Nationale Wiskundedagen 2007:

Projectieve Meetkunde en Mechanica

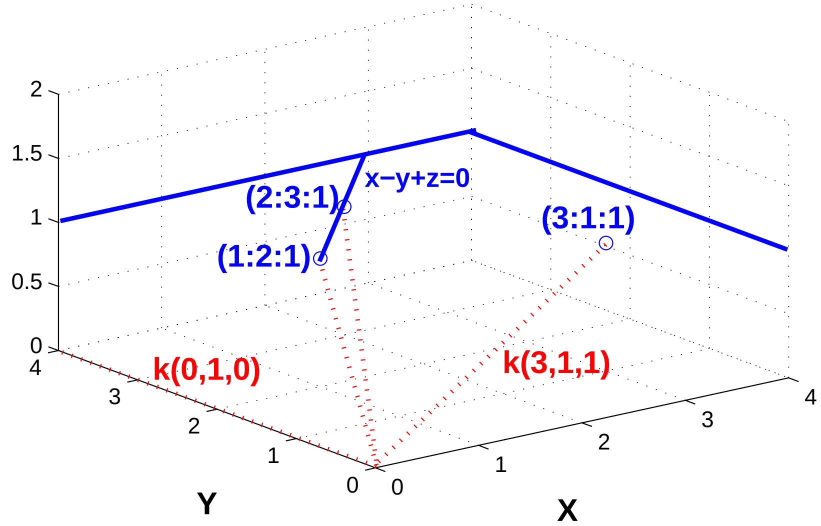
Rudi Penne

Rudi.Penne@kdg.be

Karel de Grote-Hogeschool, Antwerp

Het projectief vlak

IP^2 = euclidisch vlak vanuit perspectief
"waarnemer": oorsprong $(0, 0, 0)$
standaardpositie "werkvlak": $z = 1$



euclidisch punt (x, y)

$\downarrow$

kijkrichting $k(x, y, 1)$

$\downarrow$

projectief punt $(kx : ky : k)$

punt op ∞ (verdwijnrichting): $(* : * : 0)$

Lijncoördinaten

Rechte in het projectief vlak:

$$l = \{(X : Y : Z) \mid AX + BY + CZ = 0\}$$

(vlak van kijkrichtingen naar $Ax + By + C = 0$)

lijncoördinaten: $(A : B : C)$

! $(-B : A : 0)$ is punt op ∞ van l

! $l_\infty :\ (0 : 0 : 1)$ (bevat alle punten op ∞)

Optelling van homogene coördinaten

- Som van punten:

$$P(2:3:1) + Q(-2:5:4) = S(0:8:5)$$

S ligt op de rechte door P en Q!

- Som van rechten:

$$p(2:3:1) + q(-2:5:4) = s(0:8:5)$$

s gaat door snijpunt van p en q

Opgelet: De juiste positie van de som hangt af van de gekozen homogene coördinaten.

Uitwendig product

P, Q: punten in $I\!P^2$
l: rechte door P en Q

$$P \wedge Q = l$$

homogene coördinaten:
$(P_1 : P_2 : P_3)$, $(Q_1 : Q_2 : Q_3)$ en $(l_1 : l_2 : l_3)$

$$(l_1, l_2, l_3) = (P_1, P_2, P_3) \times (Q_1, Q_2, Q_3)$$

$$= \left(\begin{vmatrix} P_2 & P_3 \\ Q_2 & Q_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} P_3 & P_1 \\ Q_3 & Q_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} P_1 & P_2 \\ Q_1 & Q_2 \end{vmatrix} \right)$$

Eigenschappen van $\wedge$

- anti-symmetrisch:

$$P \wedge Q = -Q \wedge P$$

- bilineair:

$$(\alpha P_1 + \beta P_2) \wedge Q = \alpha P_1 \wedge Q + \beta P_2 \wedge Q$$

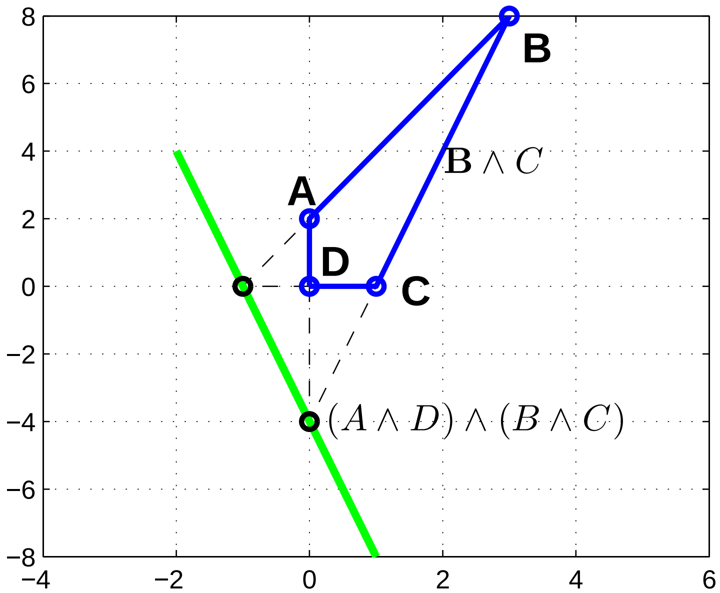
$\Rightarrow P \wedge Q$: anti-symmetrische tensor
formeel: P, Q in $\mathbb{R}^3 \mapsto P \wedge Q$ in $\wedge^2 \mathbb{R}^3$
basis: $(e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1, e_1 \wedge e_2)$

Duaal uitwendig product

p, q: rechten in $I\!P^2$; L: snijpunt van p en q

$$\begin{aligned} p \wedge q &= L \\ (p_1, p_2, p_3) \times (q_1, q_2, q_3) &= (L_1, L_2, L_3) \end{aligned}$$

Voorbeeld:



$$l = [(A \wedge B) \wedge (C \wedge D)] \wedge [(A \wedge D) \wedge (B \wedge C)]$$

Kinematica in het vlak

- rotaties

  rotatiecentrum: (c_1, c_2)

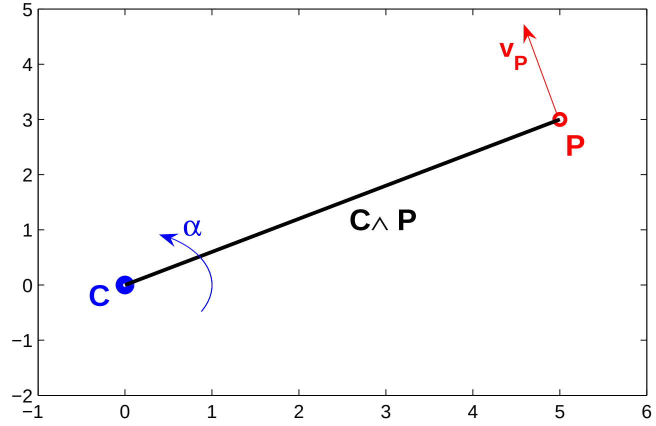
  (radiale) hoeksnelheid: α

  projectief bewegingscentrum:

$$C = (\alpha c_1, \alpha c_2, \alpha)$$

beweging van P:

$$M(P) = C \wedge P = (v_P, *)$$



Voorbeeld: centrum$= (0,0)$, $\alpha = 3$, $P = (2,2)$

$\Rightarrow C = (0,0,3)$

$\Rightarrow M(P) = (0,0,3) \wedge (2,2,1) = (-6,6,0)$

$(v_P = (-6,6))$

Kinematica in het vlak

- translaties

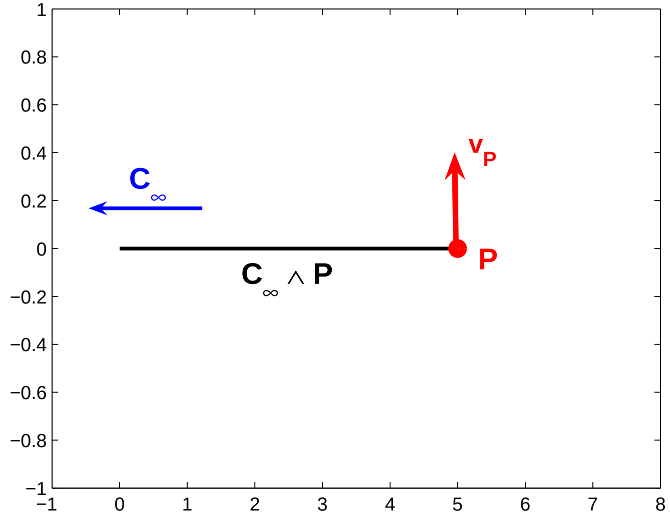
translatievector: (v_1, v_2)

projectief bewegingscentrum:

$$C = (-v_2, v_1, 0)$$

beweging van P:

$$M(P) = C \wedge P = (v_P, *)$$



Voorbeeld: translatie: $(1, 3)$, $P = (2, 2)$

$\Rightarrow C = (-3, 1, 0)$

$\Rightarrow M(P) = (-3, 1, 0) \wedge (2, 2, 1) = (1, 3, -8)$

$(v_P = (1, 3))$

Samenstelling van bewegingen

in punt P:

$$\begin{aligned} M_1(P) + M_2(P) &= (C_1 \wedge P) + (C_2 \wedge P) \\ &= (C_1 + C_2) \wedge P \\ &= C \wedge P \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ resulterend centrum:

$$C = C_1 + C_2$$

Gevolg: De samenstelling van rotaties en/of translaties is weer een rotatie of translatie.

Directe kinematica

centrum voor resulterende beweging:

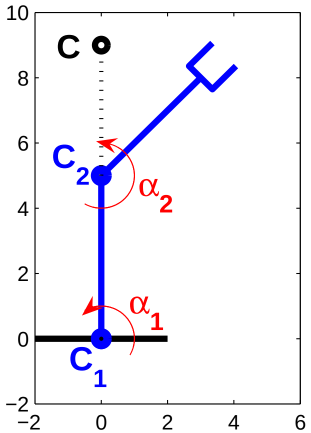
$$C = \sum \alpha_i C_i$$

Voorbeeld:
bewegingscentrum grijper:

$$C = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2$$

locatie:

op rechte $C_1 \wedge C_2$

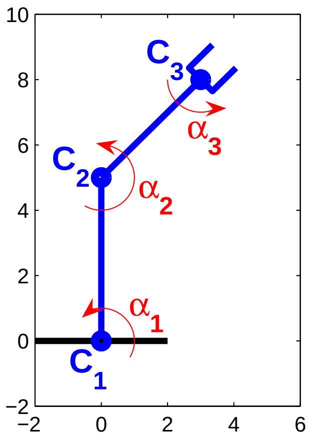


Inverse kinematica

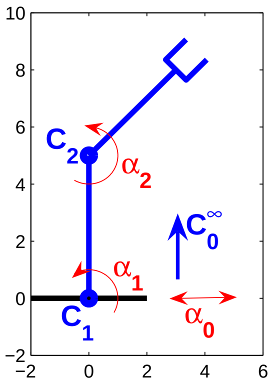
Gewenste beweging voor “grijper”: C

? $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ zodat

$$\sum \alpha_i C_i = C$$



opgelet: vereist aantal scharnieren ≥ 3 (≥ 6 in 3D)



Singulariteiten

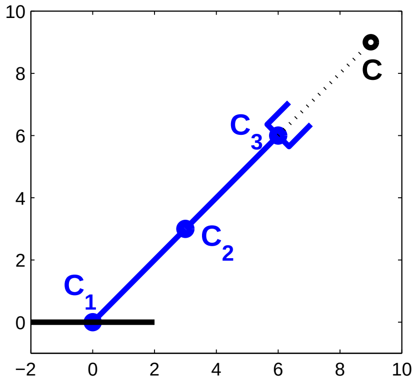
speciale positie van scharnieren

$$\Downarrow$$

beperkte mobiliteit

Voorbeeld: vlakke arm met 3 v.g.:

$$\boxed{\text{singulariteit} \iff \text{scharnieren collineair}}$$



Relatieve centra

B_1, B_2: starre lichamen in het vlak
C_i: bewegingscentrum voor B_i
$\Rightarrow$ relatief centrum:

$$C_{12} = C_1 - C_2$$

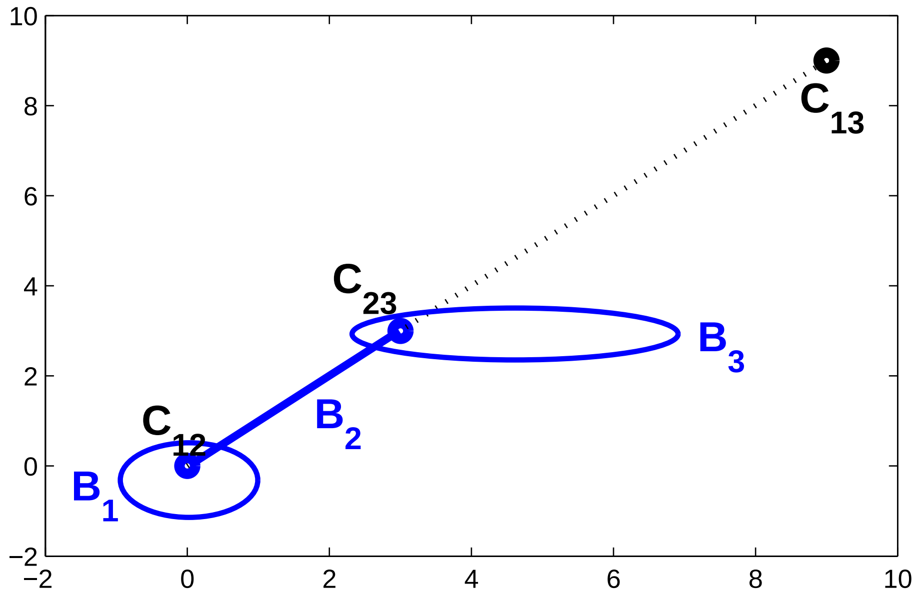
Opmerkingen

- geen relatieve beweging $\Rightarrow C_{12} = 0$
- beweging rond scharnier $J \Rightarrow C_{12} \sim J$

Aronhold-Kennedy

B_1, B_2, B_3: 3 starre lichamen
C_{12}, C_{13}, C_{23}: 3 relatieve centra

$\boxed{C_{12}, C_{13}, C_{23} \text{ collineair}}$



Staafconstructies

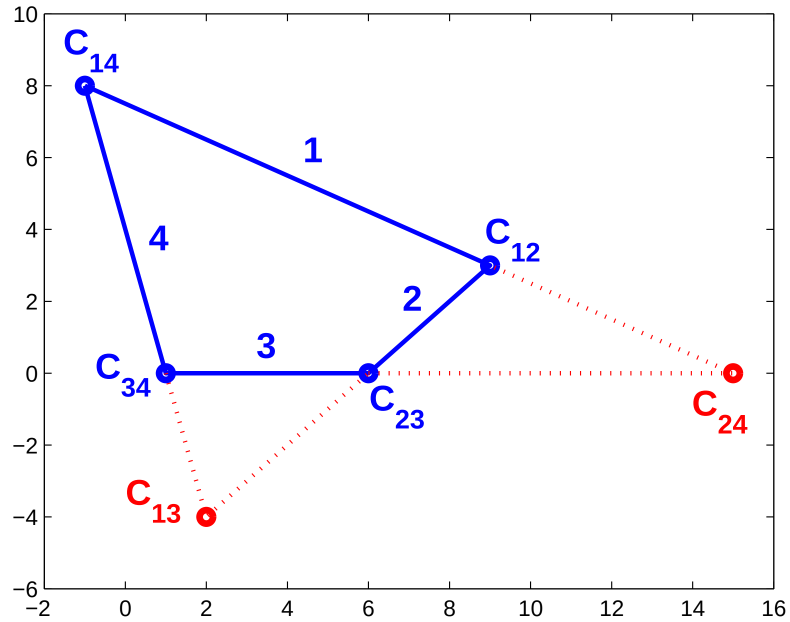
$F = (V, E)$ met scharnieren $V = \{P_1, \ldots, P_v\}$ en starre staven $E = \{b_1, \ldots, b_e\}$ ($b_i = [P_j, P_k]$)

$\boxed{\text{beweging van } F\text{: staaf } b_i \longrightarrow \text{centrum } C_i}$

Voorwaarde: $C_i \cap C_j = \{P\} \Rightarrow C_{ij} \sim P$!

primaire centra:
scharnieren

secundaire centra:
Aronhold-Kennedy

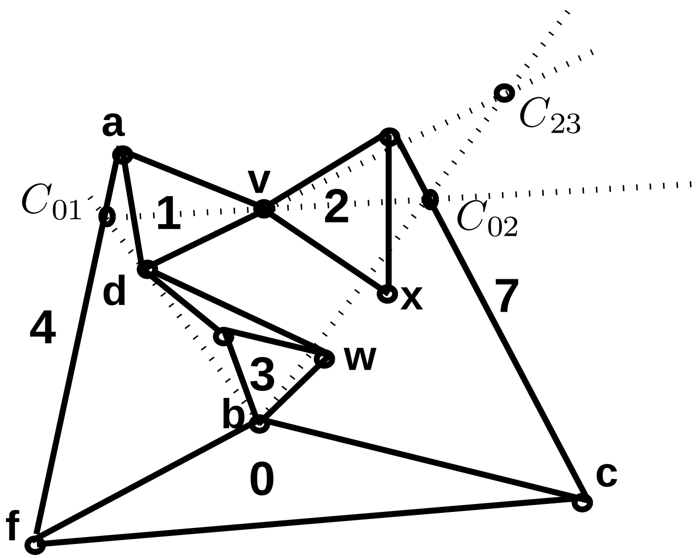


De “regel van vier”

C_{ij} als snijpunt van 2 AK-rechten

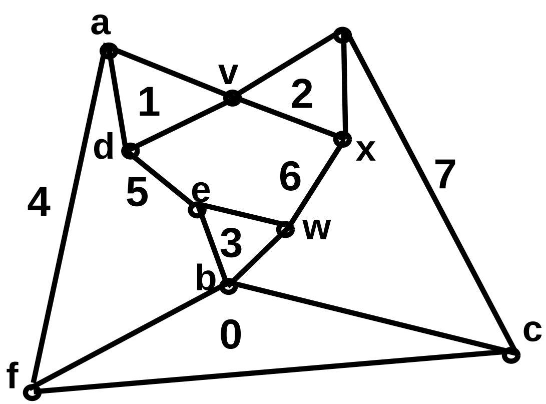
Voorbeeld:

$$C_{01} \Rightarrow C_{02} \Rightarrow C_{23}$$



Moeilijk geval

Soms is de regel van 4 onvoldoende:

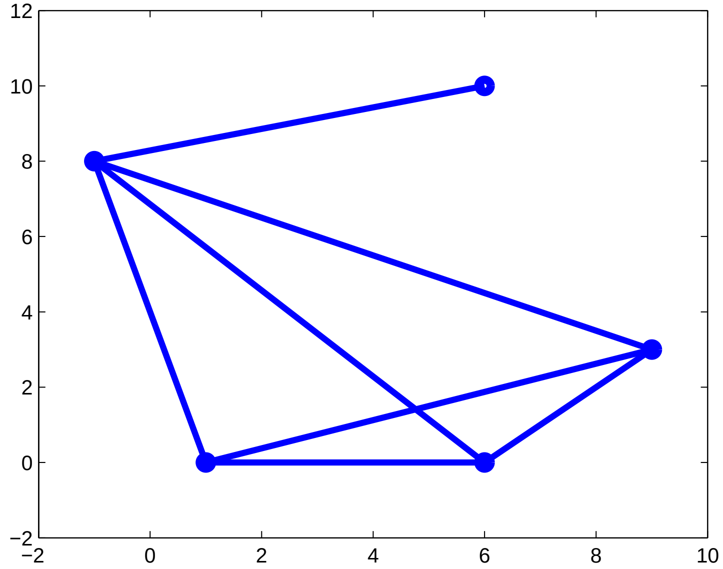


Stelling: Regel van 4 volstaat voor enkelvoudige mechanismen ("graad 2 - uitbreiding" van het "vier-staven-mechanisme")

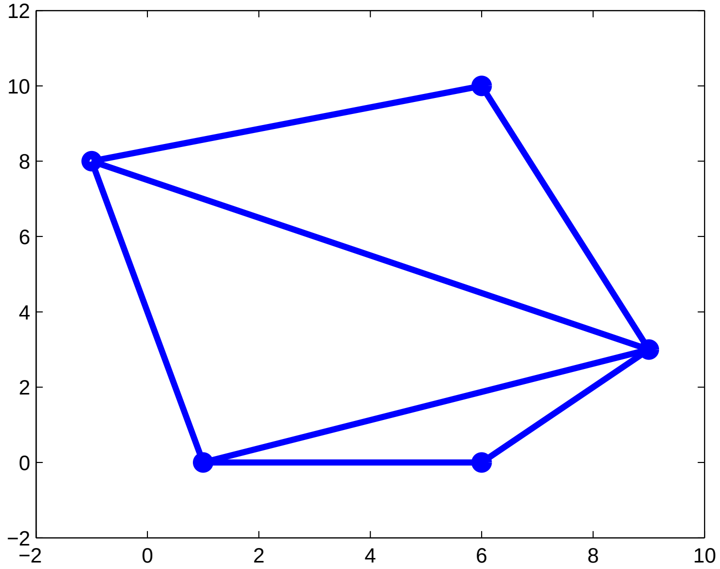
Starre staafconstructies

(infinitesimaal) star $\iff$
$\forall$ beweging: $C_1 = \ldots = C_e = C$
$\Rightarrow$ minimaal aantal staven: $e = 2v - 3$

slechte spreiding:



goede spreiding:

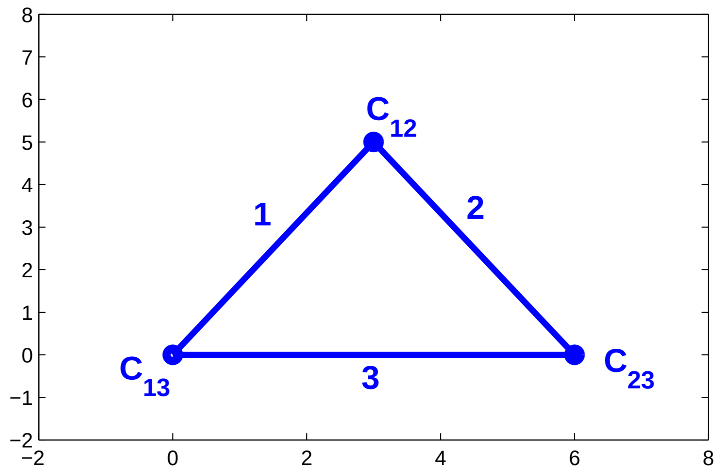


Laman-criterium: voor ieder deel: $e' \leq 2v' - 3$

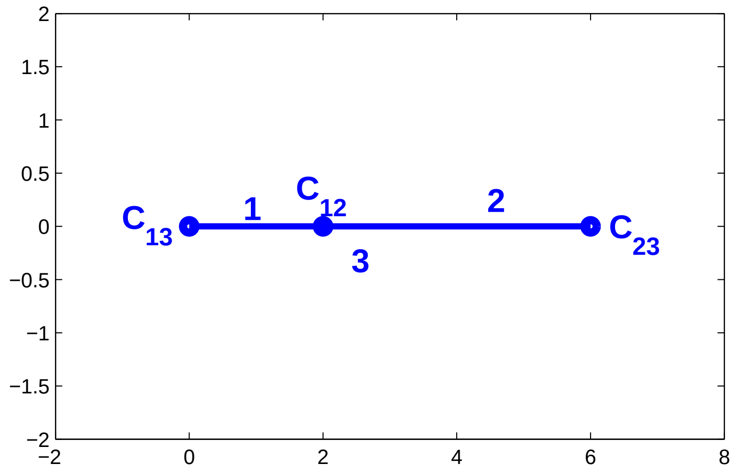
Driehoek-constructie

Infinitesimale deformatie: C_1, C_2, C_3 met
$C_{12} \neq 0$, $C_{13} \neq 0$, $C_{23} \neq 0$
A.K. $\Rightarrow$ hoekpunten collineair

starre driehoek:



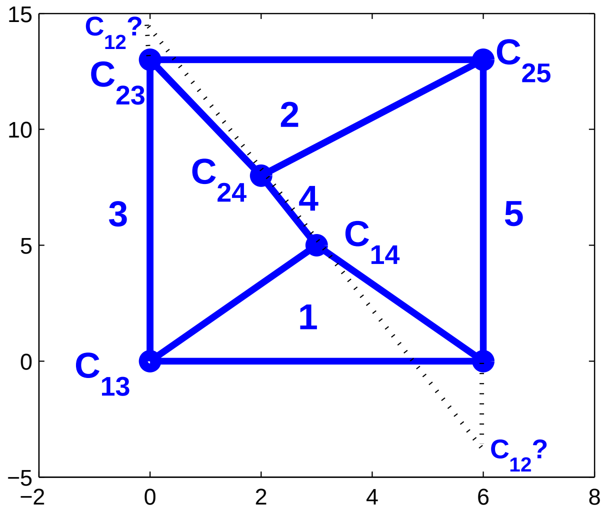
infinitesimaal vervormbaar:



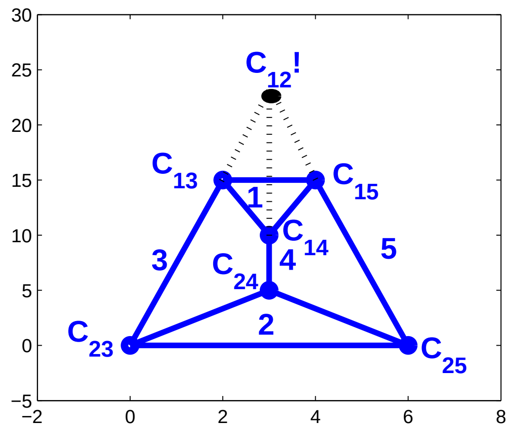
Prisma-constructie

C_1 en C_2: centra voor driehoeken
C_3, C_4, C_5: centra voor verbindingen
Infinitesimale deformatie: $C_{12} \neq 0$
A.K. $\Rightarrow$ verbindingslijnen concurrent

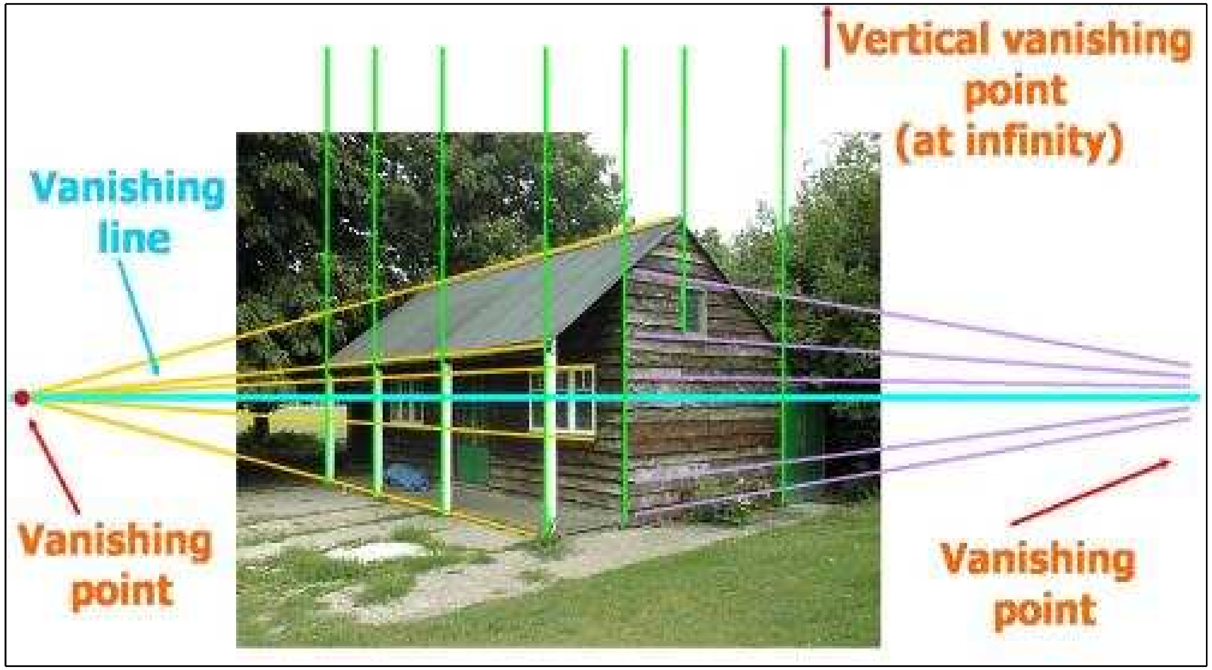
starre constructie:



infinitesimaal vervormbaar:



De projectieve ruimte



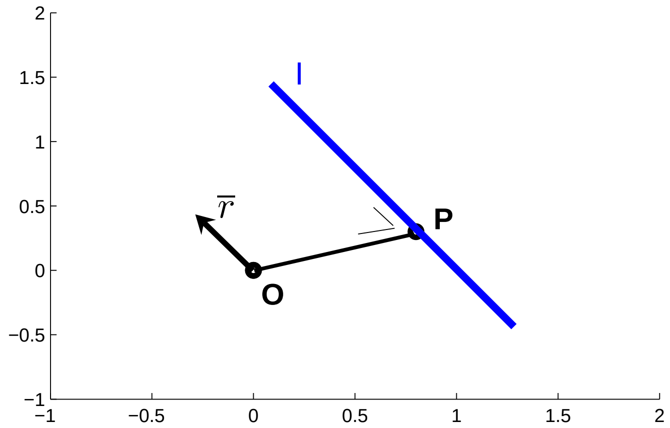
projectieve punt: $(x : y : z : w)$

projectieve vlak: $ax + by + cz + dw = 0$ of $(a : b : c : d)$

π_∞: vlak op ∞: $w = 0$ of $(0 : 0 : 0 : 1)$

lijncoördinaten in 3D

Rechte l in 3D: bepaald door
richting $\overline{r} \parallel l$
en een punt $P \in l$
moment van l (rond o):
$\overline{m} = P \times \overline{r}$



homogene coördinaten voor l:
$(\overline{r}, \overline{m}) = (r_1 : r_2 : r_3 : m_1 : m_2 : m_3)$

gestandaardiseerd: $||\overline{r}|| = 1$ (2 oriëntaties mogelijk)

$\boxed{\text{Grassmann-Plücker-relatie: } \overline{r} \cdot \overline{m} = 0}$

Uitwendige product in $\mathbb{R}^4$

$A(a_1, a_2, a_3, a_4)$ en $B(b_1, b_2, b_3, b_4)$: gegeven 4-vectoren
$\Rightarrow A \wedge B = (l_{41}, l_{42}, l_{43}, l_{23}, l_{31}, l_{12})$
met $l_{ij} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}$

Merk op:
Indien we A en B opvatten als homogene coördinaten:
$A \neq B$ in $I\!P^3$:
$A \wedge B \to$ lijncoördinaten voor $l = AB$

Eigenschappen

- $\wedge$ opnieuw anti-symmetrisch en bilineair
- $A \sim B \Rightarrow A \wedge B = 0$
- $a_4 = b_4 = 0 \Rightarrow A \wedge B = (0, 0, 0, *, *, *)$ (rechte op ∞)
- rechte door de oorsprong: $(*, *, *, 0, 0, 0)$

Nog meer $\wedge$

- $A \wedge B \wedge C = (\alpha_{234}, -\alpha_{134}, \alpha_{124}, -\alpha_{123})$ met

$$\alpha_{ijk} = \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_k & b_k & c_k \end{vmatrix}$$

- A, B, C collineair $\Rightarrow A \wedge B \wedge C = 0$
- A, B, C niet collineair $\Rightarrow A \wedge B \wedge C$ geeft coördinaten voor $\alpha = ABC$

punt $\wedge$ rechte

punt $A \in I\!P^3 \mapsto (A_1, A_2, A_3, A_4) \in \mathbb{R}^4$
rechte $l \subset I\!P^3 \mapsto (l_{41}, \ldots, l_{12}) \in \mathbb{R}^6$

$\Rightarrow A \wedge l = l \wedge A = (\alpha_{234}, -\alpha_{134}, \alpha_{124}, -\alpha_{123})$
met

$$\begin{aligned}
\alpha_{234} &= -A_2 l_{43} + A_3 l_{42} + A_4 l_{23} \\
\alpha_{134} &= -A_1 l_{43} + A_3 l_{41} - A_4 l_{31} \\
\alpha_{124} &= -A_1 l_{42} + A_2 l_{42} + A_4 l_{12} \\
\alpha_{123} &= A_1 l_{23} + A_2 l_{31} + A_3 l_{12}
\end{aligned}$$

Eigenschap:

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C) = A \wedge B \wedge C$$

Sommen van rechten in 3D

Stel K en L twee 6-vectoren van homogene coördinaten voor de rechten k en l in $I\!P^3$ (GP geldt!)

twee gevallen:

- k en l coplanair $\Rightarrow K + L$ voldoet aan GP (rechte in hetzelfde vlak)
- k en l niet coplanair $\Rightarrow K + L$ voldoet niet aan GP

Gevolg: $k_1, k_2, k_3, \ldots$ door punt $P \Rightarrow K_1 + K_2 + K_3 + \ldots$ voldoet aan GP (rechte door P).

Theorema van Poinsot

Stel: K een 6-vector die niet aan GP voldoet
$\Rightarrow$ we kunnen K steeds "ontbinden" als

$$K = A + B$$

waar A voldoet aan GP ($\rightarrow$ centrale as a)
en $B = (0, 0, 0, *, *, *)$ overeenkomt met de rechte op ∞ van vlakken $\perp a$.

Kinematica in 3D

- Rotatie rond georiënteerde as a met hoeksnelheid ω
  centrum: $C = \omega A$ met
  A: standaardcoördinaten voor a
  ω: radiale hoeksnelheid
  beweging in punt P: $M(P) = C \wedge P$
- Translatie met constante snelheid (v_1, v_2, v_3)
  centrum: $C = (0, 0, 0, v_1, v_2, v_3)$ (rechte op ∞)
  beweging in punt P: $M(P) = C \wedge P$

Algemene starre beweging

Ogenblikkelijke beweging voor star object B:
$\exists C : \forall P \in B : M(P) = C \wedge P$

Poinsot $\Rightarrow$ 3 soorten inf. starre bewegingen:

rotatie, translatie en schroefbeweging

Samenstelling van bewegingen

$$\begin{aligned} M_1(P) + M_2(P) + \ldots &= C_1 \wedge P + C_2 \wedge P + \ldots \\ &= (C_1 + C_2 + \ldots) \wedge P \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ resulterend centrum: $C = C_1 + C_2 + \ldots$

Voorbeeld: chinese slang:

verticale rotatieassen $\Rightarrow$ kop blijft horizontaal

Industriële robots

= kinematische keten met draai- en/of schuifscharnieren

aandrijving scharnieren $\rightarrow$ beweging grijper (of $\ldots$):

$$\omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \ldots = C$$

(A_i: scharniercoördinaten; C: centrum voor grijper)

Merk op:

- Er zijn minstens 6 scharnieren nodig om alle bewegingen voor de grijper te genereren.
- singulariteit: positie waarin de (6) scharniercoördinaten lineair afhankelijk worden.

Voorbeelden