Puntmassa m in vlak onder (centrale) aantrekkingskr

$$\mathbf{F} = -\frac{km}{r^2}\,\mathbf{e}_r. \tag{1}$$

Hier is Cirkelbaan

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{T}t \\ \sin\frac{2\pi}{T}t \end{pmatrix}.$$

Snelheid cirkelbaan

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} -\frac{2\pi}{T}\sin\frac{2\pi}{T}t \\ \frac{2\pi}{T}\cos\frac{2\pi}{T}t \end{pmatrix}.$$

Versnelling cirkelbaan (= centripetaal)

$$\mathbf{a}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cos\frac{2\pi}{T}t \\ -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\sin\frac{2\pi}{T}t \end{pmatrix} = -R\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \tag{2}$$

Newton II

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a} \tag{3}$$

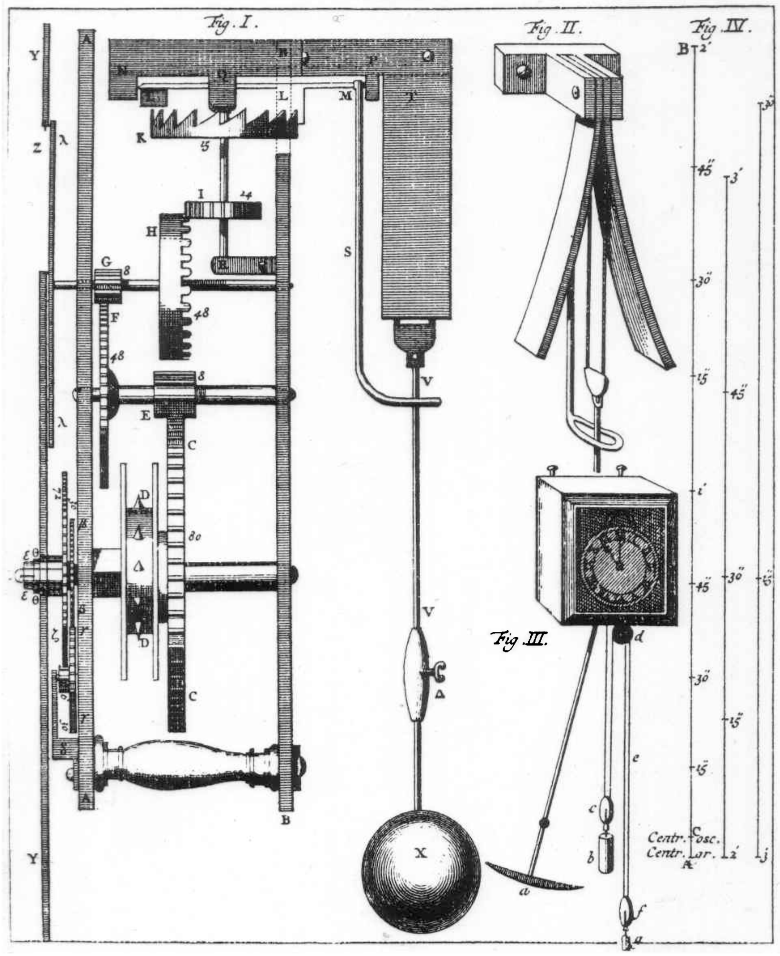
Vergelijkingen (1), (2) en (3) geven Kepler III:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k}R^3$$

De cycloïde als isochrone en brachystochrone kromme

NWD 2007

[Fig. 17.]



Henk Broer
Wiskunde & Informatica
Rijksuniversiteit Groningen

Email: `broer@math.rug.nl`
URL: `http:\\math.rug.nl\~broer`

1. Huygens' isochrone kromme

Wetten Hooke en Newton $\Rightarrow$
Bewegingsvergelijking VEER

$$mx'' = -kx$$

Notatie:

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}, x''(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Noem $\omega = \sqrt{k/m}$

Algemene oplossing

$$x(t) = R\cos(\omega t + \phi)$$

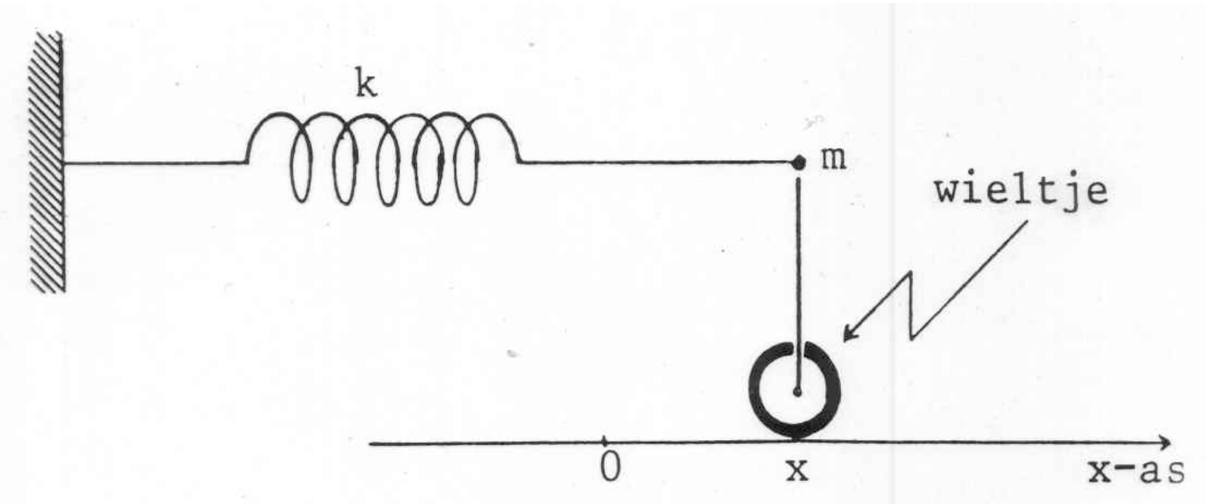
Integratie-constanten $\leftrightarrow$ beginwaarden:

$$x(0) = R\cos\phi \quad \text{en} \quad x'(0) = -\omega R\sin\phi$$

Periode

$$P = \frac{2\pi}{\omega}$$

P onafhankelijk van R: ISOCHRONIE


k
m
wieltje
0
x
x-as

Commentaar

1. Potentiële energie: $V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$:
$$x'' = -\omega^2 x = -\frac{dV}{dx}(x)$$
HARMONISCHE OSCILLATOR

2. Slinger
$$x'' = -\omega^2 \sin x, \ \omega = \sqrt{g/\ell}$$
an-isochroon: periode naar ∞ voor $x \to \pi$
Probleem bij lengte-bepaling op zee

3. 'Kleine oscillaties' bijna isochroon wegens $\sin x \approx x$ als $|x|$ klein (Galileo)

4. Gestalt-switch: kraal langs draadprofiel (wrijvingsloos)
in verticaal vlak o.i.v. zwaartekracht

Slinger $\longleftrightarrow$ cirkel

Welk draadprofiel geeft zo
harmonische oscillaties (dus isochronie)?

Cycloïde en booglengte

Rol wiel (straal ϱ) langs plafond $\longrightarrow$

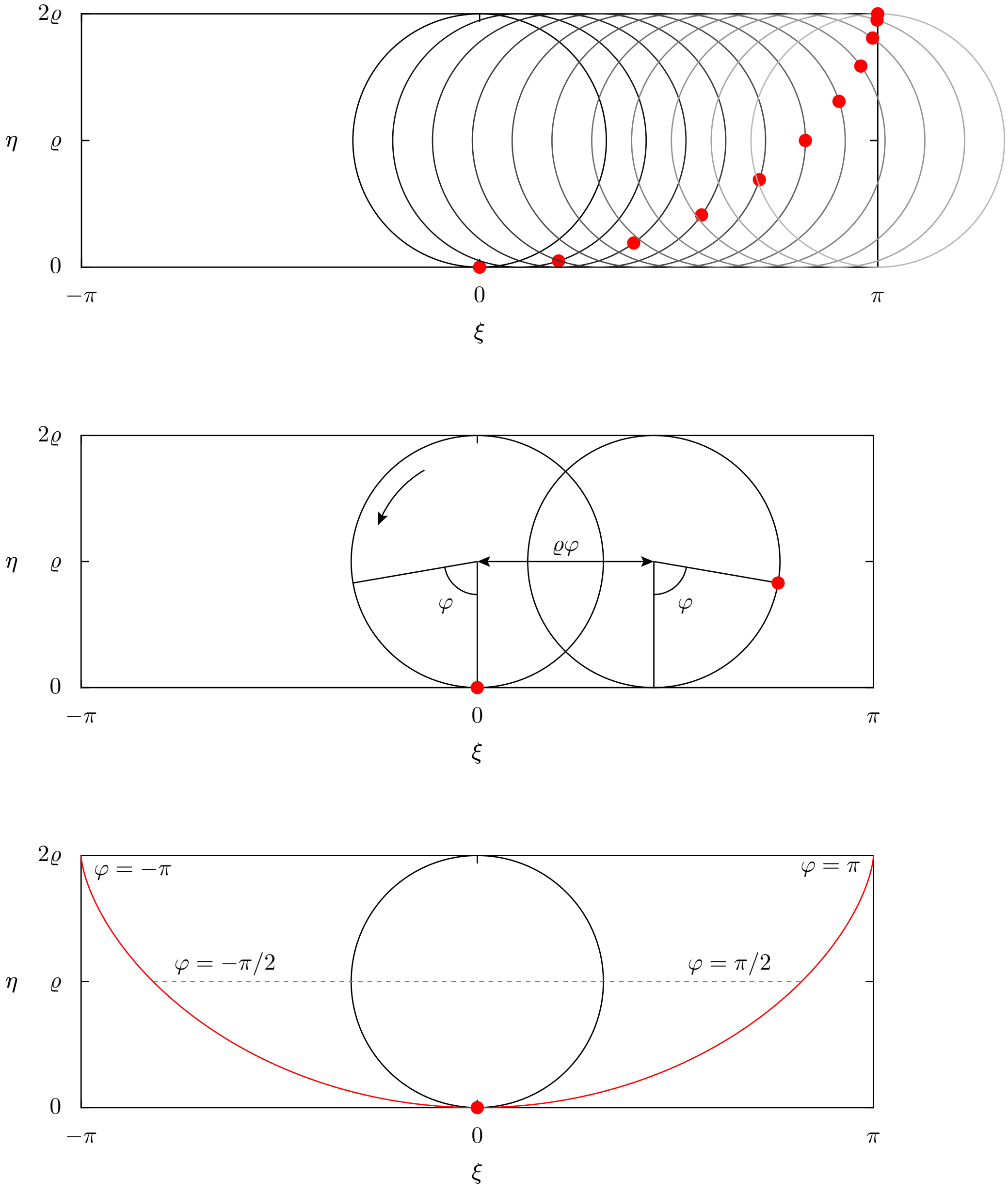
$$\xi(\varphi) = \varrho(\varphi + \sin\varphi), \eta(\varphi) = \varrho(1 - \cos\varphi)$$

Parameter φ heet ROLHOEK

Booglengte $x = x(\varphi)$ (met Pythagoras):

$$\begin{aligned} dx &= \sqrt{(d\xi/d\varphi)^2 + (d\eta/d\varphi)^2}\; d\varphi = \\ &= \varrho\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\varphi}\; d\varphi = 2\varrho\cos\frac{\varphi}{2}\; d\varphi \end{aligned}$$

$\leadsto$ rectificatie: $x(\varphi) = 4\varrho\sin\frac{\varphi}{2}$



2ϱ
η
ϱ
0
$-\pi$
0
π
ξ
2ϱ
η
ϱ
0
$\varrho\varphi$
φ
φ
$-\pi$
0
π
ξ
2ϱ
$\varphi = -\pi$
$\varphi = \pi$
$\varphi = -\pi/2$
$\varphi = \pi/2$
η
ϱ
0
$-\pi$
0
π
ξ

Cycloïdaal draadprofiel

Verticale hoogte

$$\eta(\varphi) = 2\varrho \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{8\varrho}(x(\varphi))^2 \rightsquigarrow$$

potentiële energie "$V = mg\eta$" :

$$V(x) = \frac{mg}{8\varrho}x^2$$

$\longrightarrow$ bewegingsvergelijking kraal

$$x'' = -\frac{g}{4\varrho}x$$

$\rightsquigarrow$ harmonische oscillator met $\omega = \sqrt{g/(4\varrho)}$ ('klopt' met $\ell = 4\varrho$)

Conclusie: cycloïde isochroon

2. Evoluut en evolvent

Christiaan Huygens (1629 − 1695)
1673: HOROLOGIUM OSCILLATORIUM

Lengte-bepaling op zee:
Lengteverschil $\sim$ tijdsverschil ($360 = 15 \times 24$)
'Gewone' slinger problematisch:
slingertijd neemt toe met amplitudo

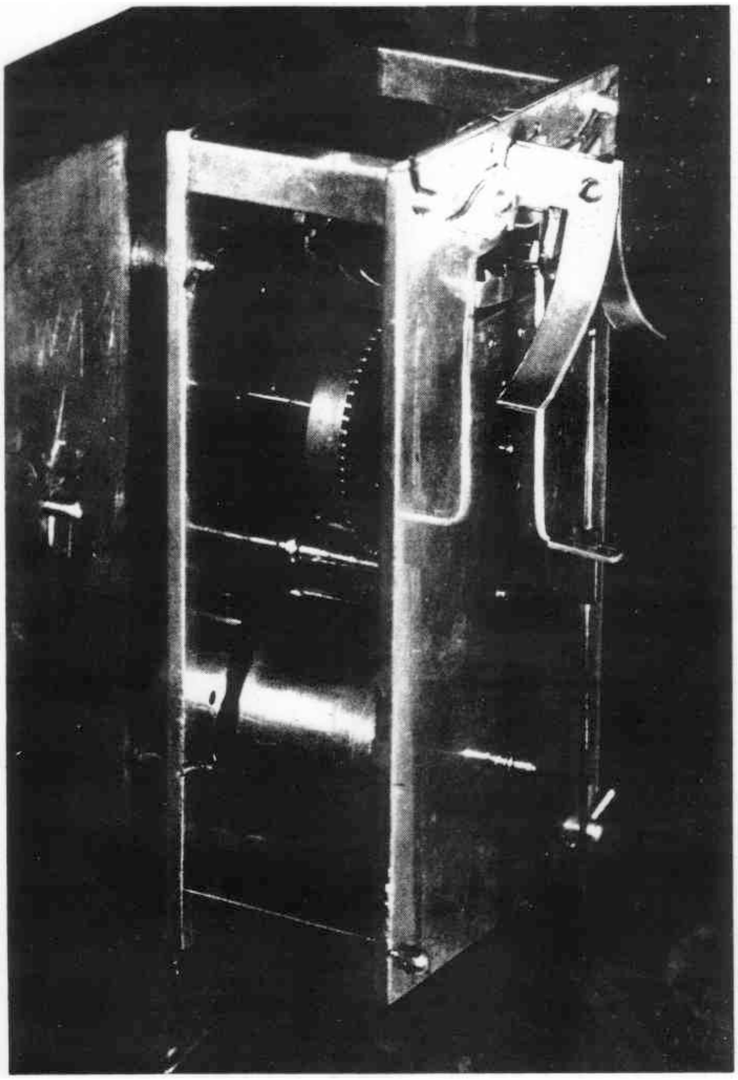
Bestaat aangepaste, isochrone, slinger?
Idee: 'wangen' verkorten lengte (slingertijd)
bij grotere amplitudo

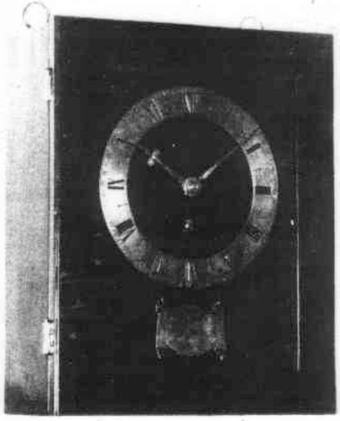
Vraag: Wat is preciese VORM 'wangen'?
(Boerhaave, Teylers, Hofwijck)

Afgeleide problemen:

- Slingertijd als functie amplitudo
  (elliptische integralen)

- Meetkundige eigenschappen van cycloïde
  en diens evoluut





4. Salomon Coster
Den Haag, 1657-59

De vrijwel identieke uurwerken van de klokken nrs. 2, 3 en 4 bevatten uitsluitend een gaand werk dat ca. 30 uur loopt. De slinger is opgehangen aan een draadje tussen twee gebogen plaatjes die bevorderen dat verschillen in de veerkracht zo weinig mogelijk invloed hebben op de duur van de slinger-beweging. Deze "cycloïdale boogjes" vinden we terug in alle vroege Nederlandse en Franse slingeruurwerken van deze tentoonstelling.

Twee Cycloïden

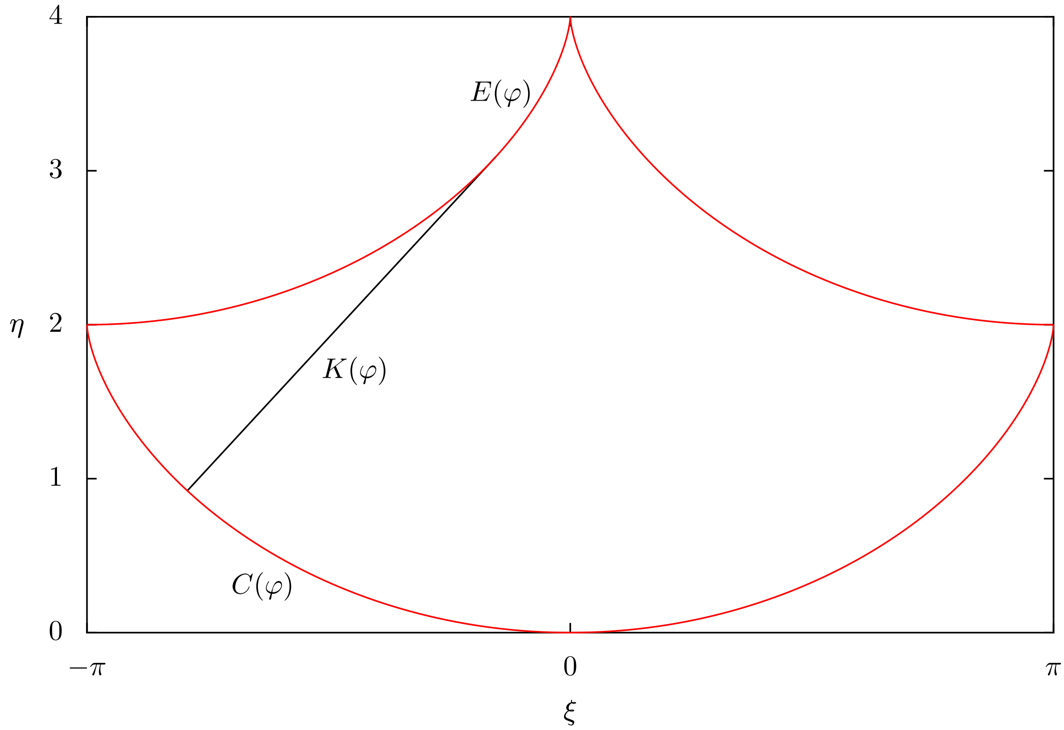
"Kraal langs profiel" niet erg praktisch!
Hoe terug naar slingers?
Antwoord: Afwikkelen langs EVOLUUT

Cycloïde $C = C(\varphi)$ (z.d.a.t.s. $\rho = 1$):
$\xi_C(\varphi) = \varphi + \sin\varphi$
$\eta_C(\varphi) = 1 - \cos\varphi$

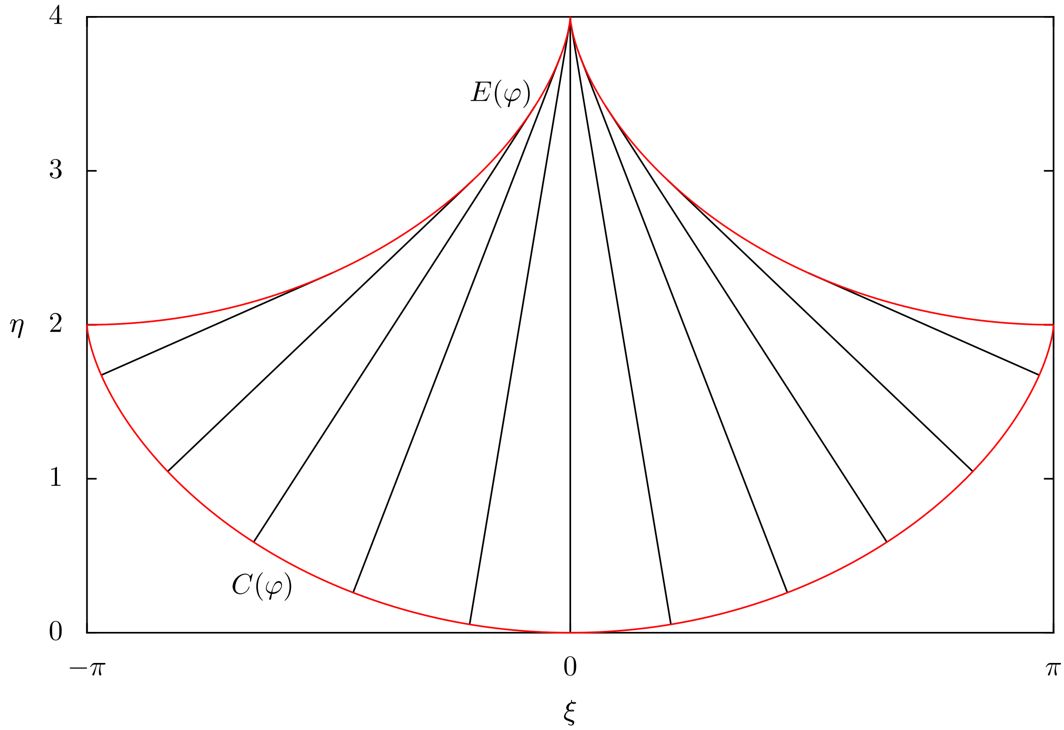
Beschouw ook $E = E(\varphi)$:
$\xi_E(\varphi) = \xi_C(\varphi + \pi) = \varphi - \sin\varphi$
$\eta_E(\varphi) = 2 + \eta_C(\varphi + \pi) = 3 + \cos\varphi$

$\Rightarrow$ E en C congruente cycloïden
Neem parameter–domein $|\varphi| \le \pi$

$K(\varphi) :=$ koorde tussen $C(\varphi)$ en $E(\varphi)$
lengte $k(\varphi) := |K(\varphi)|$
$b(\varphi) :=$ booglengte tussen $E(\phi)$
en meest nabije uiteinde E



4
3
2
1
0
η
$E(\varphi)$
$K(\varphi)$
$C(\varphi)$
$-\pi$
0
π
ξ

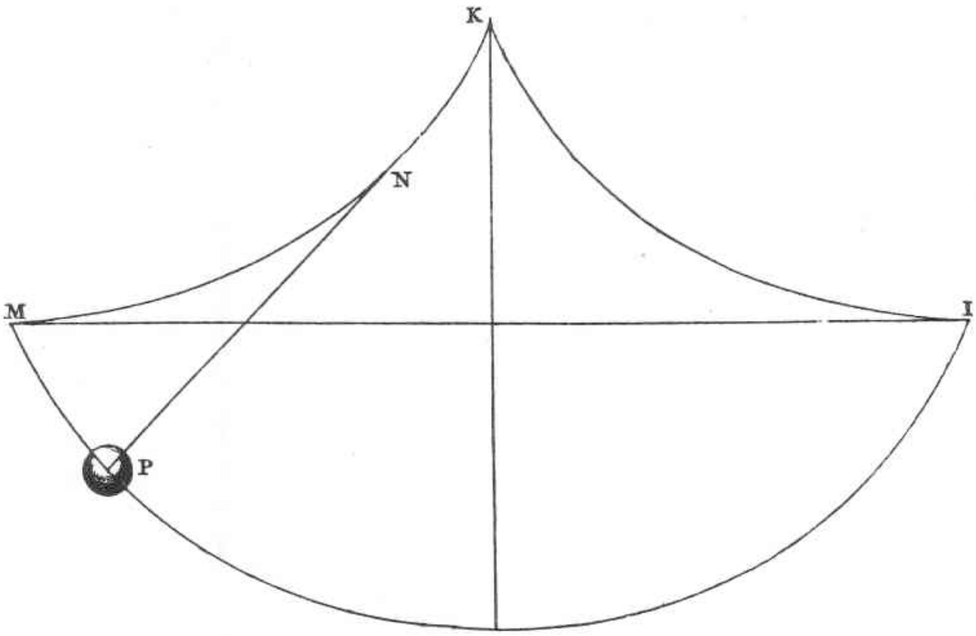


4
3
2
1
0
η
$E(\varphi)$
$C(\varphi)$
$-\pi$
0
π
ξ

ſit ferrea cuſpis DI, pauxillum ultra baſin inferiorem prominens, atque ita ut circumferentiæ ejus exacte reſpondeat. DESCRIPTIO HOROLOGII.

His ita ſe habentibus, ſi cylindrus ſecundum regulam AB volvatur, bracteolæ tantum FG craſſitudine intercedente, eâque ſemper quantum poteſt extenſâ, deſcribet cuſpis I in ſubjecto tabulæ plano lineam curvam KI, quæ Cyclois vocatur. Circulus vero genitor erit CDE, cylindri adhibiti baſis. Quod ſi jam laminam KL ad regulam AB applicuerimus; exaratâ primum in ea cycloidis portione KI, invertemus deinde (*p.* 11).

[Fig. 19.]



ipſam, & in ſuperficie adverſa ſimilem lineam KM, ab eodem puncto K egredientem, incidemus. Tum figuram MKI, accurate ſecundum lineas iſtas, efformabimus, cui figuræ lamellarum interſtitium aptari oportet, inter quas perpendiculum ſuſpenditur [1]). Sufficiunt autem ad horologiorum uſum portiones exiguæ arcuum KM, KI; reliquo flexu inutili futuro, ad quem perpendiculi filum accedere non poteſt.

Verum, ut mirabilis lineæ natura atque effectus plenius intelligantur, integras ſemicycloides KM, KI, alio ſchemate [Fig. 19] hic exprimere viſum fuit, inter quas ſuſpenſum agitatumque Pendulum KNP, diametri circuli genitoris duplum, cujuscunque amplitudinis oſcillationes, usque ad maximam omnium per arcum MPI, iisdem temporibus confecturum ſit: atque ita, ut appenſæ ſphæræ P centrum, in linea MPI, quæ & ipſa cyclois integra eſt, ſemper verſetur. Quæ proprietas inſignis, neſcio an alii præter hanc lineæ data ſit, ut nempe ſe ipſam ſui evolutione deſcribat [2]). Hæc autem

14

Wat heet afwikkelen?

Lemma: *$K(\varphi)$ raakt aan E en staat loodrecht op C* (raaklijnen)

$\Leftrightarrow$ E is EVOLUUT van C, d.w.z.:

1. E is omhullende normalen-bundel van C (denk aan caustiek)

2. $k(\varphi)$ kromtestraal van C in $C(\varphi)$
   $k(\varphi) = b(\varphi)$
   Instantane rotatie: $K \perp C$

VERWEZENLIJKING Huygens:

- Ophangpunt slingertouw = 'cusp' E

- Touw wikkelt af langs cycloïdale 'wangen' E en laat los volgens de raaklijn K
  $\Rightarrow$ slinger-massa volgt C

  Klopt met $\ell = 2\varrho$!
  $K \perp C \Rightarrow$ kraal-dynamica

Bewijzen – Berekeningen

$K(\varphi)//E'(\varphi)$ & $K(\varphi)\perp C(\varphi)$

Bewijs: Enerzijds

$$K(\varphi) = C(\varphi) - E(\varphi) = \begin{pmatrix} 2\sin\varphi \\ -2-2\cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2\sin\frac{\varphi}{2}\ \cos\frac{\varphi}{2} \\ -2\cos^2\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} \sin\frac{\varphi}{2} \\ -\cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix},$$

anderzijds

$$E'(\varphi) = \begin{pmatrix} 1-\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2\sin^2\frac{\varphi}{2} \\ -2\sin\frac{\varphi}{2}\ \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} \sin\frac{\varphi}{2} \\ -\cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$$

enz. enz. enz. QED

NB: *Check dat* $k(\varphi) = b(\varphi)$:

Enerzijds $k(\varphi) = 2\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\varphi} = 4\cos\frac{\varphi}{2}$,
anderzijds: booglengte–formule $\Rightarrow$
$b(\varphi) = 4\sin\frac{\varphi+\pi}{2} = 4\sin(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{2}) = 4\cos\frac{\varphi}{2}$

3. Bernoulli's verrassing

Johann Bernoulli (1667 – 1748)
(Groningen 1695 – 1705)
Brachystochroon probleem:

GEGEVEN: Twee punten P en Q in verticaal vlak onderhevig aan zwaartekracht

GEVRAAGD: Draadprofiel waarlangs wrijvingsloze kraal in kortst mogelijke tijd van P naar Q glijdt

OPTISCHE metafoor: kraal volgt lichtstraal door optisch medium met geschikt gekozen voortplantingssnelheid $v = v(h)$

Lichtstraal volgens Principe Fermat &
Voortplantingsnelheid volgens Energiebehoud:

$$v(h) = \sqrt{V^2 + 2gh} \qquad (4)$$

Discretisering

Horizontale lagen $1, 2, \ldots, N$ van gelijke dikte en constante voortplantingssnelheid v_j, $1 \leq j \leq N$

Lichtstraal gebroken rechte lijn, breking volgens Snellius

Limiet $N \to \infty$ geeft cycloïde: rolhoek φ is dubbele van de hoek met de verticaal

Dat alles gaan we hieronder bewijzen

Fermat impliceert Snellius

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716)
1684: NOVA METHODUS ...
(in tijdschrift "Acta Eruditorum")

Breking tussen twee media:
$n_j = 1/v_j, j = 1, 2$ brekingsindices

Wet van Snellius:

$$n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2$$

Bewijs: Varieer willekeurige weg $P \to R \to Q$ tot $P \to R' \to Q$ met $R' - R = \delta$ "klein"

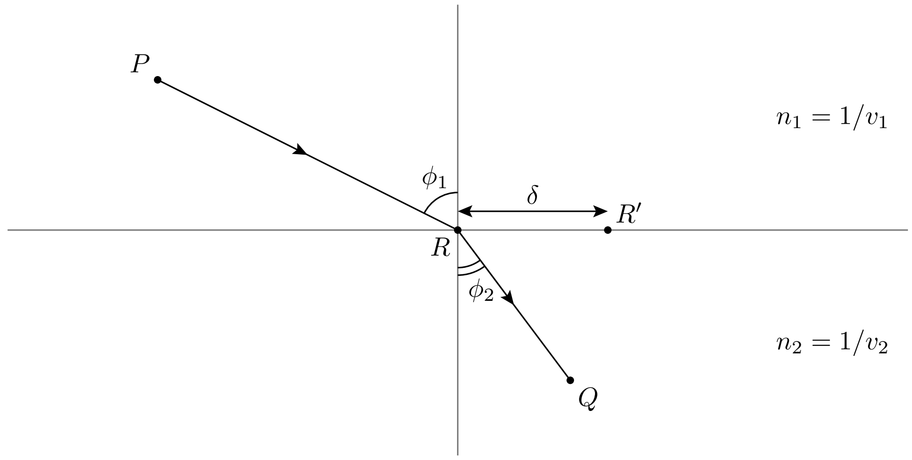
Tijdsverschil:

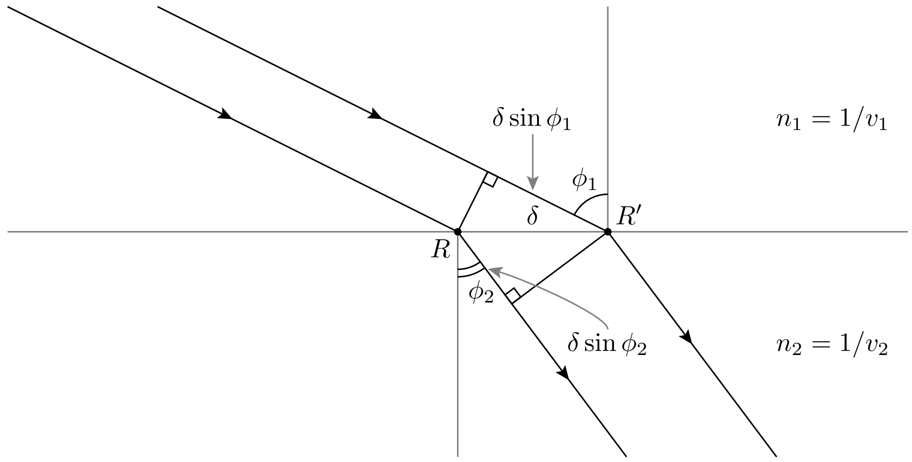
$$\delta n_1 \sin \varphi_1 - \delta n_2 \sin \varphi_2 + O(\delta^2)$$

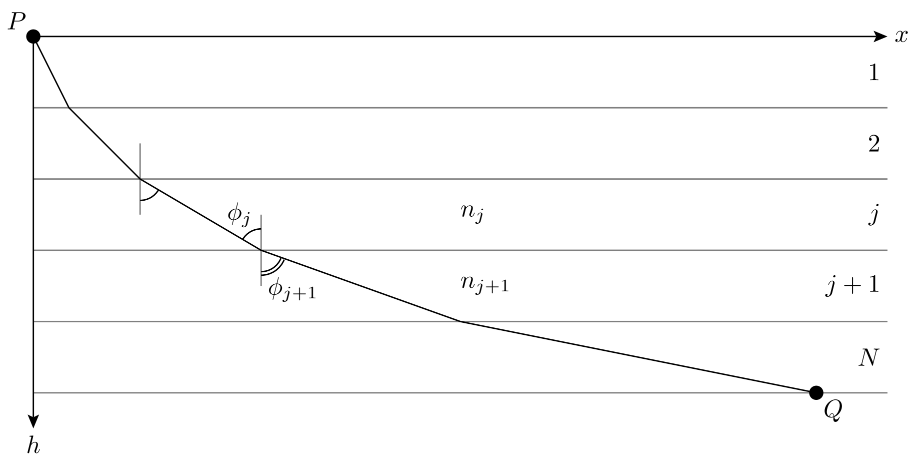
Optimale keus voor $R \Rightarrow n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2$

(anders geeft andere keus R korter durende weg) QED

Zie opgave voor een ander bewijs


P
$n_1 = 1/v_1$
ϕ_1
δ
R'
R
ϕ_2
$n_2 = 1/v_2$
Q


$\delta \sin \phi_1$
$n_1 = 1/v_1$
ϕ_1
δ
R'
R
ϕ_2
$\delta \sin \phi_2$
$n_2 = 1/v_2$


P
x
1
2
ϕ_j
n_j
j
ϕ_{j+1}
n_{j+1}
$j+1$
N
Q
h

Afleiding cycloïde I

Alternatieve formulering Snellius

$$\frac{\sin \varphi_j}{v_j} = \frac{\sin \varphi_{j+1}}{v_{j+1}},$$

$j = 1, 2, \ldots, N$

Nadert voor $N \to \infty$ tot

$$\frac{\sin \varphi}{v} = C \tag{5}$$

Uit "behoudswetten" (4) en (5) volgt de gezochte geparametriseerde kromme

$$(x(\varphi), h(\varphi))$$

via

Lemma

$$\begin{aligned} v' &= \frac{g}{v} \\ \cos \varphi &= C v' \frac{dh}{d\varphi}, \end{aligned}$$

waarbij $v' = dv/dh$

Bewijs: Differentieer (4) $\Leftrightarrow v^2 = V^2 + 2gh$ naar h en (5) $\Leftrightarrow \sin \varphi = Cv$ naar φ QED

Afleiding cycloïde II

En zo:

$$\frac{dh}{d\varphi} \overset{\text{lemma}}{=} \frac{1}{Cg} v \cos\varphi \overset{(5)}{=} \frac{1}{2C^2 g} \sin 2\varphi \tag{6}$$

terwijl:

$$\frac{dx}{d\varphi} = \tan\varphi \frac{dh}{d\varphi} \overset{(3)}{=} v \sin\varphi \overset{(5)}{=} \frac{1}{2C^2 g}(1 - \cos 2\varphi)$$

Integratie geeft dan:

$$h(\varphi) = h_0 - \frac{1}{4C^2 g} \cos 2\varphi$$
$$x(\varphi) = x_0 + \frac{1}{4C^2 g}(2\varphi - \sin 2\varphi) :$$

een cycloïde met rolhoek 2φ en straal $1/(4C^2 g)$

Hetgeen te bewijzen was

Commentaar

1. Prijsvraag in "Acta Eruditorum" 1695
   eerst geen inzendingen, na hernaling
   oplossingen van veel beroemde tijdgenoten

2. Newton anoniem, echter:
   "ex ungue leonem cognavi"

3. Combinatie van ISOCHRONIE
   en BRACHYSTOCHRONIE interessant
   Rol beginwaarden en constanten V, C ?

4. Tegenwoordig vraagstukje bij college
   "Variatie-rekening"

1. J.M. Aarts, *Meetkunde: facetten van de planimetrie en stereometrie*, Epsilon Uitgaven **47**, 2000

2. V.I. Arnold, *Huygens & Barrow, Newton & Hooke*, Birkhäuser 1990

3. O. Bottema, *Theoretische Mechanica*, Epsilon Uitgaven **3**, 1985

4. H.W. Broer, Huygens' isochrone slinger, *Euclides*, **70**(4) (1995), 110-117

5. H.H. Goldstine, *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*, Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences **5**, Springer-Verlag 1980

6. J.A. van Maanen, *Een Complexe Grootheid, leven en werk van Johann Bernoulli, 1667 – 1748*, Epsilon Uitgaven **34**, 1995