïsch, bijvoorbeeld  $2/3$  is nulpunt van  $3x - 2$ .

# Transcendente getallen

## Definitie

Een reëel getal dat niet algebraïsch is  
noemen we *transcendent*

# Transcendente getallen

## Definitie

Een reëel getal dat niet algebraïsch is  
noemen we *transcendent*

## Stelling (Liouville, 1844)

Transcendente getallen bestaan

# Overaftelbaar

Stelling (Cantor, rond 1870)

"Bijna" alle reële getallen zijn transcendent!

# Overaftelbaar

## Stelling (Cantor, rond 1870)

"Bijna" alle reële getallen zijn transcendent!

## Contrast:

Met het merendeel van de reële werken we nooit, maar we hebben ze toch nodig

# Overaftelbaar

## Stelling (Cantor, rond 1870)

"Bijna" alle reële getallen zijn transcendent!

## Contrast:

Met het merendeel van de reële werken we nooit, maar we hebben ze toch nodig



# Cirkelquadratuur

Stelling (Hermite, 1853)

Het getal  $e$  is transcendent

# Cirkelquadratuur

Stelling (Hermite, 1853)

Het getal  $e$  is transcendent

Stelling (Lindemann, 1881)

Het getal  $\pi$  is transcendent





Een persoonlijke top 5  
van reële getallen

## Nummer 5 en 4



$$e^{\pi\sqrt{67}} = 147197952743,9999986624542\dots$$

## Nummer 5 en 4



$$e^{\pi\sqrt{67}} = 147197952743,9999986624542\dots$$

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262537412640768743,9999999999992500\dots$$

## Nummer 5 en 4



$$e^{\pi\sqrt{67}} = 147197952743,9999986624542\dots$$

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262537412640768743,9999999999992500\dots$$

### Stelling (Gel'fond 1929)

De getallen  $e^{\pi\sqrt{67}}$  en  $e^{\pi\sqrt{163}}$  zijn transcendent.

## Nummer 3



$$\alpha = 0,9 \times 0,99 \times 0,999 \times 0,9999 \times 0,99999 \times \dots$$

## Nummer 3



$$\alpha = 0,9 \times 0,99 \times 0,999 \times 0,9999 \times 0,99999 \times \dots$$

In decimalen:

$$\alpha = 0,89$$

00100

99998999

00000010000

99999999899999

00000000001000000

99999999999989999999

000000000000000100000000...

## Nummer 3



$$\alpha = 0,9 \times 0,99 \times 0,999 \times 0,9999 \times 0,99999 \times \dots$$

Stelling (Nesterenko 1996)

Het getal  $\alpha$  is transcendent

(Bijzonder geval van een uitgebreide stelling van Nesterenko)

## Nummer 3



$$\alpha = 0,9 \times 0,99 \times 0,999 \times 0,9999 \times 0,99999 \times \dots$$

Nog een verrassing:

$$\alpha^3 = 0,70$$

4993000

8999890000

129999985000000

1699999998100000000

20999999999770000000000

24999999999973000000000000

289999999999996900000000000000 ...



## Nummer 2



Het getal van Champernowne:

$$\beta = 0,123456789101112131415161718192021 \dots$$

## Nummer 2



Het getal van Champernowne:

$$\beta = 0,123456789101112131415161718192021 \dots$$

Stelling (Mahler 1937)

Het getal  $\beta$  is transcendent



# Nummer 1



$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

# Nummer 1



$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

Helaas bestaat dit getal niet, want de reeks divergeert.

# Nummer 1



$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

Helaas bestaat dit getal niet, want de reeks divergeert.  
We hebben wel:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N-1} - \ln(N) \rightarrow \gamma$$

als  $N \rightarrow \infty$ , waarin

$$\gamma = 0.577215664901532860606\dots$$

# Nummer 1



$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

Helaas bestaat dit getal niet, want de reeks divergeert.  
We hebben wel:

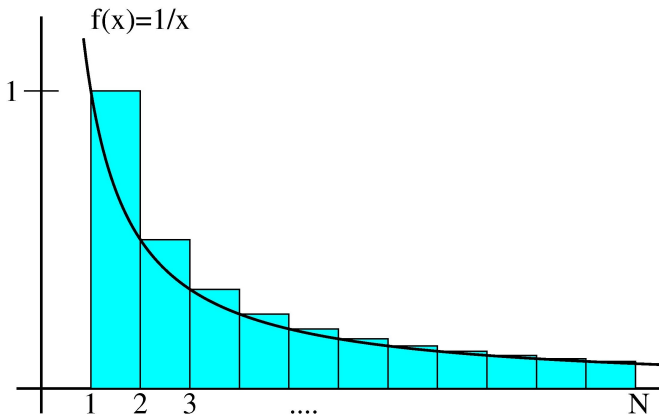
$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N-1} - \ln(N) \rightarrow \gamma$$

als  $N \rightarrow \infty$ , waarin

$$\gamma = 0.577215664901532860606\dots$$

We noemen  $\gamma$  de *Euler constante*.

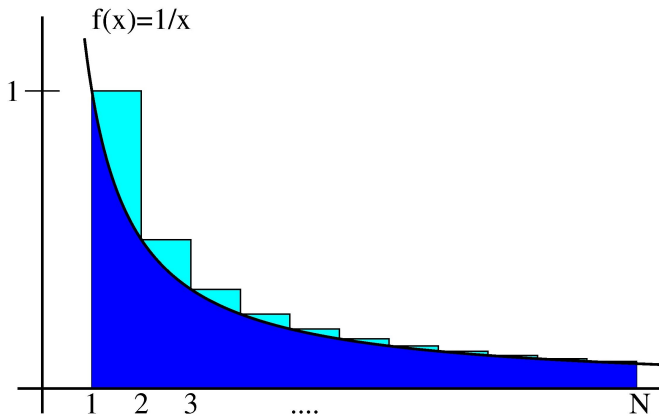
## Bestaan van Euler's constante



Lichtblauwe gebied heeft oppervlak

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N-1}$$

## Bestaan van Euler's constante

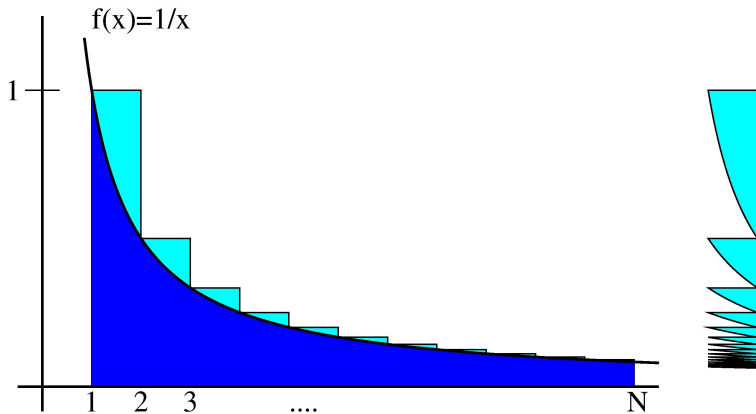


Donkerblauwe gebied heeft oppervlak

$$\int_1^N \frac{dx}{x} = \ln(N)$$



## Bestaan van Euler's constante



Het verschil van de oppervlakken gaat naar  $\gamma$ .

Vermoeden (folklore)

Het getal  $\gamma$  is irrationaal



P. Appell, 1855-1930

# Epiloog



# Epiloog



# Epiloog



# Epiloog



# Einde