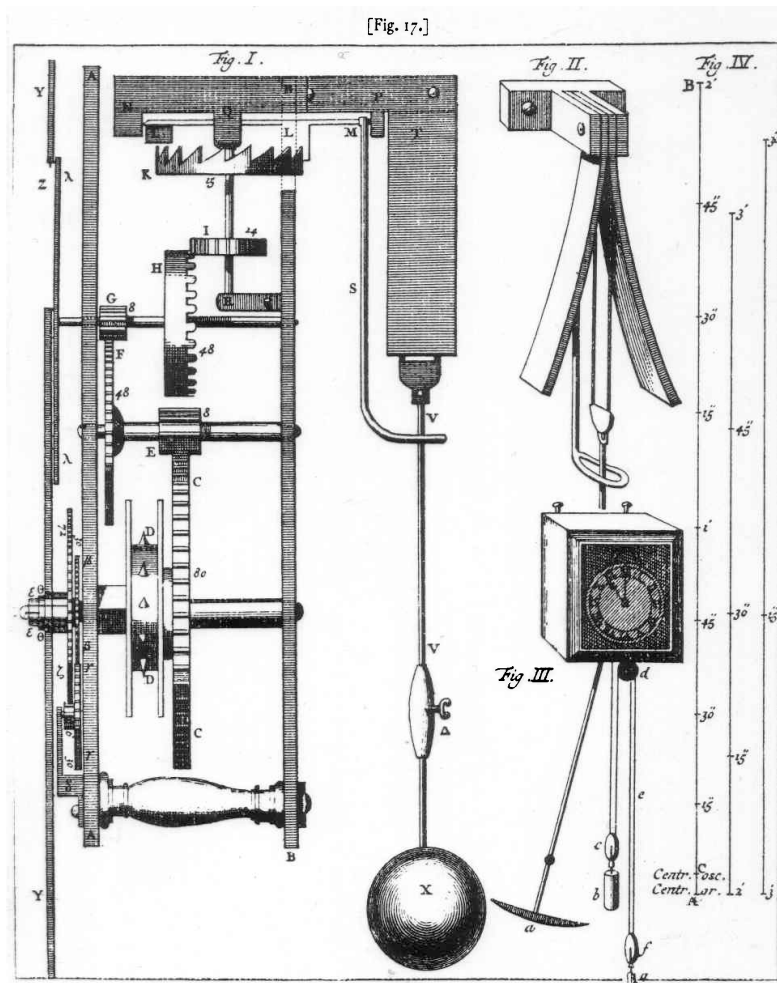


De cycloïde als isochrone en brachystochrone kromme

NWD 2007



Henk Broer
Wiskunde & Informatica
Rijksuniversiteit Groningen

Email: broer@math.rug.nl
URL: <http://math.rug.nl/~broer>

1. Huygens' isochrone kromme

Wetten Hooke en Newton \Rightarrow
Bewegingsvergelijking VEER

$$mx'' = -kx$$

Notatie:

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}, x''(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Noem $\omega = \sqrt{k/m}$

Algemene oplossing

$$x(t) = R \cos(\omega t + \phi)$$

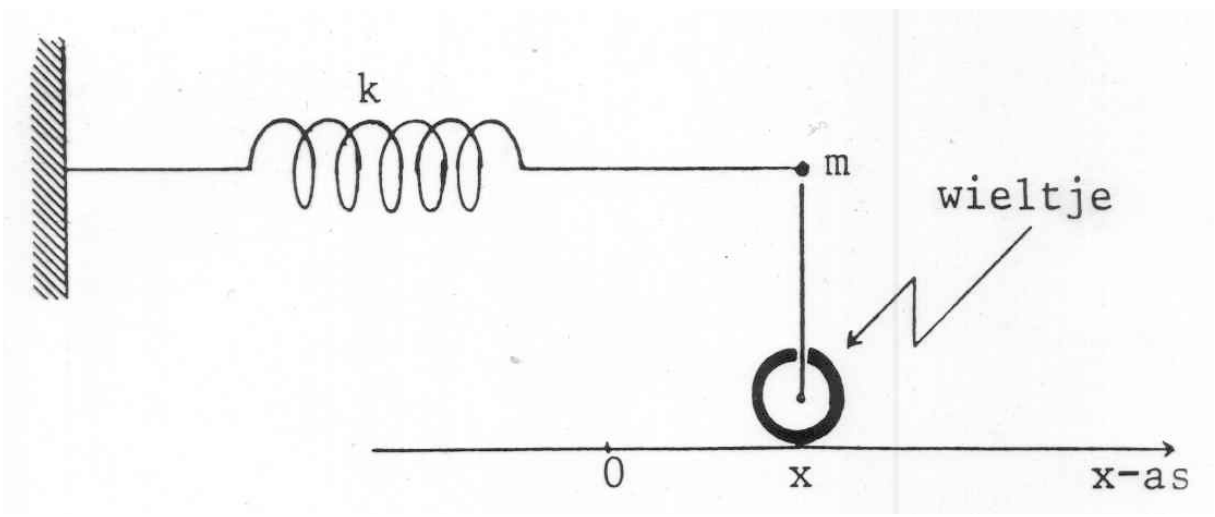
Integratie-constanten \leftrightarrow beginwaarden:

$$x(0) = R \cos \phi \quad \text{en} \quad x'(0) = -\omega R \sin \phi$$

Periode

$$P = \frac{2\pi}{\omega}$$

P onafhankelijk van R : ISOCHRONIE



Commentaar

1. Potentiële energie: $V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$:

$$x'' = -\omega^2 x = -\frac{dV}{dx}(x)$$

HARMONISCHE OSCILLATOR

2. Slinger

$$x'' = -\omega^2 \sin x, \quad \omega = \sqrt{g/\ell}$$

an-isochroon: periode naar ∞ voor $x \rightarrow \pi$
Probleem bij lengte-bepaling op zee

3. 'Kleine oscillaties' bijna isochroon wegens $\sin x \approx x$ als $|x|$ klein (Galileo)

4. Gestalt-switch: kraal langs draadprofiel (wrijvingsloos)
in verticaal vlak o.i.v. zwaartekracht

Slinger \longleftrightarrow cirkel

Welk draadprofiel geeft zo
harmonische oscillaties (dus isochronie)?

Cycloïde en booglengte

Rol wiel (straal ϱ) langs plafond \longrightarrow

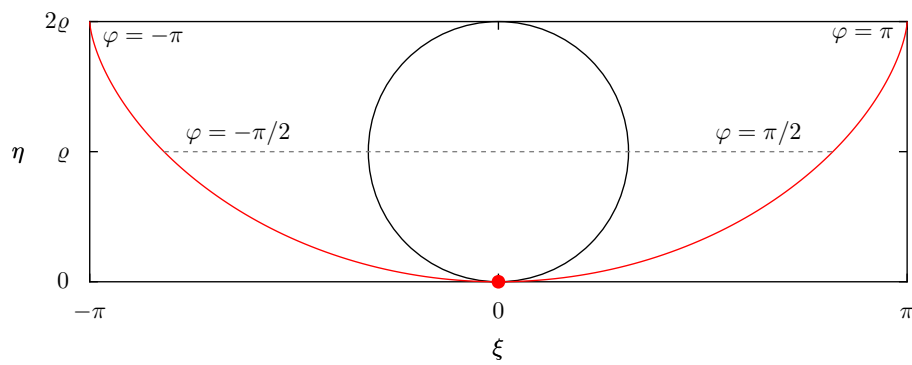
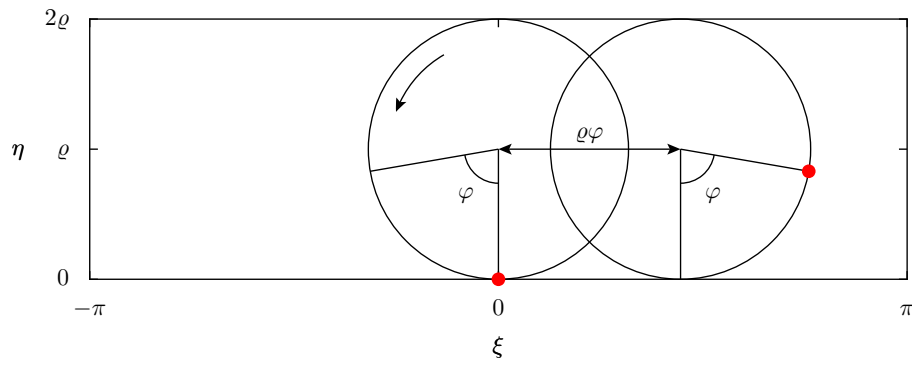
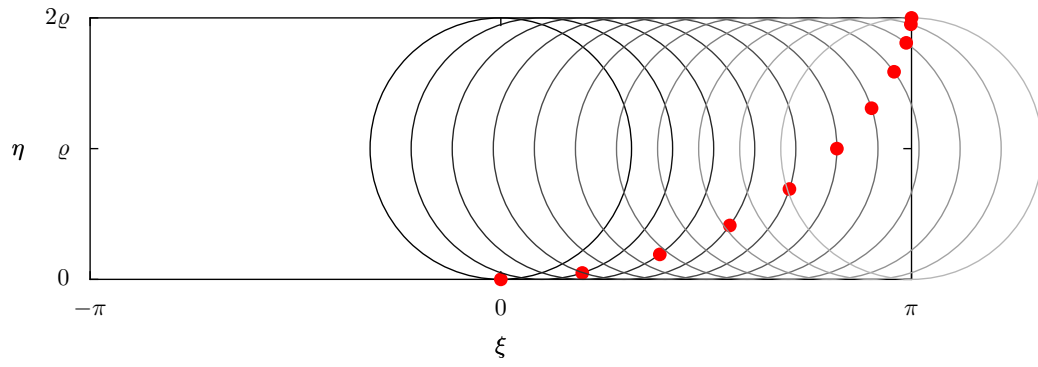
$$\xi(\varphi) = \varrho(\varphi + \sin \varphi), \eta(\varphi) = \varrho(1 - \cos \varphi)$$

Parameter φ heet ROLHOEK

Booglengte $x = x(\varphi)$ (met Pythagoras):

$$\begin{aligned} dx &= \sqrt{(d\xi/d\varphi)^2 + (d\eta/d\varphi)^2} d\varphi = \\ &= \varrho\sqrt{2}\sqrt{1 + \cos \varphi} d\varphi = 2\varrho \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi \end{aligned}$$

\leadsto rectificatie: $x(\varphi) = 4\varrho \sin \frac{\varphi}{2}$



Cycloïdaal draadprofiel

Verticale hoogte

$$\eta(\varphi) = 2\rho \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{8\rho} (x(\varphi))^2 \rightsquigarrow$$

potentiële energie " $V = mg\eta$ " :

$$V(x) = \frac{mg}{8\rho} x^2$$

→ bewegingsvergelijking kraal

$$x'' = -\frac{g}{4\rho} x$$

→ harmonische oscillator met $\omega = \sqrt{g/(4\rho)}$
(‘klopt’ met $\ell = 4\rho$)

Conclusie: cycloïde isochroon

2. Evoluut en evolvent

Christiaan Huygens (1629 – 1695)

1673: HOROLOGIUM OSCILLATORIUM

Lengte-bepaling op zee:

Lengteverschil \sim tijdsverschil ($360 = 15 \times 24$)

'Gewone' slinger problematisch:

slingertijd neemt toe met amplitudo

Bestaat aangepaste, isochrone, slinger?

Idee: 'wangen' verkorten lengte (slingertijd)

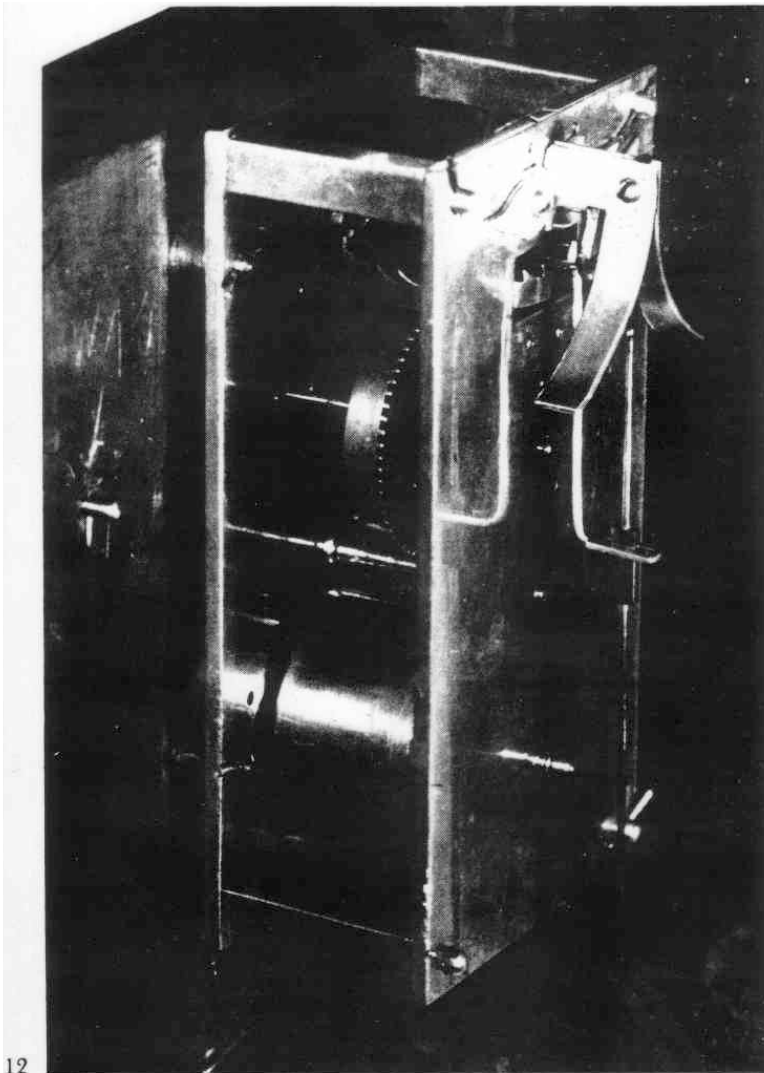
bij grotere amplitudo

Vraag: Wat is preciese VORM 'wangen'?

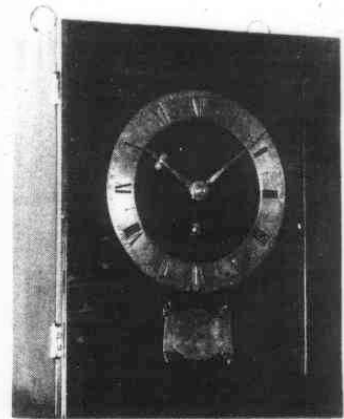
(Boerhaave, Teylers, Hofwijck)

Afgeleide problemen:

- Slingertijd als functie amplitudo
(elliptische integralen)
- Meetkundige eigenschappen van cycloïde
en diens evoluut



12



4. Salomon Coster

Den Haag, 1657-59

De vrijwel identieke uurwerken van de klokken nrs. 2, 3 en 4 bevatten uitsluitend een gaand werk dat ca. 30 uur loopt. De slinger is opgehangen aan een draadje tussen twee gebogen plaatjes die bevorderen dat verschillen in de veerkracht zo weinig mogelijk invloed hebben op de duur van de slingerbeweging. Deze "cycloïdale boogjes" vinden we terug in alle vroege Nederlandse en Franse slingeruurwerken van deze tentoonstelling.

Twee Cycloïden

"Kraal langs profiel" niet erg praktisch!

Hoe terug naar slingers?

Antwoord: Afwikkelen langs EVOLUUT

Cycloïde $C = C(\varphi)$ (z.d.a.t.s. $\rho = 1$):

$$\xi_C(\varphi) = \varphi + \sin \varphi$$

$$\eta_C(\varphi) = 1 - \cos \varphi$$

Beschouw ook $E = E(\varphi)$:

$$\xi_E(\varphi) = \xi_C(\varphi + \pi) = \varphi - \sin \varphi$$

$$\eta_E(\varphi) = 2 + \eta_C(\varphi + \pi) = 3 + \cos \varphi$$

$\Rightarrow E$ en C congruente cycloïden

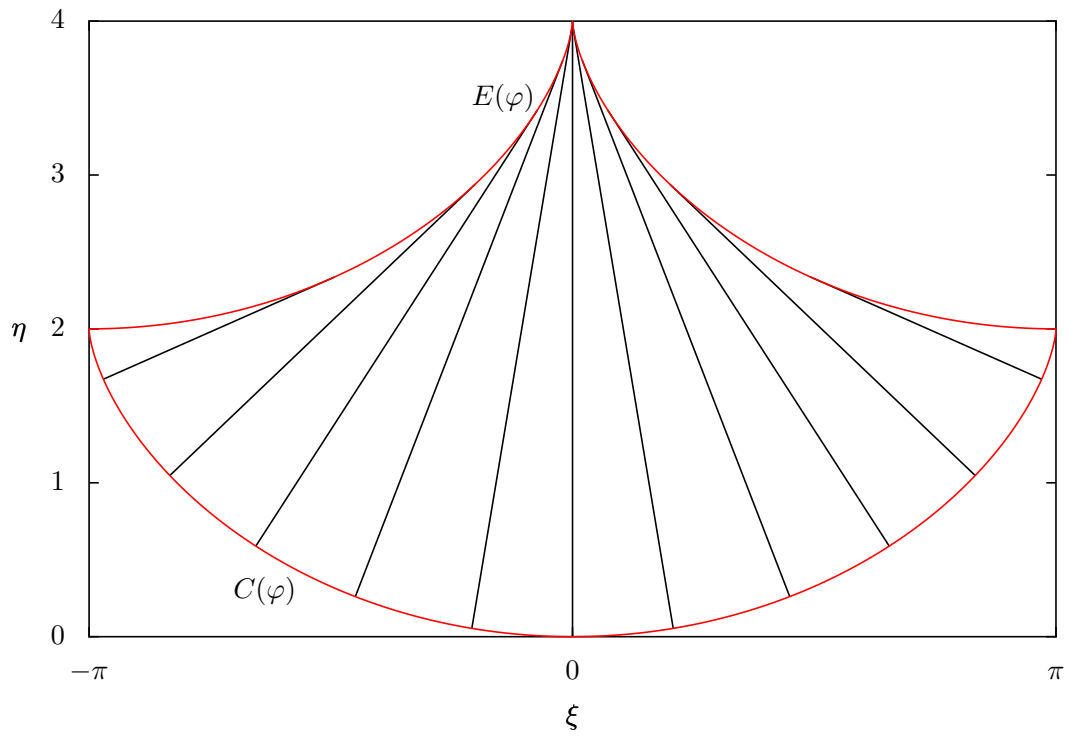
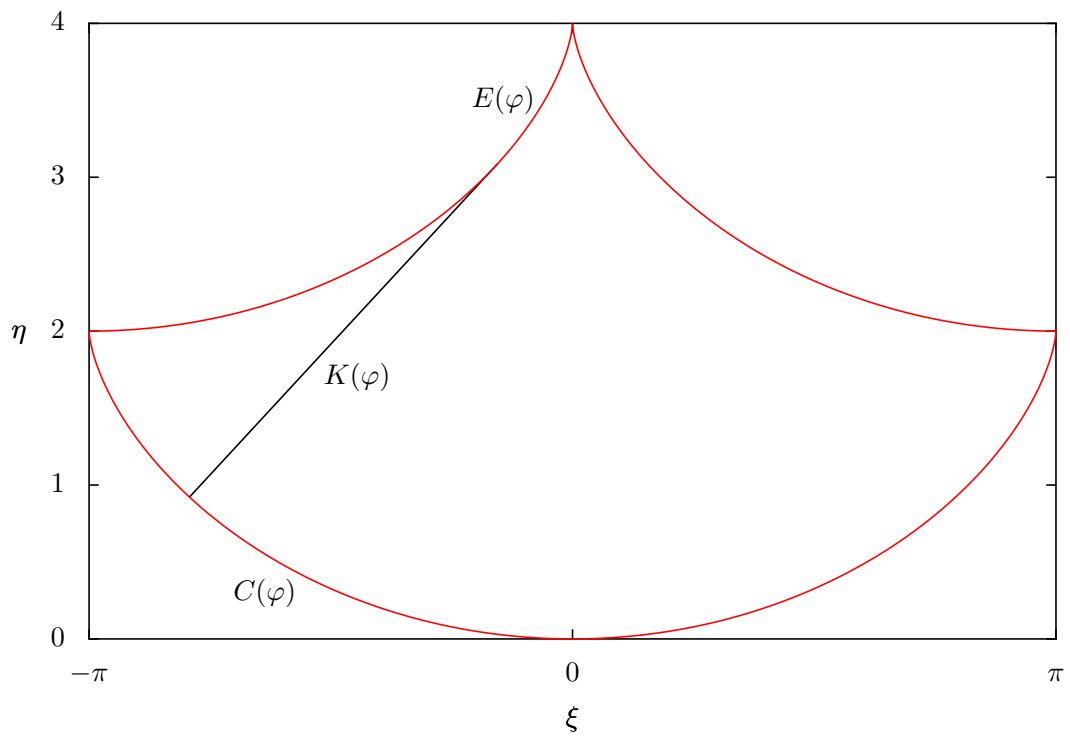
Neem parameter-domein $|\varphi| \leq \pi$

$K(\varphi) :=$ koorde tussen $C(\varphi)$ en $E(\varphi)$

lengte $k(\varphi) := |K(\varphi)|$

$b(\varphi) :=$ booglengte tussen $E(\phi)$

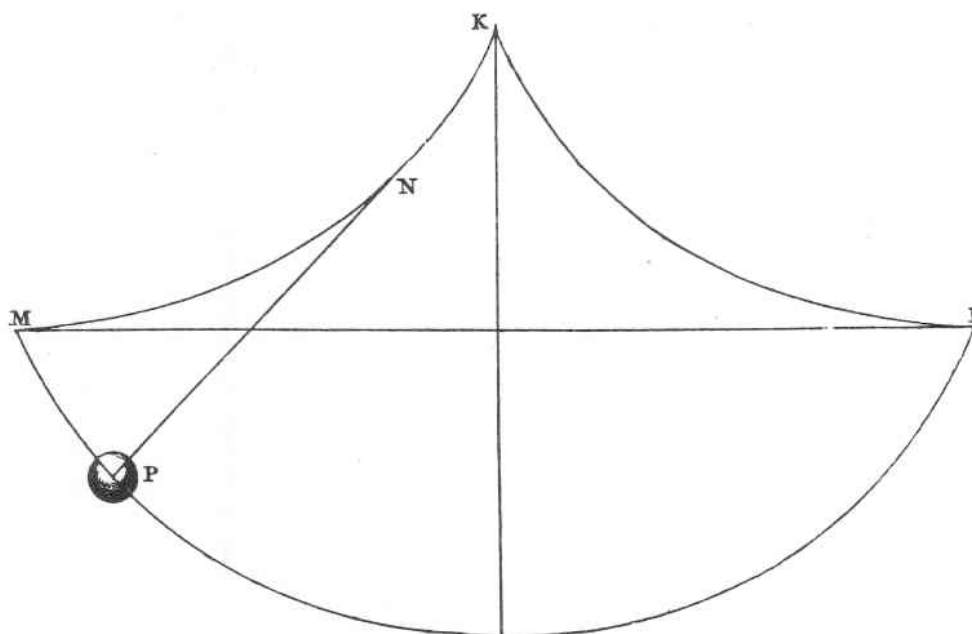
en meest nabije uiteinde E



fit ferrea cuspis DI, pauxillum ultra basin inferiorem prominens, atque ita ut circumferentia ejus exacte respondeat. DESCRPTIO
HOROLOGII.

His ita se habentibus, si cylindrus secundum regulam AB volvatur, bracteolæ tantum FG crassitudine intercedente, eaque semper quantum potest extensa, describet cuspis I in subjecto tabulæ plano lineam curvam KI, quæ Cyclois vocatur. Circulus vero genitor erit CDE, cylindri adhibiti basis. Quod si jam laminam KL ad regulam AB applicuerimus; exaratâ primum in ea cycloidis portione KI, invertemus deinde

[Fig. 19.]



ipsam, & in superficie adverfa similem lineam KM, ab eodem puncto K egredientem, incidemus. Tum figuram MKI, accurate secundum lineas istas, efformabimus, cui figuræ lamellarum interstitium aptari oportet, inter quas perpendiculum suspenditur¹). Sufficiunt autem ad horologiorum usum portiones exiguæ arcuum KM, KI; reliquo flexu inutili futuro, ad quem perpendiculi filum accedere non potest.

Verum, ut mirabilis lineæ natura atque effectus plenius intelligantur, integras semicycloides KM, KI, alio schemate [Fig. 19] hic exprimere visum fuit, inter quas suspensum agitatumque Pendulum KNP, diametri circuli genitoris duplum, cujuscunque amplitudinis oscillationes, usque ad maximam omnium per arcum MPI, iisdem temporibus confecturum sit: atque ita, ut appensa sphaeræ P centrum, in linea MPI, quæ & ipsa cyclois integra est, semper versetur. Quæ proprietas insignis, nescio an alii præter hanc lineæ data sit, ut nempe se ipsam sui evolutione describat²). Hæc autem

Wat heet afwikkelen?

Lemma: $K(\varphi)$ raakt aan E en staat loodrecht op C (raaklijnen)

$\Leftrightarrow E$ is EVOLUUT van C , d.w.z.:

1. E is omhullende normalen-bundel van C
(denk aan caustiek)
2. $k(\varphi)$ kromtestraal van C in $C(\varphi)$
 $k(\varphi) = b(\varphi)$
Instantane rotatie: $K \perp C$

VERWEZENLIJKING Huygens:

- Ophangpunt slingertouw = 'cusp' E
- Touw wikkelt af langs cycloïdale 'wangen' E en laat los volgens de raaklijn K
 \Rightarrow slinger-massa volgt C

Klopt met $\ell = 2\rho$!

$K \perp C \Rightarrow$ kraal-dynamica

Bewijzen – Berekeningen

$$K(\varphi) // E'(\varphi) \text{ \& } K(\varphi) \perp C(\varphi)$$

Bewijs: Enerzijds

$$K(\varphi) = C(\varphi) - E(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 \sin \varphi \\ -2 - 2 \cos \varphi \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \\ -2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} \sin \frac{\varphi}{2} \\ -\cos \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix},$$

anderzijds

$$E'(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 - \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \\ -2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} \sin \frac{\varphi}{2} \\ -\cos \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$$

enz. enz. enz.

QED

NB: *Check dat $k(\varphi) = b(\varphi)$:*

$$\text{Enerzijds } k(\varphi) = 2\sqrt{2}\sqrt{1 + \cos \varphi} = 4 \cos \frac{\varphi}{2},$$

anderzijds: booglengte-formule \Rightarrow

$$b(\varphi) = 4 \sin \frac{\varphi + \pi}{2} = 4 \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 4 \cos \frac{\varphi}{2}$$

3. Bernoulli's verrassing

Johann Bernoulli (1667 – 1748)

(Groningen 1695 – 1705)

Brachystochroon probleem:

GEGEVEN: Twee punten P en Q in
verticaal vlak onderhevig aan zwaartekracht

GEVRAAGD: Draadprofiel waarlangs
wrijvingsloze kraal in kortst mogelijke tijd
van P naar Q glijdt

OPTISCHE metafoor: kraal volgt lichtstraal
door optisch medium met geschikt gekozen
voortplantingsnelheid $v = v(h)$

Lichtstraal volgens Principe Fermat &
Voortplantingsnelheid volgens Energiebehoud:

$$v(h) = \sqrt{V^2 + 2gh} \quad (1)$$

Discretisering

Horizontale lagen $1, 2, \dots, N$ van gelijke dikte en constante voortplantingssnelheid v_j ,
 $1 \leq j \leq N$

Lichtstraal gebroken rechte lijn,
breking volgens Snellius

Limiet $N \rightarrow \infty$ geeft cycloïde: rolhoek φ is dubbele van de hoek met de verticaal

Dat alles gaan we hieronder bewijzen

Fermat impliceert Snellius

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716)

1684: NOVA METHODUS ...

(in tijdschrift "Acta Eruditorum")

Breking tussen twee media:

$n_j = 1/v_j, j = 1, 2$ brekingsindices

Wet van Snellius:

$$n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2$$

Bewijs: Varieer willekeurige weg $P \rightarrow R \rightarrow Q$
tot $P \rightarrow R' \rightarrow Q$ met $R' - R = \delta$ "klein"

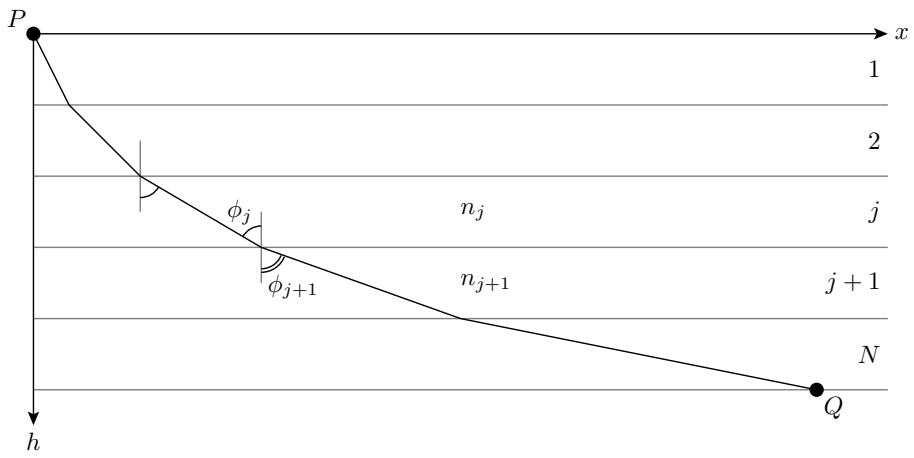
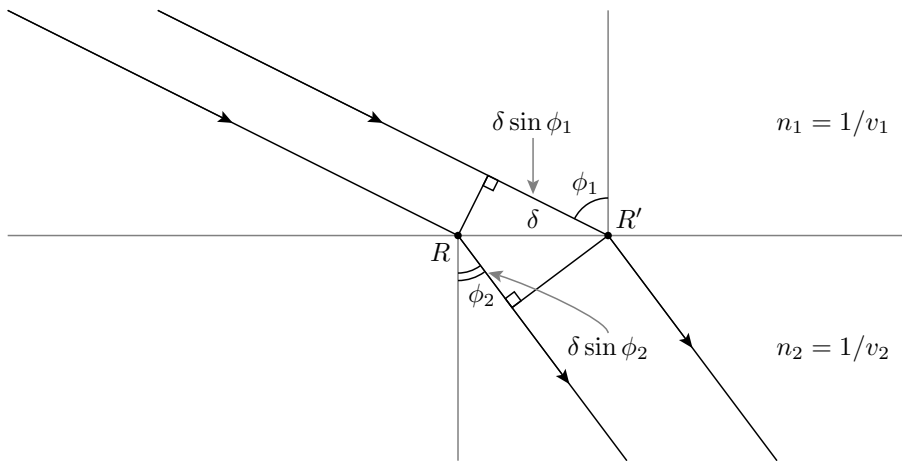
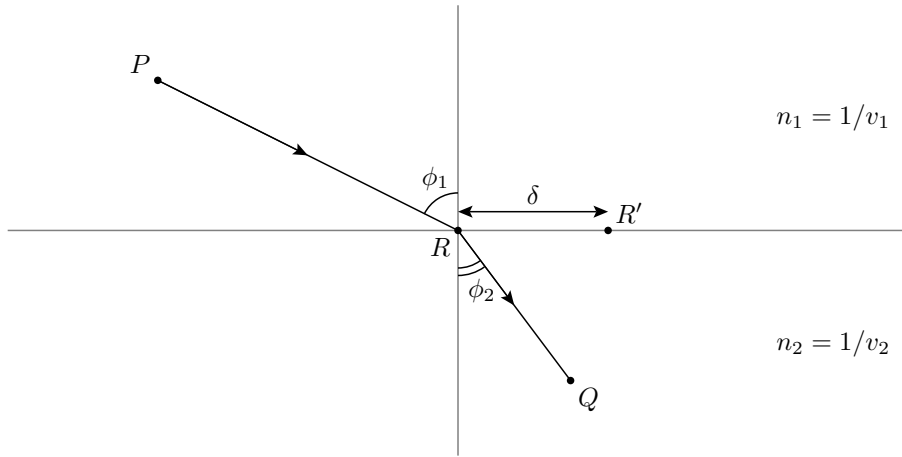
Tijdsverschil:

$$\delta n_1 \sin \varphi_1 - \delta n_2 \sin \varphi_2 + O(\delta^2)$$

Optimale keus voor $R \Rightarrow n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2$

(anders geeft andere keus R korter durende
weg) QED

Zie opgave voor een ander bewijs



Afleiding cycloïde I

Alternatieve formulering Snellius

$$\frac{\sin \varphi_j}{v_j} = \frac{\sin \varphi_{j+1}}{v_{j+1}},$$

$$j = 1, 2, \dots, N$$

Nadert voor $N \rightarrow \infty$ tot

$$\frac{\sin \varphi}{v} = C \quad (2)$$

Uit "behoudswetten" (1) en (2) volgt de gezochte geparametriseerde kromme

$$(x(\varphi), h(\varphi))$$

via

Lemma

$$v' = \frac{g}{v}$$
$$\cos \varphi = C v' \frac{dh}{d\varphi},$$

waarbij $v' = dv/dh$

Bewijs: Differentieer (1) $\Leftrightarrow v^2 = V^2 + 2gh$
naar h en (2) $\Leftrightarrow \sin \varphi = C v$ naar φ QED

Afleiding cycloïde II

En zo:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{d\varphi} &\stackrel{\text{lemma}}{=} \frac{1}{Cg} v \cos \varphi & (3) \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2C^2g} \sin 2\varphi \end{aligned}$$

terwijl:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\varphi} &= \tan \varphi \frac{dh}{d\varphi} \\ &\stackrel{(3)}{=} v \sin \varphi \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2C^2g} (1 - \cos 2\varphi) \end{aligned}$$

Integratie geeft dan:

$$\begin{aligned} h(\varphi) &= h_0 - \frac{1}{4C^2g} \cos 2\varphi \\ x(\varphi) &= x_0 + \frac{1}{4C^2g} (2\varphi - \sin 2\varphi) : \end{aligned}$$

een cycloïde met rolhoek 2φ en straal $1/(4C^2g)$

Hetgeen te bewijzen was

Commentaar

1. Prijsvraag in "Acta Eruditorum" 1695
eerst geen inzendingen, na hernaling
oplossingen van veel beroemde tijdgenoten
2. Newton anoniem, echter:
"ex ungue leonem cognavi"
3. Combinatie van ISOCHRONIE
en BRACHYSTOCHRONIE interessant
Rol beginwaarden en constanten V, C ?
4. Tegenwoordig vraagstukje bij college
"Variatie-rekening"

1. J.M. Aarts, *Meetkunde: facetten van de planimetrie en stereometrie*, Epsilon Uitgaven **47**, 2000
2. V.I. Arnold, *Huygens & Barrow, Newton & Hooke*, Birkhäuser 1990
3. O. Bottema, *Theoretische Mechanica*, Epsilon Uitgaven **3**, 1985
4. H.W. Broer, Huygens' isochrone slinger, *Euclides*, **70**(4) (1995), 110-117
5. H.H. Goldstine, *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*, Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences **5**, Springer-Verlag 1980
6. J.A. van Maanen, *Een Complexe Grootheid, leven en werk van Johann Bernoulli, 1667 – 1748*, Epsilon Uitgaven **34**, 1995