

Inhoud

Voorwoord.	2
Organisatorische mededelingen	3
Plenaire lezingen.	5
Thema's	
Oude meetkunde in nieuwe toepassingen	8
Wiskundelessen uit de oude doos	13
13: Rampen en risico's	16
Wiskunde en het spoor	19
Bedrijfswiskunde.	23
Wiskunde en film	26
Wiskunde en modelleren	29
Geen economie zonder wiskunde	32
Wiskundige helden: Huygens	34
Onverwachte ontwikkelingen in de 20ste eeuwse wiskunde	37
Overige werkgroepen en lezingen.	41
En verder	
Informatiemarkt	46
Avondprogramma	46
Funrun	47
Nationale Wiskunde Dagen 2008	47

Deze dertiende NWD is mede mogelijk gemaakt door bijdragen van Getal en Ruimte, Texas Instruments en NH Leeuwenhorst Hotels.

Voorwoord

Twijfelt iemand nog aan de interesse van docenten voor vakkennis? Voortdurende bijscholing is volgens de onderwijsraad een must om iets aan die vakkennis te doen.... Kom naar de Wiskundedagen en zie de opkomst, het enthousiasme en de inhoud! Ieder jaar wachten we in september de belangstelling met spanning af. Ieder jaar blijkt die echter weer overweldigend. Dit jaar zelfs zo overweldigend dat we helaas enkelen van u in een naburig hotel moeten onderbrengen.

Een belangrijk doel van de wiskundedagen is het bieden van een inspirerende ontmoetingsplaats voor wiskundigen en wiskundeleraren. Een ontmoetingsplaats om de laatste wiskundige ontwikkelingen te proeven en om te horen wat in het wiskundeonderwijs leeft. Alsof we het rapport van de onderwijsraad al gelezen hadden. Ze stelt namelijk ook dat dergelijke contacten noodzakelijk zijn voor een soepele overgang van voortgezet naar hoger onderwijs. Afijn, het probleem van NWD13 is misschien dat we al 13 jaar bestaan, niet meer een nieuw initiatief vormen en daardoor buiten de belangstelling van procesvernieuwers vallen.

Het is deze NWD weer gelukt om – op papier – een rijk programma samen te stellen. Een rijkdom die niet alleen relevant is voor uw leerlingen die doorstomen naar een bètastudie, maar voor al uw leerlingen. Hulde aan de programmacommissie! Met de presentaties en werkgroepen moet het mogelijk zijn om de relevantie van het vak zelf en het belang voor vele uitstromingsmogelijkheden te laten zien: van rechercheur tot bruggenbouwer.

De diversiteit in de thema's zorgt ook dit jaar weer voor een grote variatie aan onderwerpen. Geïnspireerd door het canon-denken starten we dit jaar bovendien met een nieuwe serie thema's: onze helden van de wiskunde. Om te beginnen de persoon die volgens velen ontbrak in de canon van de vaderlandse geschiedenis: Christiaan Huygens. Vier bijdragen gewijd aan zijn werk. Wie is onze volgende held? Volgend jaar in dit theater.

Allen veel plezier toegewenst tijdens deze dertiende NWD!

Michiel Doorman
Freudenthal Instituut*

*) Sinds 1 december is het Freudenthal Instituut niet meer alleen een instituut voor onderzoek naar en ontwikkeling van reken-wiskundeonderwijs, maar is het gefuseerd met de didactiekvakgroepen scheikunde, biologie en natuurkunde van de Universiteit Utrecht. De volledige naam luidt: Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education (www.fisme.uu.nl).

Organisatorische mededelingen

De Nationale Wiskunde Dagen worden gehouden in NH Leeuwenhorst Hotel in Noordwijkerhout. Alle activiteiten vinden plaats onder één dak. In bijgevoegde folder wordt beschreven hoe u NH Leeuwenhorst Hotel kunt bereiken. U bent welkom op vrijdagochtend 2 februari vanaf 9.00 uur. Bij aankomst kunt u uw bagage kwijt in de daartoe aangewezen bagagekamers. Vanaf de lunchpauze kunt u de sleutels voor uw kamer ophalen bij de receptie van NH Leeuwenhorst.

De restaurants – Dalí en Gaudí – zijn links en rechts van de centrale bar. Deze bar bevindt zich achter de vernieuwde receptie bij de hoofdingang. De NWD wordt gehouden in de Boston-, de Cambridge- en de Harvardzalen. Zie de plattegrond achter in dit boekje.

Busservice

Voor de treinreizigers is er een busservice geregeld. Er rijdt een extra bus van de Leeuwenhorst Express (fa. Beuk). Deze vertrekt om 10.05 uur vanaf station Leiden. Zaterdagmiddag na de lunch kunt u met de bus terug naar station Leiden. Het buskaartje voor de terugweg koopt u in NH Leeuwenhorst bij het secretariaat van de NWD.

Programmaoverzicht

Het globale programmaoverzicht kunt u vinden op de binnenkant van de voorkaft van dit boekje. Het detailschema van de parallelsessies staat op de middenpagina's. Het schema van de NWD is dit jaar als volgt: er zijn drie plenaire lezingen en vier blokken parallelsessies. In het programma is parallelsessie blok 2 voornamelijk gereserveerd voor werkgroepen van 90 minuten.

Vooraanmelding

Voor de parallelsessies, ook zaterdag (zie ook het schema in het midden van dit boekje) kunt u van tevoren intekenen via de NWD website www.fi.uu.nl/nwd of door een e-mail te sturen naar nwd@fi.uu.nl. Verder kunt u ook de bijgevoegde antwoordkaart per omgaande terugsturen. De voorintekeningen worden in volgorde van binnenkomst verwerkt. Voorintekenen kan tot en met vrijdag 26 januari.

Op de inschrijflijsten die in NH Leeuwenhorst worden opgehangen, kunt u zien of u geplaatst bent in de sessie van uw keuze. Het is ook mogelijk ter plekke in te tekenen. U kunt dan kiezen uit de sessies waarvoor nog plaats is.

Teken alstublieft nooit in bij een werkgroep die al vol zit!

Lezingen en zalen

Alle plenaire lezingen worden gehouden in het Atrium. De zaalindeling van de parallelsessies wordt ter plekke bekendgemaakt.

Secretariaat

Het secretariaat van de NWD bevindt zich in Boston 10, vanaf de hoofdingang links. Het secretariaat is gedurende de conferentie vrijwel continu open en u kunt er met al uw vragen en opmerkingen terecht.

Overige activiteiten

In de Rotonde, Boston 12/14 en op de gangen is een informatiemarkt met stands van instanties die zich op een of andere wijze met wiskunde of wiskundeonderwijs bezighouden. Daarnaast zijn er diverse extra activiteiten in de wandelgangen en tijdens de pauzemomenten (zie verderop in deze gids).

's Avonds is er muziek in Boston 9, film in het Atrium en kunt u in de Bostonzalen spellen spelen of genieten van hoe anderen spelen.

Drankjes kunt u kopen met de kaart die tevens uw kamersleutel is. Bij inlevering van deze 'sleutel' bij de receptie betaalt u het openstaande bedrag op de kaart.

Ontbijt, lunches en diner vinden plaats in de restaurants van NH Leeuwenhorst.

Ten slotte verzoeken we u zaterdag vóór 10.30 uur uw kamer leeg achter te laten, consumpties en telefoonkosten af te rekenen bij de receptie van NH Leeuwenhorst en de sleutelkaart in te leveren. In de centrale hal bij de garderobe zijn kluisjes voor uw bagage.

Plenaire lezingen

Er staan drie plenaire lezingen in het programma. Deze vinden plaats in het Atrium.

De grenzen van de financiële wiskunde

van exotische opties tot exotische waarden of: hoe kun je wedden op het weer, rampen of huizenprijzen?

Dr. Svetlana Borovkova

Faculteit der Economische Wetenschappen en Bedrijfskunde

Vrije Universiteit Amsterdam

vrijdag 11.30-12.15 uur

Binnen het gebied van de financiële wiskunde is men het meest geïnteresseerd in de zogenaamde derivaten. Een financieel derivaat is een contract dat uit één of andere onderliggende waarde – zoals een aandeel – wordt afgeleid.

Het eenvoudigste derivaat is de zogenaamde ‘pure vanilleoptie’: een recht om bepaalde aandelen te kopen of te verkopen tegen een vaste prijs op een vast tijdstip.

In financiële markten zijn er echter veel meer ingewikkelde contracten. Die worden exotische derivaten genoemd en zij fascineren financiële onderzoekers, net zoals de meeste mensen gefascineerd zijn door vreemde vogels of dieren. Zo lijkt de financiële markt op een dierentuin die vol zit met allerlei derivaten.

De waardevaststelling van financiële derivaten wordt gebaseerd op het baanbrekend werk van de Amerikaanse economen Black, Scholes en Merton, die in 1996 de Nobelprijs hebben gekregen voor hun beroemde Black-Scholes formule voor de optieprijs. De waardevaststelling van exotische derivaten vereist specifieke hulpmiddelen, die gewoonlijk veel complexer zijn dan de Black-Scholes-formule. Hoewel het technisch moeilijk is, is de waardevaststelling van dergelijke derivaten toch mogelijk, net als het bepalen van de risico's. De prijzen daarvan hangen namelijk af van de prijzen van onderliggende waarden die in de markt worden verhandeld: voorraden, indexen, rente en wisselkoersen of goederen.

Onlangs is een gehele nieuwe klasse van derivaten ontstaan, die voornamelijk inzet op zaken die niet vrij in de financiële markt zijn – de zogenaamde exotische ‘grondslagen’, of onderliggende waarden. Belangrijke voorbeelden zijn de weer- en rampderivaten, waarvan de uitbetalingen afhangen van bijvoorbeeld de gemiddelde wintertemperatuur in Chicago, of het feit of een bepaalde ramp heeft plaats gevonden. De waardevaststelling van dergelijke derivaten met traditionele wiskundige methoden is in principe onmogelijk, omdat je het weer niet kunt kopen of verkopen.

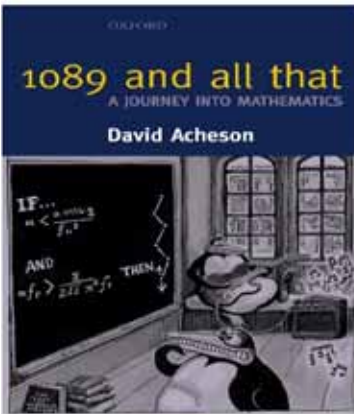
In deze lezing maken wij een virtuele reis van exotische derivaten naar exotische on-

derleggers. Wij laten u ruiken aan de wiskundige hulpmiddelen die worden gebruikt om dergelijke derivaten te waarderen en hun risico's te beheersen. We onthullen in ieder geval een deel van het mysterie dat om deze derivaten hangt.

1089 and All That

Dr. David Acheson
Jesus College, Oxford
vrijdag 20.30-21.15 uur

Why are so many people scared stiff of mathematics? All too often, the real truth is that they have never been allowed anywhere near it, and one of my ambitions is to bring some of the ideas and pleasures of real mathematics to a wide public. One way of doing this, I believe, is to emphasize the element of surprise in mathematics.



In the lecture, I will start with a simple number trick that always leads to the answer 1089, and will go on to discuss many other surprises in mathematics and its applications, including elementary geometry, chaotic pendulums, and electric guitar dynamics. I will even examine whether mathematics can explain the Indian Rope Trick, which is perhaps the most famous illusion in the whole history of magic. Most importantly of all, however, I will suggest ways in which anyone can appreciate that mathematics has a certain magic of its own.

David Acheson is a Fellow in Mathematics at Jesus College, Oxford, and an amateur jazz guitarist. In 1993 he discovered a gravity-defying 'upside-down pendulum theorem', which eventually featured on BBC TV's Tomorrow's World. His latest book '1089 and All That' is an attempt at a major breakthrough in bringing the ideas and pleasures of mathematics to a wide public.

Van het brein afgekeken wiskunde voor beeldherkenning

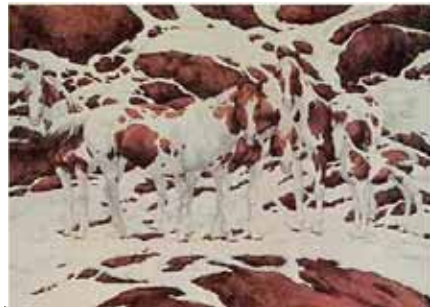
Prof. dr. ir. Bart M. ter Haar Romeny
Faculteit Biomedische Technologie, TU Eindhoven
zaterdag 11.45-12.30 uur

Met behulp van medische scanners (CT, MRI) kunnen we elke kubieke millimeter binnen de patiënt zien. Met een moderne 64-slice CT-scanner kunnen in 20 seconden al zo'n 1200 'plakjes' van de patiënt worden afgebeeld.

De productie van medische beelden heeft daardoor zo'n omvang aangenomen, dat steeds meer de computer te hulp geroepen wordt om de radioloog te helpen met de diagnose. Maar hoe ontwikkel je een algoritme om een tumor te herkennen? Hoe selecteer je in het beeld alleen de beeldpunten van de bloedvaten die verstopt zijn, om die vervolgens in 3D te laten zien, zodat je het van alle kanten kunt bekijken?

Algoritmen voor beeldherkenning maken gebruik van wiskunde. Vaak blijkt echter dat de wiskundige inzichten hiertoe nog tekort schieten.

Deze lezing gaat in op wat we wiskundig nog kunnen leren van ons brein. Er is namelijk veel bekend van de eerste stappen van onze visuele perceptie. Het blijkt dat er in de visuele cortex (in ons achterhoofd) cellen zitten die tot hoge orde afgeleiden



kunnen nemen van het beeld, om bijvoorbeeld contouren te vinden en een veelheid aan andere beeldkenmerken. We kunnen zelfs het ontstaan van deze filters in ons brein modelleren met behulp van lineaire algebra. Ook zien we neurale terugkoppelingen, waaruit we algoritmen kunnen destilleren voor het verscherpen van vage en ruisachtige beelden.

Recent zijn er bijzondere kleurstoffen uitgevonden, de 'voltage-sensitive dyes', die in een dunne laag op de hersenen aangebracht kunnen worden en die fluorescentie lichtflitsjes uitzenden op de plaatsen waar bepaalde hersencellen actief zijn, bijvoorbeeld als het proefdier ergens naar kijkt. Uit deze patronen komt inspiratie voor wiskundige ideeën, onder andere voor de wiskunde van de beroemde Gestaltwetten uit de psychologie. Uiteindelijk leidt deze van het brein afgekeken wiskunde tot softwarealgoritmen, waarmee we veel kunnen analyseren in medische beelden. We geven hier rijk geïllustreerde voorbeelden van.

Ook zullen we tijdens de lezing met behulp van het wiskundeprogramma Mathematica interactief laten zien hoe we deze analyses eenvoudig kunnen doen met een hoge programmeertaal.

Oude meetkunde in nieuwe toepassingen

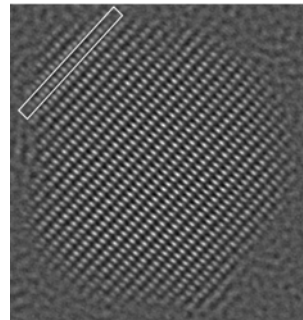
Denk aan de stelling van Pythagoras die je helpt om met je navigatiesysteem de weg te vinden, in een auto die geassembleerd is met behulp van een robot met besturing gebaseerd op projectieve meetkunde. Gaandeweg rijd je over een nieuwe generatie vakwerkbruggen waarvan het berekenen van de trek- en duwkrachten nog steeds neerkomt op het aloude ontbinden van vectoren. Voor de brug zijn waarschijnlijk nieuwe materialen gebruikt waarvan de structuur ontdekt is door het creatief toepassen van aloude projectiemethoden. Zo stellen we ons dit thema voor: moderne toepassingen die, tot op de kern teruggebracht, gebaseerd zijn op eeuwenoude meetkunde. En mocht u hierdoor in de knoop raken: geen probleem. Ook knopen worden voor u ontrafeld door gebruik te maken van oude meetkunde.

Driedimensionale visualisatie van atomen met discrete tomografie

Drs. Joost Batenburg
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
vrijdag 14.00-14.45 uur

De ontwikkeling van de elektronenmicroscopie in de jaren 30 van de 20ste eeuw, markeerde een nieuw tijdperk in de microscopie. De preparaten die men met de microscoop kon bekijken werden telkens kleiner en kleiner. Inmiddels zijn we aangeland bij een vergroting waarmee in principe individuele atomen kunnen worden onderscheiden. Atomen in vaste stof kun je echter niet isoleren, zodat ze altijd omgeven worden door andere atomen. De beelden die men ziet met de microscoop zijn projectiebeelden.

Dit wil zeggen dat atomen die achter elkaar liggen in de richting waarin men kijkt, op elkaar worden afgebeeld. Zo'n projectiebeeld zegt dus niet zoveel over de ruimtelijke positie van de atomen. Om toch een drie-dimensionaal beeld te vormen neemt men projectiebeelden op vanuit verschillende hoeken. De posities van de atomen kunnen in bepaalde gevallen uit deze beelden worden gereconstrueerd met behulp van computerberekeningen. In het vakgebied van de discrete tomografie houdt men zich onder andere bezig met het ontwikkelen van nieuwe algoritmen, met name gebaseerd op combinatoriek en discrete wiskunde, die kunnen worden gebruikt voor deze reconstructies. Deze voordracht gaat enerzijds in op de fysische achtergrond van deze state-of-the-art techniek en anderzijds op de combinatorische aspecten van discrete tomografie, de wiskunde die het gebruik van de techniek mogelijk maakt.



*Projectiebeeld van een goud-nanokristal.
De geprojecteerde atoomkolommen zijn
duidelijk van elkaar te onderscheiden.*

Mechanische toepassingen van projectieve meetkunde

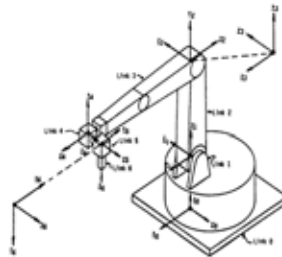
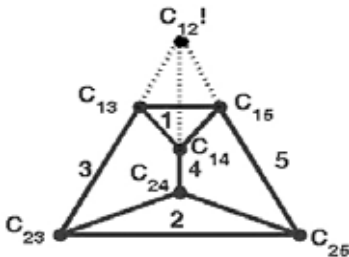
Prof. dr. Rudi Penne

Departement IWT, Karel de Grote-Hogeschool, Hoboken, België

vrijdag 15.30-17.00 uur (90 minuten)

Projectieve meetkunde is een tijdje uit de mode geweest. In de meeste secundaire en hogere opleidingen wordt uitsluitend Euclidisch gewerkt en wordt het cartesisch assenstelsel als het meest praktische ervaren. Ook onder wiskundigen heeft dit vak vaak een ouderwets imago, en moet het in vele programma's wijken voor modernere opvolgers zoals algebraïsche meetkunde of differentiaalmeetkunde.

De laatste 20 jaar stellen we echter een heropleving van de projectieve meetkunde vast. Vooral het werken met homogene coördinaten biedt tal van voordelen. Ze hebben hun tweede jeugd onder andere te danken aan de opkomst van disciplines zoals computergrafiek, CAD en computervisie. Maar ook in klassieke ingenieursvraagstukken rond starheid en mobiliteit van mechanische constructies blijken ze het juiste kader te bieden. In vele toepassingen verbergt het invoeren van cartesische coördinaten de essentie van het vraagstuk. Als alleen 'incidenties' van tel zijn, is de projectieve meetkunde het juiste kader. In deze lezing willen we u vooral een zicht geven op de mechanische toepassingen, zoals starheid van staafconstructies of de kinematische sturing van robotarmen.



De wiskundige knoop

Hoe onderscheid je knopen van elkaar?

Drs. Ab van der Roest

Ichthus College, LIO TU Eindhoven

zaterdag 9.15-10.00 uur

Knopen zijn, wiskundig gezien, gesloten krommen in de ruimte.

Knopen worden al sinds het begin van de 19e eeuw vanuit de wiskunde bestudeerd. Er zijn tekeningen van Gauss gevonden waarop 13 verschillende knopen zijn afgebeeld.

Twee knopen zijn verschillend als ze niet door een ‘continue beweging’ in elkaar over te voeren zijn. Knippen mag dus niet!

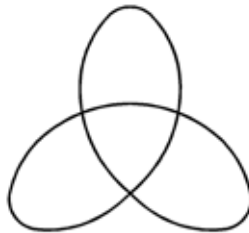
Eén van de hoofdthema’s van de knopentheorie is het zoeken naar manieren om knopen van elkaar te onderscheiden. Daartoe werden invarianten bedacht. Invarianten zijn eigenschappen van een knoop die onveranderd blijven wanneer er topologische veranderingen op die knoop worden uitgevoerd. Een poging werd in 1928 door Alexander gedaan. Hij definieerde een veelterm die je bij elke knoop kan uitrekenen. Krijg je bij twee knopen verschillende veeltermen, dan zijn die knopen ook echt verschillend. Jammer genoeg bleek deze veelterm niet krachtig genoeg om *elk* tweetal *verschillende* knopen van elkaar te onderscheiden. In 1984 ontdekte Vaughan Jones de naar hem genoemde Jonesveelterm. Hiermee kunnen al meer knopen van elkaar onderscheiden worden.

De ontwikkelingen staan niet stil en de knopentheorie is een terrein van de wiskunde waar veel onderzoek op verricht wordt. De zoektocht naar invarianten en naar toepassingen wordt voortgezet.

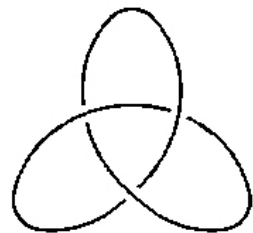
In de workshop kunt u zelf aan de slag met knopen. Ook wil ik u laten zien dat knopen een geschikt onderwerp zijn voor het voortgezet onderwijs. Sommige onderdelen zijn al geschikt voor bijvoorbeeld een tweede klas en andere zijn geschikt voor vwo-6.



knoop



knoopprojectie



knoopdiagram

Onderwerpen die aan de orde komen zijn:

- Van knoop naar projectie naar diagram.
- Reidemeisterbewegingen.
- Wanneer zijn knopen verschillend.
- Veeltermen.
- Vlechten.

Oppervlak in de knoop

Prof. dr. ir. Jack van Wijk

Faculteit Wiskunde en Informatica, TU Eindhoven

zaterdag 10.30-11.15 uur

Links ziet u een drieblad, een eenvoudig voorbeeld van een mathematische knoop. Kunnen we een oppervlak verzinnen dat die knoop als rand heeft? Ja, dat kan. Neem een strip papier, maak er drie halve slagen in en plak de uiteinden aan elkaar vast. De rand van de strip vormt dan een knoop, de gedraaide strip het oppervlak. Er is wel wat vreemds aan de hand. Dit oppervlak is niet oriënteerbaar, het heeft geen voor- en achterkant, het is een soort Möbius-strip. Kunnen we bij de knoop ook een oppervlak verzinnen dat wel oriënteerbaar is?



Ja, ook dat kan, zie de twee afbeeldingen rechts. Dit zijn Seifert-oppervlakken, genoemd naar de Duitse wiskundige Herbert Seifert. Deze heeft in de jaren dertig van de vorige eeuw een algoritme ontwikkeld om voor willekeurige knopen dit soort oppervlakken te genereren. De afbeeldingen zijn gemaakt met SeifertView, een interactief gereedschap voor het maken en bekijken van dit soort oppervlakken. Met SeifertView kan iedereen in korte tijd intrigerende vormen en afbeeldingen maken. En tegelijkertijd kennis maken met een fundamenteel concept uit de knopentheorie.

Zie ook: www.win.tue.nl/~vanwijk/seifertview

Bridgebuilder workshop

Tom Goris, Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

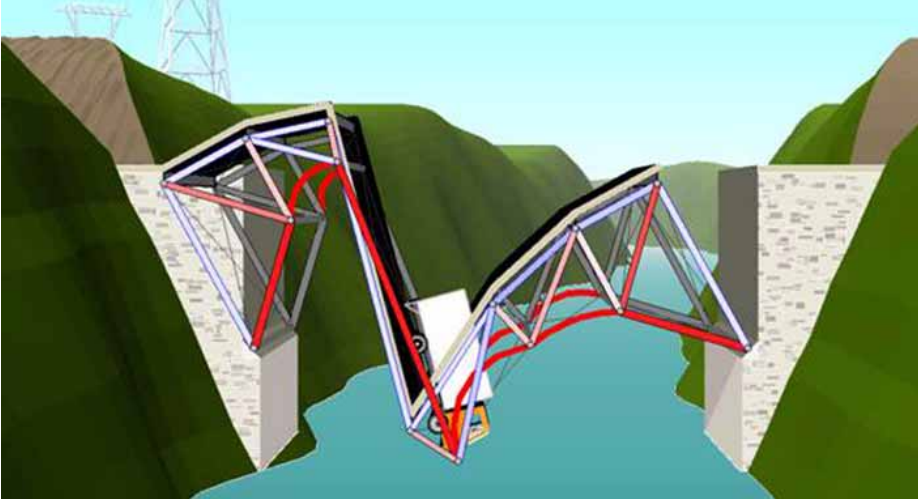
Frenky Heurkens

zaterdag 10.30-11.30 uur (60 minuten)

In vakwerkconstructies komt prachtige wiskunde voor; het ontbinden van vectoren en vervolgens het evenwicht zoeken in knooppunten. Deze constructies kom je onder an-

dere tegen in vakwerkbruggen. Op het web kun je simulatieprogramma's voor vakwerkbruggen vinden, bijvoorbeeld het programma Bridgebuilder.

Je construeert een brug en test deze door er een vrachtwagen over heen te laten rijden. In de simulatie wordt met kleuren aangegeven of er trek- dan wel duwkrachten in de staven zitten. Aan de hand van die informatie kan besloten worden om bepaalde staven dunner en dus goedkoper uit te voeren.



Wereldwijd zijn er zo hele competities ontstaan over het ontwerpen van een zo goedkoop mogelijke brug over een gegeven overspanning. In het kader van een cursus 'Theoretisch construeren' op de lerarenopleiding voor het vak techniek, zijn lesbrieven gemaakt voor en uitgetest op vmbo-scholen. In deze workshop gaat u zelf aan de slag met zo'n lesbrief.

Wiskundelessen uit de oude doos

‘Vroeger’, zei mijn vader, ‘trokken we nog wortels met de blote hand!’

Iedereen die nieuwsgierig is naar de wiskundeles van vroeger, toen beschrijvende meetkunde nog met een echt bord werd gedaan met krijt, een lat en een bordpasser, met papier en Oost-Indische inkt, is welkom bij het thema ‘Wiskundelessen uit de oude doos’.

Het gaat hier om workshops over het wiskundeonderwijs van vroeger, over onderwerpen en hulpmiddelen die daar inmiddels uit verdwenen zijn, zoals de rekenliniaal en de planimeter. Verbaas u over het werk van uw collega’s van weleer. Misschien krijgt u wel heimwee of misschien gaat u de ‘zegeningen’ van het moderne wiskundeonderwijs extra waarderen!

Workshop beschrijvende meetkunde

Michel Roelens

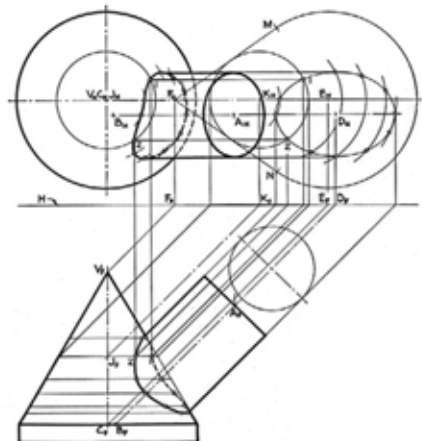
Katholieke Hogeschool Limburg, Diepenbeek, België

vrijdag 14.00-14.45 uur

Tot in de jaren zestig van de vorige eeuw was beschrijvende meetkunde een onderwijsvak in het secundair onderwijs. Prisma’s, piramides, (half)regelmatige veelvlakken, kegels, cilinders en bollen waren de lichamen die poseerden bij deze tekensessies. Deze lichamen konden elkaar wel eens ontmoeten en zelfs ‘doorboren’. De leerlingen bleven echter braaf op hun plaats om nette ‘epures’ te maken van deze gebeurtenissen, volgens de projectiemethode van Gaspard Monge (1746 - 1818) of in centraal perspectief. Eerst werd alles in potlood en dan hopelijk zonder vlekken in Oost-Indische inkt getekend.

In deze workshop kun je iets van deze sfeer proeven. Zowel het ruimtelijk inzicht als de potloodpunten zullen worden aangescherpt. Je krijgt een tekenopdracht met ruimtelichamen. Welke opdracht het wordt, verklap ik nog niet, maar er is geen specifieke voorkennis van beschrijvende meetkunde voor nodig.

Het is handig als je een potlood, een gom, een lat en een passer meebrengt. Voor wie het vergeet voorzie ik aanvullend materiaal, maar misschien niet genoeg voor iedereen.

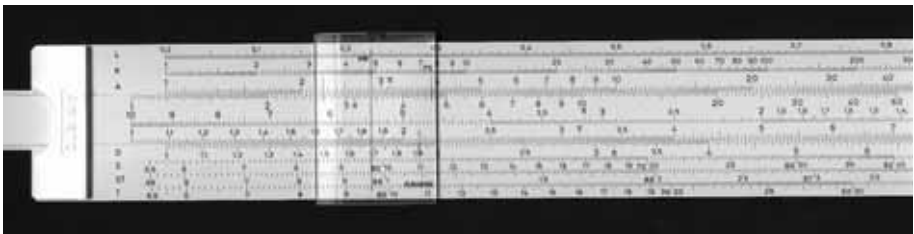


Rekenen met de rekenliniaal

Drs. Jeanne Breeman, reisleader voor wiskundedocenten, Zwolle
Berend Wielens, Mill-Hillcollege, Goirle
vrijdag 15.30-17.00 uur (90 minuten)

Pakken uw leerlingen voor $2 \times \frac{1}{4}$ al een rekenmachine? Misschien verlangt u wel eens terug naar de tijd dat die er nog niet waren.

Rond de zestiger jaren moesten berekeningen, voor zover ze niet eenvoudig met pen en papier uit te rekenen waren, gedaan worden met behulp van een rekenliniaal. Uit je hoofd bereken je $2,5 \times 6$, op papier $2,42 \times 6,8$. Hoe komt het dat de rekenliniaal veel sneller, met één decimaal nauwkeurig, het antwoord geeft?



In deze workshop gaan we de rekenliniaal opnieuw ontwerpen, zodat de werking duidelijk is. Met behulp van echte rekenlinialen gaan we dan een paar opgaven maken. Daarna verdiepen we ons in de werking van de abacus en krijgen we voorbeelden van de snelheid waarmee je daarmee kunt werken. De Chinese ambassade stuurt ons iemand om een demonstratie te verzorgen.

Afhankelijk van de tijd houden we ons misschien ook nog bezig met het rekenen met logaritmische tafels.

Deze workshop is vooral interessant voor docenten die niet zelf met de rekenliniaal hebben gewerkt. Als u bij uw collega's op school nog een rekenliniaal, een tabellenboek of een abacus kunt lenen, brengt u die dan vooral mee.

Worteltrekken met een staart

Martin Kindt

Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

zaterdag 9.15-10.00 uur

Het cijferend rekenen is niet meer wat het geweest is. Een bekend Nederlands dagblad kopte nog niet zo lang geleden: ‘Staartdeling, wat is dat?’ De discussie over het belang van dit stokoude algoritme is weer actueel. Dat geldt niet voor een ander rekenrecept uit de oude doos, namelijk dat voor het berekenen van vierkantswortels.

*The Root of your first Period you
Must place in Quote, if you work true;
Whose Square from your said Period then,
You must subtract; and to th' Remain
Another Period being brought,
You must divide as here is taught;
By the Double of your Quote, but see
Your Unit's Place you do leave free;
Which Place will be supply'd by th' Square
Of your next quoted Figure there:
Next multiply, subtract and then
Repeat your work unto the End
And if your Number be irrational
Add Pairs of Cyphers for a Decimal.*

$$\sqrt{7365796} = 2714$$

$$\begin{array}{r} 2^2 = 4 \\ \hline 47 \times 7 = 336 \\ \hline 541 \times 1 = 329 \\ \hline 757 \\ \hline 541 \\ \hline 21696 \\ \hline 5424 \times 4 = 21696 \\ \hline 0 \end{array}$$

Tot 1958 stond dit algoritme (‘Chinese methode’) steevast op het algebraprogramma, maar het is daarna bijna geruisloos verdwenen. Jammer? Er zal misschien hier en daar even over geweeklaagd zijn, maar de pers heeft het nooit gehaald. En nu vindt iedereen het vanzelfsprekend dat als je de vierkantswortel uit 7365796 nodig hebt, je even je rekenmachine pakt.

In de werkgroep wordt dit vergeten algoritme vanuit diverse gezichtspunten bekeken:

- was het een black (old) box of werd het in de boeken inzichtelijk gemaakt?
- hoe werkt het voor wortels die niet mooi uitkomen (laatste regels van het vers)?
- als er afgerond moet worden, hoe zit het dan met de mogelijke fout?
- bestaat er ook zo’n rekenwijze voor derdemachtswortels?
- de staartdeling heeft een pendant in de veeltermalgebra (behoort ook al lang niet meer tot de standaardstof), geldt dat ook voor worteltrekken?

Bij dit alles lijkt het me leuk om een uitstapje maken naar de Oudheid en te zien hoe het algoritme zich verhoudt tot klassieke benaderingsmethoden bij worteltrekken.

13: Rampen en risico's

Het getal 13 wordt nogal eens geassocieerd met ongeluk. De pessimisten kregen in de ramp met de Apollo 13 nog gelijk ook.

In dit thema van deze dertiende NWD kijken we naar de verdeling van de 13 kaarten die je in het bridgespel krijgt, naar de problemen die onzichtbare golven in de zee geven, naar het analyseren van ongevallen en naar grote bouwprojecten als de Zuiderzeelijn. Dit thema zal een waar mekka worden voor de ramptoeristen onder u.

52!/(13!*13!*13!*13!) is groter dan je denkt, het probleem van schudden van een pak kaarten

Hans van Staveren

Amersfoort

vrijdag 14.00-14.45 uur

Al vele decennia wordt in de bridgewereld gespeeld met door een computer geschudde spellen. Eerst alleen op internationale kampioenschappen, maar steeds vaker ook op simpele clubs. Er is altijd veel verwarring geweest over de kwaliteit van die spellen, waarbij spelers vaak wantrouwen hadden tegen die rare computerspellen. Ook waren er af en toe incidenten waar spelers op een toernooi een hele serie spellen herkende die ze op een vorige versie van dat toernooi, of soms op een heel ander toernooi al gespeeld hadden.



De spreker heeft jarenlang beweerd dat hij een beter programma zou kunnen maken en zo tegen het jaar 2000 werd hij door de Nederlandse Bridge Bond gevraagd om zijn claim waar te maken, want de NBB wilde voor de Olympiade in Maastricht 2000 dat nieuwe programma gebruiken.

Het ontwerp van het nieuwe programma maakt gebruik van technieken uit de cryptografie, en een 1-op-1-afbeelding van alle mogelijke bridgespellen op de natuurlijke getallen tussen 0 en 53,644,737,765,488,792,839,237,439,999. Het verband tussen de incidenten zoals hierboven genoemd en de zogenaamde verjaardagsparadox zal worden aangetoond.

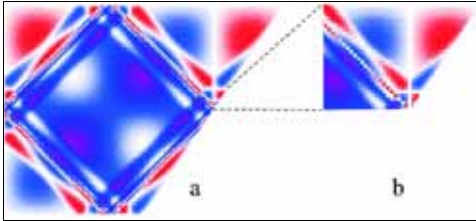
Het programma is momenteel in gebruik op vele internationale toernooien inclusief de prestigieuze Bermuda Bowl.

Het interne-golf biljart

Leo Maas

Koninklijk Nederlands Instituut voor Onderzoek der Zee (NIOZ) - Texel

vrijdag 14.00-14.45 uur



In zee bevindt zich vaak een dunne, warme en 'zoete' bovenlaag boven een koude en zoute onderlaag. Op het grensvlak tussen beide lagen kunnen zwaartekrachtsgolven voorkomen, vergelijkbaar met die aan het wateroppervlak. Een schip kan door deze praktisch onzichtbare golven op mysterieuze wijze worden geremd, of, nog vreemder, zich peristaltisch voortbewegen. In de oceaan neemt de dichtheid echter vaak gradueel met de diepte toe. Daardoor kunnen interne zwaartekrachtsgolven op ieder niveau voorkomen. Sterker: de golven bewegen nu schuin de diepzee in. Bij reflectie aan bodem en oppervlak kaatsen ze echter niet langer volgens de wet van Snellius. In een variatie op het klassieke biljart reflecteren deze golven onder een vaste hoek met de zwaartekrichting en ontstaat het zogenaamde 'interne-golf biljart'. Als gevolg van deze reflectiewet focussen zij hun energie op interne brandingszones. Deze locaties laten zich voorspellen door gebruikmaking van webgrafieken. Niettegenstaande de lineariteit van hun beschrijving dragen ze 'Escher'-achtige, zelfgelijkvormige druk- en snelheidsvelden.

Zie ook: www.nioz.nl/public/fys/staff/leo_maas/publications/golven.pdf

Rekenmodellen bij ongevallen

Theo Grosman en Albertus Nieuwenhuis

KLPD, Driebergen

vrijdag 15.30-17.00 uur (90 minuten)

In de workshop willen we u kennis laten maken met het LVBT (Landelijk Verkeers Bijstand Team) van het KLPD (Korps Landelijke Politie Diensten) binnen de Nederlandse politie. Vanuit de politiepraktijk en met name de technische bewijsvoering bij gebeurtenissen als ongevallen, zal de verwevenheid met en het gebruik van wetenschappelijke oplossingen geschetst worden.



Globale inhoud van de workshop:

Korte introductie van de organisatie.

- Uitleg van de gebruikte technieken waarbij wiskunde een rol speelt.
- Interactieve verkenning van fotogrammetrische technieken.
- Invloed van hoogte verschillen op fotogrammetrie.
- Realtime demo van een fotogrammetrische uitwerking
- Ongevalsanalyse, gebrek aan tijd!!!!
- Reconstrueren op basis van afstanden.
- Omzetten van diverse data reeksen en grafieken naar praktische informatie.
- Interactieve presentatie algemene ongevalsanalyse met praktisch voorbeelden.

Ramen voor de Rijksoverheid; casus Zuiderzeelijn

Ir. Arno Rol

Movares BV, Utrecht

zaterdag 9.15-10.00 uur

Met name na het Tweede Kamerrapport van de TCI (Tijdelijke Commissie Infrastructuur) wordt omzichtig omgegaan met de procedures voor het opstellen, toetsen en communiceren van bouwkostenramingen voor grote infrastructuur projecten van de overheid.

In opdracht van het Ministerie van Verkeer en Waterstaat heeft Movares eind 2005/begin 2006 in enkele maanden tijd investeringsramingen opgesteld voor meer dan 7 varianten van de Zuiderzeelijn. Deze verkennende ramingen werden gemaakt en bij het Ministerie ingediend op een tijdstip dat er nog geen ontwerpen beschikbaar waren. Onzekerheden en risico's speelden daarom een belangrijke rol in deze ramingen. Intense discussies werden gevoerd over onderbouwing van de bandbreedte en over probabilistische analyse.



De Zuiderzeelijn is een snelle geleid-vervoerverbinding tussen Groningen en Schiphol. Aan de hand van de raming van het nieuwbouw tracé Lelystad-Groningen van de variant HST1 (Hoge Snelheids Trein), worden de ervaringen opgedaan met de gehanteerde procedures voor het opstellen van deze investeringsramingen met de toehoorders gedeeld.

Wiskunde en het spoor

In december is het nieuwe spoorboekje van de NS van kracht geworden. Bij het samenstellen van de dienstregeling komt veel wiskunde kijken; hoe en wat komt op deze NWD aan de orde. Handig rangeren en hoe dat te optimaliseren is een ander onderwerp in dit dynamische thema. Dankzij wiskundige modellen is het mogelijk om te bepalen hoe de ondergrond voor nieuw spoor verstevigd moet worden om ervoor te zorgen dat de rails niet mee gaat trillen; zand storten of duur heien?

Wiskundige modellen helpen ook om in het volle Nederland gas- en andere leidingen te beschermen tegen lekstromen van spoorlijnen met een fikse spanning op de bovenleiding. Kortom, veel toegepaste wiskunde in dit thema; met mooie voorbeelden.

Wiskunde voor het maken van dienstregelingen

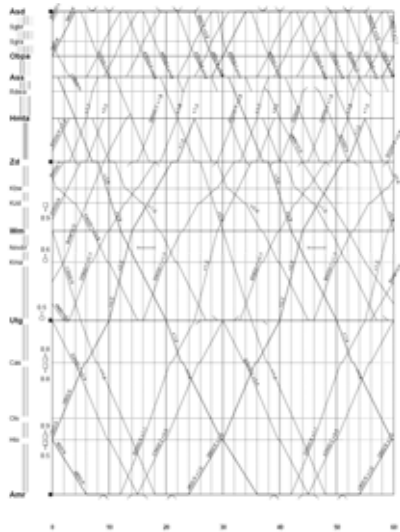
Prof. dr. Leo Kroon

NS Reizigers, Erasmus Universiteit Rotterdam

vrijdag 14.00-14.45 uur

In de NRC stond onlangs: De dienstregeling van de Nederlandse Spoorwegen is waarschijnlijk de enige vorm van hogere wiskunde die heel Nederland in beroering kan brengen. Op 10 december 2006 is de nieuwe dienstregeling van de NS van start gegaan. Tegenwoordig wordt het Nederlandse spoor zo druk bereden en spelen er zoveel aspecten een rol, dat deze grondige aanpassing van de dienstregeling niet mogelijk geweest zou zijn zonder de toepassing van verschillende wiskundige modellen en technieken. Belangrijke criteria bij het ontwerp van een dienstregeling zijn: reissnelheid, verwachte

kosten en opbrengsten, en robuustheid. Bij het ontwerpen van een dienstregeling gaat het in de eerste plaats om het vinden van een toegelaten dienstregeling op de vrije banen. Dit probleem kan geformuleerd worden als een Periodic Event Scheduling Problem. Voor het oplossen hiervan wordt gebruik gemaakt van constraint propagatietechnieken. Vervolgens wordt nagegaan of er ook een routing binnen de stations mogelijk is. Hierbij wordt gebruik gemaakt van een Node Packing model. Tenslotte worden stochastische optimalisatie en simulatie toegepast om de spelingen en buffertijden in de dienstregeling zo gunstig mogelijk te verdelen. In deze presentatie zal vooral op de bovengenoemde wiskundige aspecten van het maken van een dienstregeling worden ingegaan.



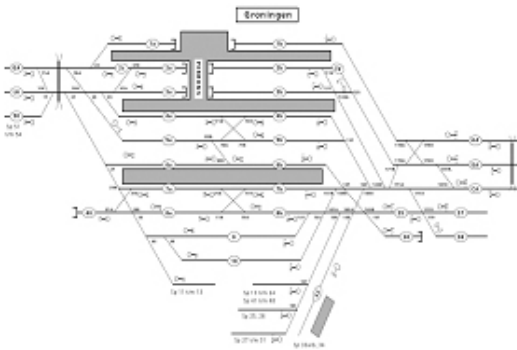
Opstellen en routeren van treinstellen bij de NS

Ir. John van den Broek

Faculteit Wiskunde en Informatica, TU Eindhoven

vrijdag 15.30 -17.00 uur (90 minuten)

Het aanbieden van een goede service aan treinreizigers vereist een planproces van zeer hoge kwaliteit. Een belangrijk onderdeel van het planproces is de rangeerplanning. Twee belangrijke componenten van de rangeerplanning vormen het routeren van treinen van en naar het opstelterrein en het opstellen van het materieel op het opstelterrein.



Rangeerbewegingen zijn treinbewegingen tussen de perronsporen en opstelsporen die gebruik maken van dezelfde infrastructuur als reizigerstreinen en goederentreinen. Door de toename van het aantal reizigers- en goederentreinen is het plannen van deze rangeerbewegingen voor planners een bijna onmogelijke taak geworden.

Met behulp van wiskundige technieken is er een systeem ontwikkeld dat planners helpt bij het bepalen van het tijdstip en de route van rangeerbewegingen. Onder andere door de instroom van nieuw materieel is er de behoefte ontstaan aan een wiskundig model dat gebruikt kan worden om treinstellen over de beschikbare opstelsporen te verdelen. Hierbij mag een treinstel een ander treinstel niet in de weg staan tijdens zijn aankomst of vertrek op een opstelterrein.

Hoe kunnen we een goed opstelplan maken waarbij treinstellen elkaar niet blokkeren, waarbij aan alle eisen is voldaan en rekening gehouden wordt met treinstellen die in dezelfde reizigerstrein binnenkomen of vertrekken? In de workshop worden beide planningsproblemen nader toegelicht, worden uitdagende rangeerpuzzels aangeboden en wordt aangegeven hoe dergelijke problemen met wiskundige modellen kunnen worden aangepakt.

Voorkennis: Enige voorkennis over lineaire programmering is geen overbodige luxe.

Bronnen

www.spoorwegmuseum.nl

Zwerfstromen: al een eeuw een uitdaging!

Ir. Erwin Smulders
Movares BV, Utrecht
zaterdag 9.15-10.00 uur

Sinds de introductie van gelijkstroomtractie bij spoorwegen en trambedrijven, nu bijna een eeuw geleden, staan zwerfstromen in de belangstelling. Dit heeft bijvoorbeeld al in 1924 geleid tot de zogenaamde ‘Wet op de Zwerfstromen’. Door het steeds meer bundelen van infrastructuur in Nederland neemt de noodzaak om een technisch en economisch verantwoorde wijze om met zwerfstromen om te gaan toe. Zwerfstromen in de grond, ontstaan door het weglekken via de spoorrails, kunnen bijvoorbeeld leidingen in de buurt van het spoor sneller laten corroderen.

Na een korte introductie tractie-energie systemen gaat deze lezing in op de fysica van het zwerfstrom proces, en geeft een overzicht van de gehanteerde wiskundige technieken. Een fundamentele kwantitatieve analyse van zwerfstrom problemen was lange tijd niet mogelijk, er waren slechts kwalitatieve analyses mogelijk. De toegenomen rekenkracht van computers maakt dit momenteel echter wel mogelijk. Uitgaande van een beperkt aantal basale vergelijkingen die het fysische proces beschrijven is



het mogelijk om middels matrix- en integraalrekening een model op stellen. Gezien het slechte conditiegetal van de te inverteren matrices, is een bijzondere inspanning vereist bij het programmeren. Uiteindelijk is het mogelijk om de stroom en spanningsverdeling in een spoorweg systeem te bepalen. Effectiviteit van de diverse ontwerp oplossingen en economische rendabiliteit kan nu worden getoetst.

Trillingen en dynamica van spoorwegen

Dr. ir. Herke G. Stuit
Movares BV, Utrecht
zaterdag 10.30-11.15 uur

Trillingen en dynamica spelen een belangrijke rol bij het ontwerpen en realiseren van spoorwegen. Bijvoorbeeld bij het combineren van bebouwing in de nabijheid van het spoor en het aanleggen van nieuw spoor voor hoge snelheden. Er kan aanzienlijke trillingshinder optreden als een hoge snelheidstrein voorbijaast.

In 2007 wordt de eerste hoge snelheidslijn in Nederland opgeleverd. Bij deze hoge treinsnelheden kunnen in de specifieke slappe bodemsituatie van Nederland trillingsproblemen ontstaan. Deze problemen treden op wanneer de snelheid van de trein in de buurt komt van de snelheid waarmee trillingen zich in de bodem voortplanten. Het fenomeen is vergelijkbaar met de boegwaaier van schepen of van de geluidsbarrière bij vliegtuigen. Op het moment dat de trein net zo snel gaat als de trillingsvoortplanting in de grond kunnen ontoelaatbare grote vervormingen aan de spoorbaan optreden. Dit fenomeen wordt ook wel de kritieke treinsnelheid genoemd. Tevens neemt dan ook het trillingsniveau in de omgeving sterk toe.



Met de rekenmodellen die bij Movares zijn ontwikkeld worden voordat een nieuwe baan wordt ontworpen, analyses gemaakt van het dynamische gedrag van het nieuwe baanlichaam. Hierbij wordt berekend hoe de trillingen door de trein worden veroorzaakt, hoe ze zich in het baanlichaam voortplanten en hoe ze zich naar de omgeving uitbreiden. Met de berekeningen kan worden bepaald of door de toenemende trillingen de stabiliteit van de baan nog gegarandeerd kan worden en of er veiligheidsrisico's zijn. Misschien is de stabiliteit niet voldoende gegarandeerd en moeten er maatregelen worden getroffen aan de bron (de trein en het spoor) of in het pad van de trillingen (de baan en de bodem). Een van de mogelijkheden om te voorkomen dat er trillingshinder optreedt is de toepassing van een ander baanconcept. Met de modellen kan dan worden bepaald wat het effect is van een ander baanconcept.

Bedrijfswiskunde

Veel havo-leerlingen realiseren zich niet dat hun aanleg voor puzzelen of wiskunde ook beroepsmogelijkheden biedt. De misvatting is dat je met wiskundetalent alleen docent kunt worden. Niets is minder waar. In Nederland zijn er vijf hbo-opleidingen bedrijfs-wiskunde die studenten afleveren met een unieke combinatie van bedrijfskundige kennis, ICT-vaardigheden en wiskundige diepgang. In deze opleiding leren studenten problemen en vragen uit het bedrijfsleven herkennen en formuleren.

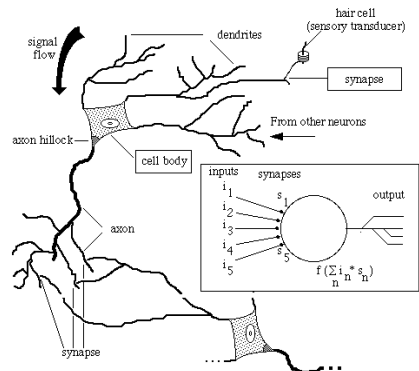
Bedrijfs-wiskundigen houden zich bezig met uitdagingen uit andere vakgebieden, vaak in alledaagse taal en onvolledig geformuleerd. Dit verlangt een groot inlevingsvermogen van de bedrijfs-wiskundige die snel hoofd- van bijzaken moet onderscheiden en de probleemstelling helder en kort kan verwoorden, het liefst in de taal van de wiskunde. In de werkgroepen laten we enkele karakteristieke en actuele toepassingen zien.

Neurale netwerken

Drs. Theo van Uem
Bedrijfs-wiskunde, Hogeschool van Amsterdam
vrijdag 14.00-14.45 uur

Bij voorspellingen op basis van data maakt men vaak gebruik van regressietechnieken. Regressie gaat uit van een lineair of exponentieel verband tussen de gemeten en berekende variabelen. Lineaire of exponentiële verbanden komen echter zelden voor. Het probleem is vaak dat je niet weet welke verbanden je dan beter kunt gebruiken. Hierdoor is een betere voorspelling niet mogelijk. Gelukkig zijn er neurale netwerken. Neurale netwerken leggen verbanden zonder zich iets aan te trekken van de vorm van deze verbanden.

Met deze techniek begeven we ons in de wereld van de artificiële intelligentie. Neurale netwerken zijn in staat, door het aanbieden van representatieve voorbeelden, om problemen op te lossen, zelfs als voor het op te lossen probleem geen oplossings-algoritme aanwezig is. We starten met het perceptron, een basiselement van een neuraal netwerk. Door meerdere perceptrons te laten samenwerken kunnen we neurale netwerken construeren.



Verzekeringswiskunde

Ton Peper, A.C.B. Holding B.V., Alphen aan de Rijn
Jeroen van Wageningen, Nationale Nederlanden, Rotterdam
vrijdag 15.30-17.00 uur (90 minuten)

Een verzekeraar is als iedere andere onderneming bezig met het verkopen van diensten en producten. Deze producten onderscheiden zich van andere omdat ze een risico overnemen waarvan normaliter de gevolgen van dit risico niet door een individu te dragen zijn. Denk aan het plotseling overlijden van een persoon en de daarmee gepaard gaande kosten en even belangrijk, inkomensverval voor de nabestaanden. Ook vallen onder deze categorie risico's van schade op materiële zaken, denk aan brand of autoschade.

Elk individu kan deze risico's onderbrengen bij een verzekeraar en zal hier in de meeste gevallen periodiek een vergoeding voor betalen. In verzekeringsvakjargon zal de verzekeraar de overeenkomst officieel maken door voor de persoon een 'verzekeringspolis' op te maken. Daarmee is deze persoon de 'verzekeringnemer'. De verzekeringnemer betaalt periodiek een vergoeding die ook wel 'verzekeringspremie' wordt genoemd.

Voor het echter zover is zal de verzekeraar moeten gaan bepalen welke vergoeding hij van de verzekeringnemer wil hebben. En hier komen de verzekeringswiskundige berekeningen om de hoek kijken! Met name speelt hier kansberekening een belangrijke rol. De verzekeraar bepaalt aan de hand van statistische gegevens de kans op het voorkomen van het risico. Vervolgens, omdat we hier met geldverkeer te maken hebben, wordt ook intrestvergoeding in de bepaling betrokken. Een laatste belangrijke factor zijn de kosten die gemaakt worden. Wat dat aangaat is de verzekeraar niet anders als een productiebedrijf. De prijs van het 'kale' product wordt met behulp van kansberekening en intrestrekening bepaald en vervolgens worden de gemaakte kosten én te maken kosten voor de toekomst hierin verwerkt. Ook hierbij komt kansberekening en intrestrekening weer om de hoek kijken.

Kortom, een verzekeraar kan zaken doen door gebruik te maken van financiële rekenkunde en door met behulp van kansberekening op diverse manieren de kansen van de te lopen risico's in te schatten.

Multivariate statistiek

Drs. Klaas-Jan Wieringa
Noordelijke Hogeschool Leeuwarden
zaterdag 9.15-10.00 uur

Stel, je hebt van de verkiezingen voor de Tweede Kamer van november 2006 van de tien grootste partijen voor elk van de 459 Nederlandse gemeenten de percentages die ze behaalden. Hoe breng je deze scores overzichtelijk in beeld? Met twee variabelen zou je een grafiek kunnen maken, maar met tien variabelen, namelijk per gemeente de score van tien partijen, lijkt dat onmogelijk. Multivariate statistiek omvat allerlei methodes voor het onderzoeken van meerdere variabelen die onderling afhankelijk zijn. Met één daarvan, principale componenten analyse, kun je uit die tien variabelen de belangrijkste componenten berekenen, dat wil zeggen de lineaire combinaties van de oorspronkelijke variabelen die de variatie in de gegevens het beste weergeven. Je krijgt dan het volgende plaatje:



De gemeenten zijn hier weergegeven in een assenstelsel waarbij de assen overeenkomen met de twee belangrijkste componenten. Het beeld dat zo ontstaat, is wel te verklaren uit het politieke spectrum in Nederland.

De opleiding Bedrijfsviskunde aan de Noordelijke Hogeschool Leeuwarden voert elk jaar in samenwerking met Douwe Egberts de module *casestudy* uit, waarbij Douwe Egberts een opdracht geeft en data verstrekt. Afgelopen jaar is gewerkt met principale componenten analyse om gegevens in beeld te brengen van een aantal soorten koffie die op een dertigtal criteria qua smaak en geur zijn beoordeeld.

In de werkgroep zal worden ingegaan op achtergronden en toepassingen van principale componenten analyse. Hiervoor is enige kennis van statistiek (wat is covariantie) en lineaire algebra (zoals eigenwaarden en eigenvectoren) handig.

Wiskunde en film

Wiskunde en film lijkt in eerste instantie een wat vreemde combinatie. Wiskunde doe je met pen en papier en je verricht een hoop onzichtbaar denkwerk.

In films wordt een wiskundige vaak als een nerd neergezet en dan nog wel één die contactgestoord is en geestelijk niet helemaal in orde. De wiskunde zelf wordt meestal gebruikt als men duidelijk wil maken dat iets moeilijk of onbegrijpelijk is. Het beeld van de wiskunde dat in films wordt opgeroepen, is in het algemeen gesproken niet het beeld dat wij als wiskundeleraren zouden willen laten zien.

Echter door middel van films kunnen we de leerlingen ook aanspreken op een onderdeel van hun belevingswereld en hun aandacht richten op mooie wiskunde.

In de werkgroepen in dit thema zullen veel fragmenten uit films worden vertoond. De wiskunde wordt in de workshops toegelicht, waardoor de fragmenten direct bruikbaar zijn in de klas.

Een wiskundige wandeling met Good Will Hunting

Dr. Dion Gijswijt

Korteweg – de Vries Instituut, Universiteit van Amsterdam

vrijdag 14.00-14.45 uur

De film 'Good Will Hunting' vertelt het verhaal van een zeer getalenteerde, maar met zorgen beladen jongeman, die werkt als schoonmaker bij het MIT. Aan het begin van het jaar daagt professor Lambeau zijn lineaire algebra klas uit met een zeer moeilijk probleem, dat op een prominente plek in de hal, op een groot schoolbord, wordt tentoongesteld. Wie schetst de verbazing van professor Lambeau en zijn collega's wanneer de volgende dag een volledige uitwerking onder de opgave is neergeschreven!



Film in de wiskundeles

Lidy Wesker

Jac. P. Thijsse College, Castricum

vrijdag 15.30-17.00 uur (90 minuten)

zaterdag 10.30-11.15 uur (herhaling: korte versie van vrijdag)

Al enkele jaren ben ik bezig met het verzamelen van films waar wiskunde in voorkomt. Sommige van die films en tv-series blijken goed bruikbaar in de wiskundeles. Leerlingen ervaren het kijken naar filmbeelden als een prettige afwisseling van de wiskundeles terwijl je de leerlingen op een andere manier kan laten kijken naar wiskunde. In deze workshop laat ik zien hoe beeldmateriaal in lessen gebruikt kan worden en hoe de leerlingen naar aanleiding van dit beeldmateriaal aan de slag gaan met wiskunde. Er zal o.a. materiaal te zien zijn uit 'Donald Duck in rekenwonderland', 'Klassieke Mechanica', 'Numb3rs' en 'One'. De beschreven lessen zijn bruikbaar in de onderbouw en bovenbouw van het voorgezet onderwijs.



Omdat vele handen licht werk maken gaan we in deze workshop gezamenlijk werken aan het maken van lesbrieven. Alle gemaakte lesbrieven zullen worden uitgewisseld op de site van de NWD.

De workshop wordt afgesloten met een les (op film) die wordt gegeven door Polya, die je nog lang aan het denken zal zetten. Het antwoord op de door Polya gestelde vraag zal 's avonds in de 'bioscoop' worden gegeven. Is alleen een nerd of genie te vergelijken als Will Hunting in staat om deze puzzel te kraken, of kunnen wijzelf wellicht ook deze wiskunde dwingen haar geheimen prijs te geven? In de workshop zullen we ontdekken wat dit mysterieuze wiskunde probleem is en welke wiskunde achter deze opgave schuil gaat.



Flatland: the movie

Seth Caplan

zaterdag 9.15-10.00 uur

zaterdag 10.30-11.15 uur (herhaling)

FLATLAND: The Movie is an animated film based on Edwin A. Abbott's classic novel. Flatland will be a thirty-minute animated story that includes action, drama, and geometry lessons. This heartfelt movie challenges audiences to grasp the limitations of our own assumptions about reality and to think about the idea of higher dimensions.



The presentation will feature the first European public showing of scenes from the project and will demonstrate how to incorporate lessons from the classic novel into classroom exercises.

Seth Caplan is an award-winning filmmaker who has worked for production companies in New York, Los Angeles, and Amsterdam. Seth co-founded Enspire Learning, where he produced interactive e-learning courses for Harvard Business School and the Department of Education. Seth's thesis film Duncan Removed was student Oscar finalist and his feature film The Cassidy Kids premiered at the 2006 SXSW Film Festival this spring.

A beautiful mind in de speltheorie

Prof. dr. Stef Tijs

Universiteit van Tilburg

zaterdag 10.30-11.15 uur

Hoe te handelen in strategische situaties? Dit is een van de kernvragen in de speltheorie. Na een korte inleiding in de speltheorie (waarbij geen voorkennis wordt verondersteld) concentreren we ons op het baanbrekende werk van John Nash. Hij ontving hiervoor samen met twee andere speltheoretici de Nobelprijs voor de Economie in 1994. In het bijzonder bekijken we Nash-evenwichten voor bimatricespelen. Verder stippen we toepassingen aan in economische situaties zoals veilingen, duopolie en milieu. Aangezien zowel de kanstheorie als de speltheorie hun oorsprong vinden in gezelschapsspelen, vergelijken we de ontwikkeling van beide gebieden.

Wiskunde en modelleren

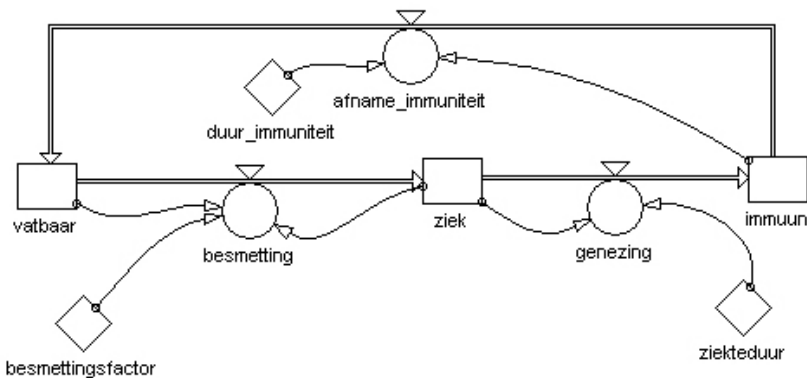
Het opstellen van een wiskundig model is een vak apart. In de bijdragen van dit thema wordt het modelleren vanuit verschillende invalshoeken belicht. Wat is een wiskundig model? Waar en hoe wordt een model gebruikt en wat levert al deze kennis ons op? Uiteraard staan we ook stil bij de vraag of en waarom modelleren een centrale plek verdient in ons huidige onderwijs. Leer je wiskunde door te modelleren of kun je pas modelleren nadat je de nodige wiskundige kennis verworven hebt? Een bonte collectie werkgroepen, die model staat voor de veelzijdigheid van ons vak!

Dynamische modellen

Dr. Paul Drijvers en Dr. Elwin Savelsbergh
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht
vrijdag 14.00 - 15.00 uur (60 minuten)

Allerlei complexe dynamische verschijnselen, zoals de verandering van het klimaat, het verloop van een chemische reactie of de ontwikkeling van een epidemie, zijn wiskundig te modelleren. Omdat dergelijke verschijnselen onze disciplinegrenzen niet respecteren, vereist de ontwikkeling van zo'n model kennis uit meerdere vakgebieden (of domeinen). Bij het modelleren worden domeinspecifieke aannames gedaan en schattingen gemaakt. Het wiskundig model waarin dit proces resulteert, is vaak niet (exact) oplosbaar; wel leveren numerieke simulaties uitkomsten tot op een groot aantal cijfers achter de komma. Als je het model vervolgens doorrekent met iets andere beginwaarden, komt er in sommige gevallen iets heel anders uit en in andere gevallen bijna hetzelfde.

Hoe kun je daar greep op krijgen en hoe betrouwbaar zijn de gevonden antwoorden?



Voor het nieuwe bètavak Natuur, Leven en Technologie, dat zich richt op geïntegreerd bètaonderwijs, wordt een module ‘computerondersteund modelleren’ ontwikkeld.

In deze module bouwen en testen de leerlingen steeds geavanceerdere modellen voor verschijnselen op het grensvlak van wiskunde en natuurwetenschappen. Hierdoor ervaren leerlingen het proces van *the making of science* en maken ze kennis met beperkte voorspelbaarheid. Zowel voor het opstellen van de modellen als voor het doorrekenen wordt gebruik gemaakt van een grafische modelleeromgeving op de computer.

In deze werkgroep wordt het ontwerp van deze module toegelicht. Vervolgens krijgen deelnemers gelegenheid enige ‘hands-on’ ervaring op te doen met het programma Powersim. Een verslag van de eerste praktijkervaringen en een discussie besluiten de werkgroep.

De kracht en beperking van wiskundig modelleren

Prof. dr. Jaap Molenaar

Departement Plantenwetenschappen, Universiteit Wageningen

zaterdag 9.15 - 10.00 uur

Wiskundig modelleren is al een oud ambacht. Vrijwel alle wiskunde komt voort uit de behoefte om de verschijnselen die we rond ons zien te structureren. Door het menselijke abstractievermogen kan dit tot wiskunde leiden waaraan je de herkomst niet meer herkent. Echter, de kunst van het wiskundig modelleren is blijvend actueel. Sterker nog, wiskundige modellen hebben een steeds grotere invloed op de maatschappij, al is dat niet altijd zichtbaar.



In deze voordracht houden we ons bezig met de aard van wiskundig modelleren. Aan de hand van vele voorbeelden, gaan we na wat de essentie is van modelleren en hoe modellen gewaardeerd en gehanteerd moeten worden.

Kortom, we proberen greep te krijgen op zowel de kracht en als de beperking van wiskundig modelleren. Hoewel wiskundige modellen op bijna alle terreinen des levens worden gebruikt, zullen de meeste van de gebruikte voorbeelden stammen uit de biologie en de natuurkunde.

Emergent modelleren

Prof. dr. Koeno Gravemeijer

Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

zaterdag 10.30 - 11.15 uur

Bij modelleren denken we in de eerste plaats aan wiskundig modelleren. Het gaat er dan om een toepassingssituatie zo te modelleren dat we aan de hand van het wiskundige model uitspraken en voorspellingen kunnen doen over de gemodelleerde situatie. In het wiskundeonderwijs komen we ook andere modellen tegen. Namelijk didactische modellen die ontworpen zijn om lastige wiskunde toegankelijk te maken voor de leerlingen. We kunnen daarbij denken aan de blokjes van de heks voor negatieve getallen of aan het balansmodel voor vergelijkingen. Een bezwaar van dit soort modellen is dat de expert weliswaar de wiskunde in de modellen kan herkennen, hoofd- en bijzaken kan onderscheiden en beseft wat de reikwijdte van het model is, maar dat de leerlingen dit allemaal nog niet kunnen.

Als alternatief voor het gebruik van didactische modellen wordt in deze workshop een benadering uitgewerkt die dichter bij het wiskundig modelleren ligt. Uitgangspunt bij deze aanpak is dat leerlingen voor hen betekenisvolle probleemsituaties op een informele wijze modelleren. In het traject dat volgt wordt beoogd dat de leerlingen te gelijktijd het model verder ontwikkelen en de daarmee samenhangende wiskunde ontwikkelen. We spreken in dit verband van emergent modeling (bij gebrek aan een betere vertaling 'emergent modelleren' genoemd) omdat zowel de wiskunde als het model gedurende het proces tot ontwikkeling komt (emerges).

Dit 'emergent modelleren' onderscheidt zich van het wiskundig modelleren en wel op twee manieren. Ten eerste doordat er aanvankelijk geen duidelijke scheiding is tussen het model en de gemodelleerde situatie, waar dit onderscheid bij wiskundig modelleren juist essentieel is. Ten tweede is het modelleren bij emergent modelleren geen doel op zich, maar staat het in dienst van een langlopend leerproces. Het principe van het emergent modelleren dat inmiddels is uitgewerkt in voorbeelden die variëren van het rekenen onder de twintig tot differentiaal vergelijkingen, zal met enkele van zulke voorbeelden worden toegelicht.

Geen economie zonder wiskunde

Een groot stuk van de denkwereld binnen de economie is kwantitatief. Zo is iedereen het afgelopen jaar geconfronteerd met de herziening van ons verzekeringsstelsel en blijft de beursindex de meest prominente graadmeter voor de stand van onze economie. Statistiek, kansrekening, speltheorie en optimaliseren spelen daarbij een belangrijke rol.

Echter, economie is meer dan geld alleen. Zij houdt zich ook bezig met vragen als: Naderen we het einde van een leefbare samenleving? Hoe kan het bestaan van economische evenwichten worden aangetoond? Vroeger ging men dan aan de slag met vele vergelijkingen en onbekenden. Tegenwoordig maakt men gebruik van dekpuntstellingen uit de topologie. In dit thema zullen vooral moderne toepassingen van de wiskunde in de economie aan de orde komen.

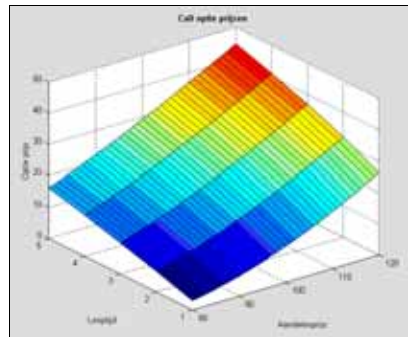
Optieprijsen en verzekeringspremies

Dr. Hans van der Weide en Ir. Jasper Anderluh
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica, TU Delft
zaterdag 9.15-10.15 uur (60 minuten)

Wie weleens een blik werpt op de beurspagina's van een dagblad vindt daar overzichten van optieprijsen. Wat is een optie? Een eenvoudig voorbeeld is een optie op een aandeel. De bezitter van zo'n optie heeft het recht verkregen om op een bepaald tijdstip T in de toekomst voor een bepaalde prijs K dit aandeel te kopen. Hij zal dit natuurlijk alleen doen als de marktprijs S voor het aandeel op tijd T hoger is dan K . Dus de optie kan opgevat worden als een stochastische claim ter grootte van $\max(S - K, 0)$ op tijd T . Opvallend is dat er voor één aandeel wel 200 verschillende opties bestaan, die allemaal een prijs in de markt hebben. Waar komen al deze optieprijsen vandaan? Is er een samenhang tussen aandelenprijs en optieprijsen of tussen de verschillende optieprijsen onderling?

Dergelijke vragen komen aan de orde tijdens deze workshop.

Na een introductie over de optie- en aandelenhandel in de praktijk wordt aandacht besteed aan de rol van wiskunde bij het bepalen van een optieprijs. De deelnemer wordt



optieprijsen voor verschillende aandelenprijsen en looptijden

uitgedaagd zelf aan de hand van een opdracht te ontdekken hoe een optieprijs tot stand komt. Met de aldus verkregen inzichten wordt de optiemarkt bekeken en vergeleken. De prijstheorieën van opties zijn ontwikkeld in de jaren zeventig van de vorige eeuw, de hieraan verbonden namen zijn Black, Scholes en Merton. Een hiermee samenhangende vraag is hoe een financiële instelling, die opties verkoopt, zich kan indekken tegen de risico's.

Tot slot volgt er een discussie binnen de hele groep met als thema de bruikbaarheid van wiskunde in de derivatenmarkt.

De grote rol van wiskunde in de economie

Prof. dr. Arnold Heertje

Naarden

zaterdag 10.30-11.15 uur

In deze voordracht wordt aandacht gegeven aan inhoud en vormgeving van wiskunde in de moderne economische wetenschap. Wiskunde wordt steeds belangrijker bij het beantwoorden van vraagstukken als:

- Hoe kan het bestaan van evenwichten in de economie aangetoond worden?
- Hoe verklaart men conjunctuurbewegingen?

Vroeger ging men bij dergelijke vragen aan de gang met het tellen van onbekenden en het opstellen van grote stelsels vergelijkingen. Tegenwoordig maakt men gebruik van moderne wiskundige technieken, onder andere uit de speltheorie en de chaostheorie.

De spreker kan zich tegen de achtergrond van dit onderwerp niet beperken tot onderdelen van de wiskunde die bij de huidige lerarenopleiding worden behandeld, omdat zodoende het oogmerk van de lezing uit het oog wordt verloren. Niettemin zal een overwegend verbale indruk worden gegeven van het niveau van de geavanceerde wiskunde die tegenwoordig in de economie wordt gebruikt.

Wiskundige helden: Huygens

Als je in Nederland over Huygens praat denkt het geletterde deel dat je het over Constantijn hebt, dichter des vaderlands.

Heb je het daarentegen in het buitenland over Huygens, dan denkt men aan Christiaan, de zoon. Deze beweegt zich in de Gouden Eeuw gemakkelijk op eenzame hoogte tussen mensen als Galilei en Newton, en is dan ook de eerste president van de Parijse Academie, benoemd door Lodewijk XIV himself.

In het jaar dat Nederland ‘reddeloos’ in oorlog is, het rampjaar 1673, komt ook Christiaan Huygens *Horologium Oscillatorium* uit. Dit werk gaat over de isochrone slinger, waarover meer tijdens een van de voordrachten.

Huygens was heel breed ontwikkeld, zo bouwde hij ook zijn eigen telescoop en sleep hij lenzen. Hij publiceerde over de ringen van Saturnus en over de voortplanting van licht. Ook aan deze onderwerpen wordt in dit thema aandacht besteed.

Huygens en de wet van de middelpuntvliedende kracht

Prof. dr. ir. Kees Andriessse

Zeist

vrijdag 14.00-14.45 uur

Op 15 november 1659 bewees Huygens de stelling dat de verhouding (middelpuntvliedende kracht) : (omtreksnelheid) even groot is als de verhouding (omtreksnelheid) : (straal van de cirkel waarin een lichaam rondbeweegt).

Het zal besproken worden – moeilijk is het niet – omdat het historisch zo belangrijk is. Hier werd namelijk voor het eerst de essentie van een kracht begrepen als een versnelling, immers evenredig met (snelheid)² : (lengte), ofwel in $(\text{m/s})^2/\text{m} = \text{m/s}^2$.

Nog in datzelfde jaar 1659 wist Huygens, met behulp van experimenten, af te leiden dat de versnelling van de zwaartekracht $9,8 \text{ m/s}^2$ is. Hij publiceerde zijn vondst echter pas in 1673, achterin zijn boek over het slingeruurwerk *Horologium oscillatorium*, in de vorm van stellingen en zonder het bewijs te leveren. Newton had het resultaat ook gevonden, op zijn eigen manier en ruim vijf jaar later dan Huygens. Toen hij *Horologium oscillatorium* in handen had gekregen en begreep aan wie de prioriteit toekwam, vroeg hij Huygens zijn bewijs te publiceren, want de kracht ‘zal blijken erg nuttig te zijn voor de natuurfilosofie en astronomie, evenals voor de mechanica’. Aan deze kracht, ‘de tweede wet van Newton’, en de relativiteit in een cirkelbeweging zullen enkele historische beschouwingen worden gewijd.

C.D. Andriessse (1993). *Titan kan niet slapen*. Contact.

De cycloïde als iso- en brachistochrone kromme

Prof. dr. Henk Broer, Vakgroep Wiskunde, Universiteit Groningen

Dr. Hans van Lint, Zwolle

vrijdag 15.30-17.00 uur (90 minuten)

In de 17de eeuw was de cycloïde in het nieuws via Christiaan Huygens en Johann Bernoulli. De eerste toonde aan dat de cycloïde isochroon is. Als je een kraal wrijvingsloos langs een cycloïdaal draadprofiel, opgesteld in een verticaal vlak, laat glijden dan ontstaan er oscillaties waarvan de frequentie onafhankelijk is van de amplitude. Dit is bij de gewone slinger, waarbij het draadprofiel een cirkel is, niet het geval. Deze overwegingen werden van belang geacht voor de scheepvaart, waar men zocht naar een klok die permanent de Greenwich tijd aangeeft. In de verdere uitwerking van dit idee gebruikte Huygens (1673) een slingertouwje dat hij liet afwikkelen langs de evoluuft van de cycloïde; wonder boven wonder wederom een cycloïde!

Bernoulli toonde iets later (1695) aan dat de cycloïde ook nog de brachistochroon is: tussen twee punten A en B. De cycloïde is juist de verbinding die de kraal in de kortste tijd aflegt. Bernoulli's bewijs is wonderschoon, omdat hij een mechanisch en optisch principe combineert.

Dit alles wordt deels gepresenteerd en deels in een practicum verder uitgewerkt.

Het principe van Huygens

Prof. dr. Brenny van Groesen

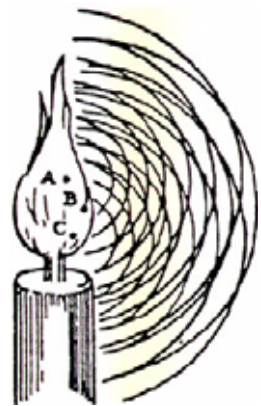
Toegepaste Wiskunde, Universiteit Twente

zaterdag 9.15-10.00 uur

In zijn *Traité de la Lumière* (1690) beschrijft Christiaan Huygens de voortplanting van licht op geometrische wijze. Zijn grote bijdrage is de link die hij legt tussen de afzonderlijke lichtstralen en de golffronten.

Door elk punt op het front op te vatten als een bron waaruit licht in alle richtingen wordt uitgezonden, is de evolutie van het golffront te bepalen.

In de voordracht worden verschillende consequenties van dit principe besproken, en geïllustreerd aan meerdere toepassingen uit de optica en in andere gebieden.



Nieuwsgierigheid in de natuur en de natuurwetenschappen zijn voldoende om het algemene verhaal te volgen; enkele wat meer wiskundig-technische aspecten zijn door leraren wiskunde en natuurkunde tenminste grotendeels te volgen.



Relativiteit volgens Huygens

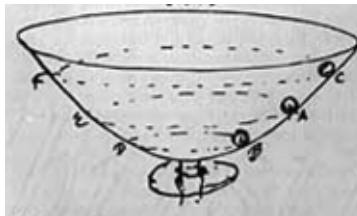
Prof. dr. Vincent Icke
Sterrewacht Leiden, Rijksuniversiteit Leiden
zaterdag 10.30-11.15 uur

In een brief van 10 augustus 1669 aan H. Oldenburg schrijft Christiaan Huygens:

‘...volgens mij kunnen beweging en rust slechts betrekkelijk zijn, en hetzelfde voorwerp waarvan sommigen zeggen dat het in rust is, kan gezegd worden te bewegen ten opzichte van andere voorwerpen, en aldus is de ene beweging niet meer werkelijk dan de andere.’

Door deze en soortgelijke uitspraken, en door de conclusies die hij uit dit symmetrie-principe trok, werd Huygens de uitvinder van de eerste echte relativiteitstheorie: de klassieke mechanica.

V. Icke (2005). *Christiaan Huygens in de onvoltooid verleden toekomstige tijd*. Historische Uitgeverij.



Onverwachte ontwikkelingen in de 20ste eeuwse wiskunde

In de vorige eeuw zijn ontwikkelingen aan te wijzen die ‘onverwacht’ genoemd kunnen worden. Zo werden problemen opgelost met middelen waarvan de noodzaak nooit tevoren was voorzien (bijvoorbeeld het vermoeden van Fermat).

Een andere verrassende ontwikkeling betreft de wiskundige legitimering van het gebruik van het oneindig kleine (dx). Dit intuïtief plausibele begrip werd eerder juist verworpen vanwege een te grote vaagheid, maar kreeg een volwassen plek in de non-standaardanalyse.

De presentaties binnen dit thema zullen sprekende voorbeelden behandelen, die tevens licht werpen op aspecten van de wiskunde die in het populaire beeld vaak onbelicht blijven.

Non-standaardanalyse

Prof. Joop Doorman, M.Sc.

Waarder

vrijdag 14.00-14.45 uur

Non-standaardanalyse draait om de vraag of de oorspronkelijke intuïtie van een ‘oneindig klein verschil tussen twee grootheden’, zoals bijvoorbeeld x en $x + dx$, mathematisch exact behandeld kan worden.



Die oorspronkelijke intuïtie speelde immers een belangrijke rol in de ontwikkeling van het limietbegrip; nochtans bleek spoedig dat de ‘oneindig kleine getallen’ respectievelijk ‘oneindig kleine verschillen’ problematische eigenschappen hebben die er uiteindelijk toe hebben geleid dat de Cauchy-Weierstrass-behandeling van deze noties de thans gangbare standaard-analyse een exacte basis verschaftte.

Rond 1962 werd evenwel, dankzij het werk van A. Robinson, een mathematisch exacte behandeling van de eerder genoemde infinitesimalen mogelijk; daarmee leek een onverwachte wending te worden gegeven aan het denken over ‘oneindig klein’.

De basis voor het rekenen met infinitesimalen zal kort worden behandeld. Voorts zullen enkele illustraties worden gegeven van fraaie vereenvoudiging van lastige stellingen uit de elementaire analyse.

Ten slotte zal worden ingegaan op filosofische kwesties die door deze ontwikkelingen werden opgeroepen.

Gödels onvolledigheidsstelling

Wim Veldman

IMAPP, Faculty of Science, Radboud University Nijmegen

vrijdag 15.30-17.00 uur (90 minuten)

De onvolledigheidsstelling die Kurt Gödel (1906-1978) in 1931 bewees is de meest geruchtmakende stelling uit de wiskundige logica van de 20ste eeuw. In de periode 1879-1931, die begint met de publicatie van Freges *Begriffsschrift*, was men er in geslaagd grote delen van de wiskunde te *formaliseren*. Men was gaan begrijpen dat het wiskundig redeneren gezien kan worden als een formeel en mechanisch proces.

Wat doen we eigenlijk wanneer we de wiskunde formaliseren? We leggen eerst vast wat de *taal* zal zijn. De taal is een verzameling *formules* en elke formule is, zolang we weigeren te zien wat de formule *betekent*, niet meer dan een eindig rijtje bestaande uit letters, cijfers en andere symbolen. Wanneer we de formule *wel* lezen zoals hij bedoeld is, correspondeert met de formule een wiskundige *bewering*, die waar of onwaar is.

Als de verzameling van de formules eenmaal is afgebakend, wijzen we sommige formules aan als *axioma* en spreken we af welke *redeneerstappen* gebruikt mogen worden om uit eindig veel axioma's en eerder bewezen formules nieuwe formules af te leiden. De beslissing of een formule een axioma is of niet, en ook de beslissing of een redeneerstap *mag* of niet, zijn *eenvoudig te nemen, formele beslissingen*: je kijkt hoe de formules, als eindige rijtjes symbolen, er uit zien, en dan weet je het antwoord meteen: je hoeft niet te weten wat de bedoelde betekenis van de formules is.

We kunnen nu het opstellen van *formele bewijzen* die uitgaan van de afgesproken axioma's en slechts gebruik maken van de overeengekomen redeneerstappen, overlaten aan een wiskundig ongeschoolde boekhouder. Geven we hem alle tijd, dan zal hij, door alle axioma's te gebruiken en de redeneerstappen op alle mogelijke manieren toe te passen, op den duur alle *formeel-bewijsbare* formules aan het licht brengen.

We hopen nu dat onze formalisering *volledig* is, dat wil zeggen: we hopen dat elke formule die, wanneer je hem leest zoals hij bedoeld was, een ware bewering oplevert, met behulp van *alleen* de afgesproken redeneerstappen uit *niet meer dan* de afgesproken axioma's kan worden afgeleid. *Gödels stelling leert dat dit ijdele hoop is*. Als het niet om een al te flauw deel van de wiskunde gaat, is *elke formalisering onvolledig*. Gödels stelling dwingt ons na te denken over wat wiskunde nu eigenlijk is.



In de workshop willen we proberen het bewijs van Gödels stelling, dat een combinatie is van het diagonaalargument van Cantor en de paradox van de leugenaar, te doorgronden.

Chaos en onvoorspelbaarheid bij deterministische systemen

Prof. dr. Floris Takens

Vakgroep Wiskunde, Rijksuniversiteit Groningen

zaterdag 9.15-10.00 uur

In de afgelopen ruim honderd jaar is men zich gaan realiseren dat zuiver deterministische systemen vaak praktisch onvoorspelbaar gedrag vertonen. Beroemd was het onderzoek van Poincaré (rond 1890) naar de stabiliteit van het zonnestelsel: zullen de planeten, bewegend volgens de wetten van Newton, tot in het oneindige ‘ongeveer’ dezelfde afstand tot de zon behouden? Veel recenter is de kwantificering die tegenwoordig gegeven wordt van de onzekerheid van de weersvoorspellingen.

Het al dan niet optreden van gevoelige afhankelijkheid van begintoestand – en dat is de essentie van chaos – speelt bij beide problemen een sleutelrol. Met eenvoudige voorbeelden zullen enkele van de belangrijkste concepten van chaos worden toegelicht en in hun historische context geplaatst worden.

Dit figuur geeft de dynamica weer, volgens een sterk vereenvoudigde beschrijving, van een gas dat aan de onderkant verwarmd wordt (zoals bijvoorbeeld de atmosfeer). Hierdoor kwam Lorenz op de gedachte dat de slechte voorspelbaarheid van het weer een gevolg is van het snel (exponentieel) aangroeien van de aanvankelijk kleine onzekerheden omtrent de toestand van de atmosfeer.



Categorieën en functoren

Prof. dr. Michiel Hazewinkel

CWI, Amsterdam

zaterdag 10.30-11.15 uur

Waar gaat wiskunde over? Tot aan het begin van de vorige eeuw richtte die vraag zich op het wezen van wiskundige objecten. In de 20ste eeuw verschoof de aandacht naar een meer pragmatische kijk op de wiskunde, waarin niet de wiskundige objecten zelf centraal staan, maar eerder het soort eigenschappen die groepen van objecten, en afbeeldingen tussen die objecten, gemeen kunnen hebben.

De klasse van wiskundige objecten met eenzelfde structuur heeft de naam ‘categorie’ gekregen en het onderzoek richtte zich vervolgens op vragen als: wat zijn precies de

eigenschappen van de categorie van vectorruimten en lineaire afbeeldingen daartussen, en welke categorieën van wiskundige objecten hebben deze eigenschappen nog meer?

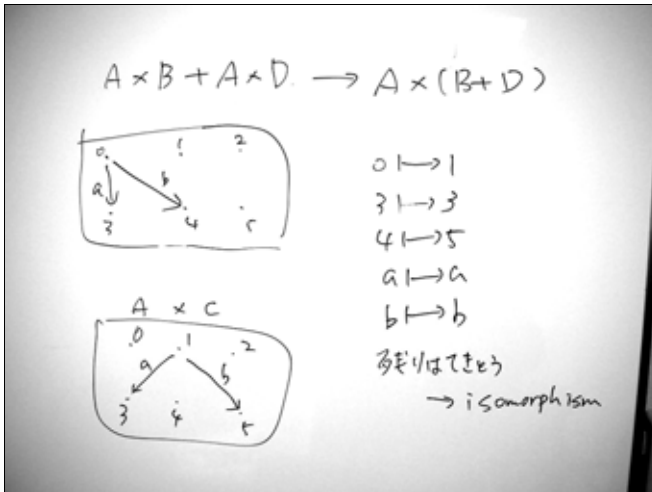
Deze vragen blijken beter aan te sluiten op de wiskundige praktijk en vruchtbaarder voor het onderzoek dan de vraag hoe een lineaire afbeelding tussen vectorruimten precies te beschrijven is als een verzameling (van verzamelingen, van verzamelingen...).

Neem een eindig dimensionale vectorruimte V over de reële getallen \mathbb{R} en kijk naar het duale object, dat wil zeggen de vectorruimte V^* van lineaire functies $V \rightarrow \mathbb{R}$. Dat is weer een vectorruimte van dezelfde dimensie en dus een isomorf ding.

Herhaal dit proces. Dat geeft de dubbele duale vectorruimte V^{**} die ook weer isomorf is, maar dit keer is er een natuurlijke afbeelding $V \rightarrow V^{**}$, $v \rightarrow (\phi \rightarrow \phi(v))$ die de isomorfie geeft.

In het 'enkele duale' geval is er een isomorfie maar geen duidelijke kandidaat voor zo'n afbeelding. Er is (veel) keuze. Dit onderscheid tussen het enkele en het dubbele duale geval doet zich ook voor bij andere vectorruimtes (bijvoorbeeld over een vrije Abelsche groep van eindige rang).

Wat is het verschil tussen de twee situaties? Dat is de vraag waarmee Saunders MacLane en Samuel Eilenberg in 1942 begonnen. De beantwoording van die vraag heeft geleid tot de theorie van categorieën, functoren en natuurlijke transformaties. Nu een onverwacht krachtig stuk gereedschap in vele delen van de wiskunde en haar toepassingen.



Overige werkgroepen en lezingen

Logische puzzels

Dr. Hans van Ditmarsch

Department of Computer Science, University of Otago, New Zealand

vrijdag 15.30-17.00 uur (90 minuten)

Sinds 1940 circuleren er logische puzzeltjes waarin kennis en onwetendheid een rol spelen. Het meest eenvoudige geval gaat als volgt. Stel ik zeg tegen jou: ‘Ik ben net naar het strand geweest maar dat weet jij niet.’ Kan ik dit nu nog eens tegen jou zeggen? Nee, want nadat ik je hierover geïnformeerd heb, weet je het wel. Met andere woorden, sommige beweringen worden onwaar omdat (of eigenlijk ‘nadat’) ze uitgesproken worden. Dit verschijnsel speelt een rol in een heel aantal puzzels en raadsels, maar dan in wat complexere vorm en met vaak een combinatorisch aspect. Bij de workshop leggen we er een paar uit, maar we leggen er ook een paar zonder oplossing aan u voor, om die dan gezamenlijk op te lossen. Een heel bekend raadsel van deze vorm heet ‘Som en Product’. Het is afkomstig van Hans Freudenthal en het is al eens eerder tijdens de Nationale Wiskundedagen aan bod gekomen (NWD 2002).

No. 223. *A* zegt tot *S* en *P*: Ik heb twee gehele getallen x, y gekozen met $1 < x < y$ en $x + y \leq 100$. Straks deel ik $s = x + y$ aan *S* alleen mee, en $p = xy$ aan *P* alleen. Deze mededelingen blijven geheim. Maar jullie moeten je inspannen om het paar (x, y) uit te rekenen.

Hij doet zoals aangekondigd. Nu volgt dit gesprek:

1. *P* zegt: Ik weet het niet.
2. *S* zegt: Dat wist ik al.
3. *P* zegt: Nu weet ik het.
4. *S* zegt: Nu weet ik het ook.
Bepaal het paar (x, y) .

(*H. Freudenthal*).

De Isfahan workshops

Aldine Aaten, Jeanine Daems, Mark Roelands en Daan van Well

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

vrijdag 15.30 - 17.00 uur (90 minuten)

In mei 2006 organiseerde het House of Mathematics in Isfahan, Iran een driedaagse conferentie voor wiskunde en kunstacademiestudenten, onder de titel Math & Art Workshop. Het thema was geometrische patronen in Islamitische kunst. Drie workshops werden ontworpen en gegeven door studenten van Jan Hogendijk. Het bijzon-

dere van deze workshops is dat ze in eerste instantie gemaakt zijn voor wiskundigen en vervolgens zodanig aangepast dat ze zowel voor de kunstenaars als voor de wiskundigen uitdagend genoeg zijn. Daardoor zijn het workshops die in de wiskundeles op ieder niveau gegeven kunnen worden, van vmbo tot hoger onderwijs. Twee van de drie workshops worden door u zelf uitgevoerd: Vlakverdelingen van regelmatige veelhoeken met driehoeken en Penrose vlakverdelingen. Uiteraard omlijst door de persoonlijke ervaringen in Isfahan van de sprekers.



Wiskundewandelingen ontwerpen

Ethel Krans

Rientjesmavo, Maarssen

vrijdag 15.30-17.00 uur (90 minuten)

Een wiskundewandeling is een wandeling langs realistische contexten, waarbij leerlingen zien waarvoor ze wiskunde kunnen gebruiken. Ook kunnen leerlingen worden verast omdat onverwacht veel meer wiskunde op straat ligt dan gedacht.

Het is een aantrekkelijke manier om leerlingen te motiveren. In deze workshop zullen we een korte wiskundewandeling maken en ontwerpen we vragen bij contexten rondom het conferentiecentrum.

Ethel Krans van de Rientjesmavo in Maarssen vertelt over haar ervaringen met 4 vmbo bij een wiskundewandeling in Londen. Zij won de wiskundescholenprijs 2005. Deze workshop is grotendeels een herhaling van de workshop die op de APS-wiskunde Reehorstconferentie in 2004, 2005 en 2006 en vorig jaar op de NWD werd gehouden.

Algebraïsche vaardigheden volgens Euler (1707-1783)

Prof. dr. Jan van Maanen

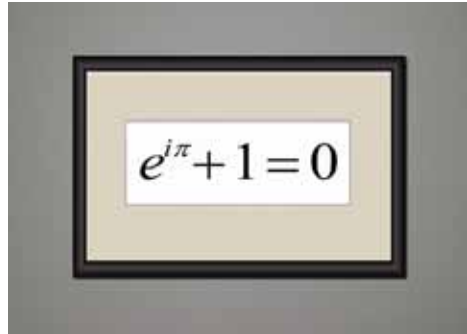
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

zaterdag 9.15-10.00 uur

In 2007 wordt wereldwijd aandacht besteed aan 300 jaar Euler. De kleine Leonhard werd op 15 april 1707 geboren en twee dagen later in Basel gedoopt. Hij studeerde in Basel en werkte in Sint Petersburg (1727-1741) en Berlijn (1741-1766), om zijn laatste, nog zeer actieve jaren weer in Petersburg door te brengen, waar hij op 18 september 1783 overleed. Euler schreef meer dan gewone mensen in een leven kunnen lezen. Zijn lijst met

boeken en tijdschriftartikelen omvat ongeveer 900 nummers en is daarmee een boekje op zich. Zelfs blindheid, vanaf 1771, belette hem niet om te publiceren; hij dicteerde zijn werk, en soms twee werken aan twee secretarissen tegelijk.

In 1770 verscheen in Petersburg Eulers *Vollständige Anleitung zur Algebra*, een leerboek in twee delen, dat in 1773 reeds in Nederlandse vertaling in Amsterdam uitkwam, als *Volledige Inleiding tot de Algebra*. De ondertitel ‘aan de hand geevende een gemakkelijke Oplossing van alle soorten van Rekeningen, zo in de Wiskunde, Koophandel als andere Zaaken’ geeft al aan dat Euler de algebraïsche vaardigheden niet alleen zag op het gebied van snel rekenen met ‘schrijfletters’. Bij Euler stellen letters vanaf het begin grootheden voor. Een grootheid of grootte is bij hem ‘al dat geen, ’t welk voor eene vermeerdering of vermindering vatbaar is, of waar iets bijgevoegd of van afgenomen kan worden. Derhalven is een som gelds eene grootte, dewijl daar iets bij gedaan of van ontnomen kan worden. Insgelijks is het gewicht eene grootheid en dergelijken meer.’ Daarmee besluit hij de eerste paragraaf van zijn *Volledige Inleiding*. Hoe de grote leermeester dat verder uitwerkt, zal ik u voortoveren. Er dient geoefend te worden, maar het gaat wel ergens over. Of, zoals Laplace placht te zeggen: Leest Euler, leest Euler, hij is onze meester in alles.



Zijn 15-jarige leerlingen in Nederland wiskundig geletterd?

Prof. dr. Jan de Lange

Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

zaterdag 10.30-11.15 uur

PISA (Programme for International Student Assessment) is een internationaal vergelijkend onderzoek naar de kwaliteit van diverse aspecten van het onderwijs dat in het leven is geroepen door de landen van de OESO (Organisatie voor Economische Samenwerking en Ontwikkeling). Het onderzoek wordt eens per drie jaar herhaald om de ontwikkelingen in internationaal onderwijsverband op de voet te kunnen volgen, de laatste keer in 2006.



In 2003 stond Nederland op de derde plaats in de ranglijst voor wiskunde, en pers en politiek prezen de kwaliteit van het Nederlandse wiskundeonderwijs. Maar is dat wel terecht? Het Freudenthal Instituut en Cito presenteren met de publicatie *Wiskundige geletterdheid volgens PISA. Hoe staat de vlag erbij?* een analyse van de resultaten van PISA 2003. Niet eerder verscheen zo'n diepgaande analyse van de Nederlandse gegevens. Zou het peil van het Nederlandse wiskundeonderwijs hoger kunnen en hoger moeten? Zijn de resultaten inderdaad minder goed geworden in de loop van de afgelopen jaren? We bekijken opgaven en resultaten en doen aanbevelingen voor het wiskundeonderwijs.

Winnaar workshop

Drie docenten stuurden dit jaar een voorstel in om een werkgroep op de NWD te verzorgen. De jury koos er één uit.

Workshop cellofaan van koffiepakken

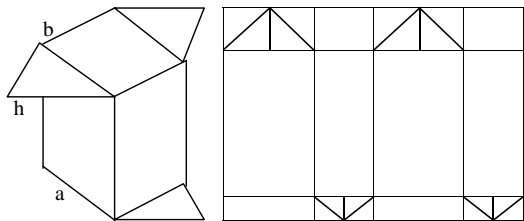
Een betekenisvolle context met veel variatie aan algebraïsche vaardigheden

Rob van Oord

Coenecoopcollege Waddinxveen

vrijdag 14.00-15.00 uur (60 minuten)

Enige tijd geleden werd ik gefascineerd door de vorm van het folie van een snelfiltermalingkoffiepak. Onderaan twee kleine flappen en bovenaan twee grote. Hoe uit een rechthoekig blaadje het viervlak gemaakt (geplakt) kan worden had ik al eens eerder gezien.



In de workshop onderzoeken we hoe uit een viervlak de bewuste vorm gemaakt kan worden. Vervolgens hoe die dan rechtstreeks uit een rechthoekig blaadje gevouwen kan worden. Er volgt een verrassende ontdekking over de hoogte van op dergelijke manier gevouwen pakken. Bij een vaste breedte b (i.v.m. stapelen in de winkelschappen) krijg je een mooi optimaliseringsprobleem voor de oppervlakte van het folie. Minimale oppervlakte = grondstofbesparing. Een deel van de workshop gaat over de oppervlakte van het cellofaan. Een probleem dat in 5 vwo past na het behandelen van de afgeleide van machtsfuncties (x^n). Uitgaande van pakken van 1 liter, de minimale oppervlakte van het cellofaan zoeken waarmee dat kan, onder bepaalde voorwaarden. Een ander deel gaat over het zoeken naar een formule voor de inhoud en deze maximaliseren. Omdat de formule tweedegraads is past dit mooi in 4 vwo. Vervolgens is er een inhoudprobleem met een integraal dat prima past in 6 vwo. Er komt een leuk resultaat over de inhoud van het viervlak en de maximale inhoud van een koffiepak uit zo'n viervlak.

Mijn persoonlijke visie op wiskunde is dat je het ook moet doen. Vouwen, knippen, plakken en kijken. Ik wilde mijn leerlingen ook de ervaring laten opdoen hoe uit een rechthoekig blaadje de cellofaanverpakking van een koffiepak gevouwen kan worden. De leerlingen hebben met veel plezier aan dit probleem gewerkt, en begrijpen ook beter wat het echte probleem is. Hun reacties waren zeer positief, vandaar dat ik deze ervaring graag met jullie wil delen.

Informatiemarkt

Op de informatiemarkt in de Rotonde, in de Boston 12/14 zaal en in de gangen kunt u stands vinden van organisaties, instellingen en instituten die zich op een of andere wijze met wiskunde of wiskundeonderwijs bezighouden.

Er zijn stands van:

- Aarde-NU, Universiteit Utrecht
- Boerhaave Museum
- Busy Brains, Le Clercq
- Casio Benelux
- Discovery truck, RUG
- Educatieve Partners Nederland
- Epsilon Uitgaven
- Freudenthal Instituut
- Kangoeroe
- Koninklijk Wisk. Genootschap
- Lekopro
- Malmberg
- Math4all
- NVvW
- NWO
- Optische Fenomenen
- Productief
- Pythagoras
- Scheltema
- SLO
- Texas Instruments
- Universiteit Utrecht
- Vierkant
- Visiria Uitgeversmij
- Wolters-Noordhoff

De openingstijden van de informatiemarkt zijn:

- vrijdag 10.00 - 11.00 uur
- 12.00 - 18.00 uur
- 19.30 - 20.30 uur
- zaterdag 08.30 - 11.45 uur



Overige activiteiten

De NWD is in belangrijke mate bedoeld als ontmoetingsplaats. De koffie-, thee- en lunchpauzes bieden u de gelegenheid van gedachten te wisselen met collega's. Maar, zoals u hieronder kunt lezen, er is meer te doen!

Avondprogramma

Vrijdagavond na de hoofdlezing is er nog ruim gelegenheid om bij te praten en te ontspannen. In Boston 9 treedt de 'Kweekbak' op, een swingend orkest met veel blazers die (onder andere) lekkere soul ten gehore brengen waar goed op gedanst kan worden.

Vanaf 21:45 uur kunt u verschillende films over wiskunde bekijken. Terry Jones, bekend van Monty Python, gaat de halve wereld rond op zoek naar de geschiedenis van het getal 1. George Polya laat zien wat zijn 'attitude' ten opzichte van lesgeven is. Het verhaal van Andrew Wiles hebben we allemaal al gezien in een mooie documentaire, maar in een musical?

In de Atrium lounge staan Oud Hollandsche Spelen opgesteld. Wat dat zijn, moet u zelf maar ontdekken. Leef u uit en geniet van oerhollandse gezelligheid! Busy Brains verkoopt denkspellen en heeft een stand in de informatiemarkt. Een aantal van hun spellen hebben ze opgesteld om u de gelegenheid te bieden ze eens uit te proberen.

Op enkele plekken in de gangen en lounges staan barren opgesteld waar u een drankje kunt bestellen en een plek kunt zoeken om met elkaar bij te kletsen. Ook het Cheers sportcafé (in de kelder) en de nieuwe centrale bar (achter de receptie) zijn open.

Wij wensen u veel plezier!

Funrun

Een vast onderdeel van de Nationale Wiskunde Dagen is de funrun op zaterdagochtend. We lopen weer het bekende rondje van precies 6 km. Deelname is gratis en als beloning krijgt u na afloop een T-shirt.

Voor de snelste dame en de snelste heer is er een echte (wissel)beker.

De snelste tijd in 2006 was 22.40, gelopen door Bas van Os. Anneleen Post liep met 25.47 de snelste tijd bij de vrouwen.

Vanaf 6.30 uur staat er koffie en thee klaar in de lobby. De start van de funrun 2007 is stipt om 7.00 uur in de morgen, voor de ingang van NH Leeuwenhorst.

Wandelen mag trouwens ook, maar dan adviseren we u het halve rondje van 3 km te doen en wat eerder te vertrekken. U kunt de funrun ook skeeleren.

Er is geen tijdslimiet, maar u wordt vriendelijk verzocht vóór de eerste lezingen terug te zijn.

Nationale Wiskunde Dagen 2008

De veertiende Nationale Wiskunde Dagen zijn gepland op *vrijdag 1 en zaterdag 2 februari 2008*. Bij het organiseren van deze veertiende NWD hopen we gebruik te kunnen maken van uw opmerkingen en suggesties naar aanleiding van de NWD van dit jaar. U ontvangt daartoe ter plekke een *evaluatieformulier*.

Wij hopen dat u uw opmerkingen gedurende de twee dagen wilt noteren en het formulier aan het eind wilt deponeren in de blauwe bakken. Wij stellen uw mening zeer op prijs!

Programmacommissie

Jan Aarts
Henk Broer
Joke Daemen
Joop Doorman
Swier Garst
Tom Goris
Job van de Groep
Jacob Hop
Marjolein Kool

Hans van Lint
Jan van Maanen
Hans Melissen
Sjoerd Rienstra
Michel Roelens
Hans Sterk
Dirk Siersma
Lidy Wesker
Chris Zaal

Uitvoerend comité

Mieke Abels
Peter Boon
Michiel Doorman
Paul Drijvers
Sylvia Eerhart
Tom Goris
Ank v.d. Heiden

Bas Holleman
Henk v.d. Kooij
Jan de Lange
Sonia Palha
Martin v. Reeuwijk
Mariozee Wintermans

Nationale Wiskunde Dagen
Freudenthal Instituut
Postbus 9432, 3506 GK Utrecht
tel. 030-263 55 54, fax 030-266 04 30
email: nwd@fi.uu.nl, website: www.fi.uu.nl/nwd

De Nationale Wiskunde Dagen worden georganiseerd door het Freudenthal Instituut (Universiteit Utrecht) onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde van het Wiskundig Genootschap en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, in samenwerking met het Interfacultair Instituut voor Lerarenopleiding, Onderwijsontwikkeling en Studievaardigheden (IVLOS) van de Universiteit Utrecht.

De dertiende NWD wordt mede mogelijk gemaakt door bijdragen van NH Leeuwenhorst Hotels, Texas Instruments en **getal en ruimte**.



NH Leeuwenhorst
Langelaan 3
2211 XT Noordwijkerhout
telefoon: 0252-37 88 88



getal en ruimte