Non impeditus ab ulla scientia

Sudoku's en Wiskunde

K. P. Hart

3 februari, 2006

Programma

- Tellen
- Makkelijk, medium, moeilijk
- Hoeveel zaadjes?
- Een miljoen dollar verdienen?

Puzzels Tellen

Vooralsnog onbegonnen werk.

Reden: De verzameling puzzels is nog (lang) niet afgebakend. Hierover straks meer.

Latijnse vierkanten tellen

Sudoku-vierkanten zijn speciale Latijnse vierkanten.

Tot nu toe geteld (Sloane's A002860):

n	$a(n)$
1	1
2	2
3	12
4	576
5	161280
6	812851200
7	61479419904000
8	108776032459082956800
9	5524751496156892842531225600
10	9982437658213039871725064756920320000
11	776966836171770144107444346734230682311065600000

`http://www.research.att.com/~njas/sequences/A002860`

Sudoku-vierkanten tellen

Een Sudoku-vierkant is een Latijns vierkant met extra beperkingen.

Hoe te tellen?

Verdeel in groepen, tel iedere groep en
tel de aantallen op.

Beter: verdeel in even grote groepen, tel één groep en vermenigvuldig met aantal groepen.

(IJdele hoop)

Baby-Sudoku

We tellen alle 4×4-sudoku-vierkanten.

We verdelen de totale verzameling in steeds kleinere groepen tot het tellen van één groep makkelijk genoeg is.

1	2		
3	4		

Stap 1 24 **groepen**

Elke linkerbovenhoek bepaalt één groep.

Er zijn $4! = 24$ verschillende linkerbovenhoeken.

Al die groepen zijn even groot: hernummeren.

1	2	3	4
3	4		

Stap 2 $\quad 24 \times 2$ groepen

Elke aanvulling van de eerste rij bepaald een groep.

Twee even grote groepen:

verwissel de laatste twee kolommen.

We bekijken één zo'n groep.

Stap 3 $24 \times 2 \times 2$ **groepen**

1	2	3	4
3	4	1	2

1	2	3	4
3	4	2	1

Elke aanvulling van de tweede rij bepaald een groep.

We bekijken beide groepen.

Stap 4 De groepen tellen

1	2	3	4
3	4	1	2
2		4	
4		2	

1	2	3	4
3	4	2	1
2		4	
4			2

De aanvullingen van de eerste kolom geven, in beide gevallen, even veel completeringen (via verwisseling van de laatste rijen); we krijgen een factor 2. (Bonus: 2 en 4 liggen meteen vast.)

Stap 4 De groepen tellen

1	2	3	4
3	4	1	2
2		4	
4		2	

1	2	3	4
3	4	2	1
2		4	
4			2

Hier zijn alle completeringen.

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3

1	2	3	4
3	4	2	1
2	1	4	3
4	3	1	2

1	2	3	4
3	4	2	1
2	3	4	×
4	1	×	2

Dus: links $2 \times 2 = 4$ en rechts $2 \times 1 = 2$.

(Daarom dus ijdele hoop)

Stap 5 Optellen

De eerste variant levert $24 \times 2 \times 1 \times 2 \times 2$ vierkanten.

De tweede variant levert $24 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1$ vierkanten.

Optellen: in totaal $24 \times 2 \times 1 \times 2 \times 3 = 288$ baby-sudoku-vierkanten.

Echte Sudoku's tellen

Meteen: 9! groepen

Hoe nu verder?

Net als bij baby-sudoku:

vul de eerste drie rijen aan.

Echter . . .

1	2	3						
4	5	6						
7	8	9						

Volgende stappen

. . . reeds bij de eerste rij divergeert de boekhouding, bijvoorbeeld tussen

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6						
7	8	9						

en

1	2	3	4	5	7	6	8	9
4	5	6						
7	8	9						

De eerste

Deze geeft $(3!)^6$ aanvullingen

van de eerste drie rijen:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9			
7	8	9						

De eerste

Deze geeft $(3!)^6$ aanvullingen

van de eerste drie rijen:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9						

De eerste

Deze geeft $(3!)^6$ aanvullingen

van de eerste drie rijen:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3			

De eerste

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6

Deze geeft $(3!)^6$ aanvullingen van de eerste drie rijen:

Verwissel blok 2 en blok 3: dat geeft $2 \times (3!)^6$ aanvullingen (en a priori geen garantie dat die allemaal evenveel completeringen hebben)

De tweede

Deze geeft $3 \times (3!)^6$:

De $(3!)^6$ als eerder;

de factor 3 komt van

de mogelijkheden

$a = 1$, $a = 2$ en $a = 3$

(NB $\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}$)

1	2	3	4	5	7	6	8	9
4	5	6	a	8	9	7	b	c
7	8	9	6	b	c	4	5	a

Alles bij elkaar

Er zijn $2 \times (3!)^6 + 2 \times 9 \times 3 \times (3!)^6 = 2612736$ aanvullingen van de eerste drie rijen. Dat is veel.

Er zijn reducties:

permuteer kolommen binnen blok 2 en ook binnen blok 3

verwissel blok 2 en blok 3

geeft equivalentieklassen die 72 groot zijn: nog maar 36288 tellingen

Getruukte reducties

Voorbeeld

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	9	8	3	1	2
7	8	9	2	3	1	5	6	4

en

1	2	3	9	7	8	4	6	5
4	5	6	1	2	3	8	9	7
7	8	9	4	5	6	2	3	1

hebben even veel completeringen.

Verwissel blok 1 en blok 2

4	5	6	1	2	3	7	8	9
7	9	8	4	5	6	3	1	2
2	3	1	7	8	9	5	6	4

Getruukte reducties

Voorbeeld

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	9	8	3	1	2
7	8	9	2	3	1	5	6	4

en

1	2	3	9	7	8	4	6	5
4	5	6	1	2	3	8	9	7
7	8	9	4	5	6	2	3	1

hebben even veel completeringen.

Verwissel blok 1 en blok 2 en hernummer: $4 \longrightarrow 1$

1	5	6	1	2	3	7	8	9
7	9	8	1	5	6	3	1	2
2	3	1	7	8	9	5	6	1

Getruukte reducties

Voorbeeld

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	9	8	3	1	2
7	8	9	2	3	1	5	6	4

en

1	2	3	9	7	8	4	6	5
4	5	6	1	2	3	8	9	7
7	8	9	4	5	6	2	3	1

hebben even veel completeringen.

Verwissel blok 1 en blok 2 en hernummer: $5 \longrightarrow 2$

1	2	6	1	2	3	7	8	9
7	9	8	1	2	6	3	1	2
2	3	1	7	8	9	2	6	1

Technische Universiteit Delft

Getruukte reducties

Voorbeeld

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	9	8	3	1	2
7	8	9	2	3	1	5	6	4

en

1	2	3	9	7	8	4	6	5
4	5	6	1	2	3	8	9	7
7	8	9	4	5	6	2	3	1

hebben even veel completeringen.

Verwissel blok 1 en blok 2 en hernummer: $6 \longrightarrow 3$

1	2	3	1	2	3	7	8	9
7	9	8	1	2	3	3	1	2
2	3	1	7	8	9	2	3	1

Getruukte reducties

Voorbeeld

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	9	8	3	1	2
7	8	9	2	3	1	5	6	4

en

1	2	3	9	7	8	4	6	5
4	5	6	1	2	3	8	9	7
7	8	9	4	5	6	2	3	1

hebben even veel completeringen.

Verwissel blok 1 en blok 2 en hernummer: $1 \longrightarrow 9$

1	2	3	9	7	8	4	6	5
4	5	6	1	2	3	8	9	7
7	8	9	4	6	5	2	3	1

Uiteindelijk

Na een serie van dergelijke symmetrie- en permutatie-argumenten kan men de totale zoektocht reduceren tot 71 tellingen (dat mag de computer dan doen).

Resultaat: 6 670 903 752 021 072 936 960 Sudoku-vierkanten.

Vergelijk: Latijns: $5{,}52 \times 10^{27}$; Sudoku: $6{,}67 \times 10^{21}$

`http://www.shef.ac.uk/~pm1afj/sudoku/`

Echt verschillende vierkanten

De Sudoku-symmetrie-groep is uitgerekend.

Voortgebracht door: hernummeringen, spiegelingen, rotaties, permutaties van rijen/kolommen 1–3, permutaties van rijen/kolommen 4–6, permutaties van rijen/kolommen 7–9, permutaties van 'dikke' rijen/kolommen.

Er blijven 5 472 730 538 'echt verschillende' suduko-vierkanten over.

`http://www.shef.ac.uk/~pm1afj/sudoku/sudgroup.html`

Een toepassing

Als je de symmetriegroep goed kent kun je met een handvol puzzels een heel boekje vullen.

Michel Dekking, *Meta Sudoku: hoe produceer je een puzzelboekje voor een habbekrats*, Volkskrant.

Hoe bepaal je de moeilijkheidsgraad?

Algemene methode: laat een programma de puzzel oplossen en bijhouden wat voor soort stappen het programma moet doet. Er zijn massa's stappen bedacht, zie:

Matthijs Coster, *Sudoku wiskundig bekeken*, Pythagoras, januari 2006 (word abonnee).

Andries Brouwer's website:

`http://homepages.cwi.nl/~aeb/games/sudoku/solving0.html`

Wikipedia: `http://en.wikipedia.org/wiki/Sudoku`

Een voorbeeld

We nemen drie soorten stappen.

1. Wegstrepen en kijken wat overblijft.

Een voorbeeld

We nemen drie soorten stappen.

1. Wegstrepen en kijken wat overblijft.

2. Uniciteit controleren: een cijfer kan nog maar op één plaats in een rij/kolom/blok staan, vul in.

Een voorbeeld

We nemen drie soorten stappen.

1. Wegstrepen en kijken wat overblijft.

2. Uniciteit controleren: een cijfer kan nog maar op één plaats in een rij/kolom/blok staan, vul in.

3. Rij/kolom in een blok: het cijfer staan binnen een blok in één rij/kolom, streep weg uit rest van die rij/kolom.

Zo komen we tot . . .

Zo komen we tot . . .

De NWD-classificatie van Sudoku's

Makkelijk

Deze kan met alléén wegstrepen:

9				5	6	1		7
		8						3
		4			9			
					5		4	6
7	3		2					
			9			5		
8						6		
5		2	7	3				8

Nummer 21 in *The Guardian Sudoku Book 1*, **Medium**.

Minder makkelijk

Wegstrepen

èn af en toe uniciteit controleren.

	2			9		7		5
3	9				7			
		1				9		8
					3		1	
6				5				7
	5		1					
7		8				4		
			3				7	6
5		2		6			8	

Nummer 1 in *The Guardian Sudoku Book 1*, **Easy**.

Moeilijk

Lukt met

wegstrepen, uniciteit controleren

èn: ‘rij/kolom in een blok’

		6	9					
			3				4	8
			7					2
		3						6
	4						8	
9						5		
2					6			
7	8				4			
					5	9		

Nummer 209 op `www.guardian.co.uk/sudoku`, **Hard**.

Heel moeilijk

Na

wegstrepen,

uniciteits-controles

en ‘rij/kolom in een blok’:

nog geen enkel nieuw cijfer geplaatst.

	5			6				
		1					9	
					7			4
2	4		9					
		8				6		
					5		3	7
7			8					
	9					2		
				3			1	

Nummer 80 in *The Guardian Sudoku Book 1*, **Hard**.

Hoeveel zaadjes?

Hoeveel cijfers moeten er minimaal gegeven zijn om de oplossing uniek te maken?

Zeker acht verschillende cijfers gebruiken

Immers, als twee cijfers, zeg 8 en 9, niet gebruikt zijn verwissel dan in een oplossing alle achten en negens: nog een oplossing.

Hoeveel zaadjes?

Hoeveel cijfers moeten er minimaal gegeven zijn om de oplossing uniek te maken?

Zeventien kan

Er zijn 35396 puzzels met 17 zaadjes gevonden; alle 'irreducibel', er zit geen puzzel met 16 zaadjes in.

`http://www.csse.uwa.edu.au/~gordon/sudokumin.php`

Hier gaapt nog een groot gat . . .

Een bijna-voorbeeld

Deze Sudoku heeft 16 zaadjes.

3 en 9 ontbreken,

dus niet uniek oplosbaar

Hij heeft precies twee oplossingen

Bedacht door H. N. Post (oud-afstudeerder TUD)

					5		8	1
6		4	7					
			2			7		
	8						4	
	1							
				1				5
2						4		
7								

Zaadjes voor Baby-Sudoku

Vier is genoeg

1			
			3
		2	
	4		

→

1			
		1	3
	1	2	
	4		1

→

1			2
	2	1	3
	1	2	
2	4		1

→

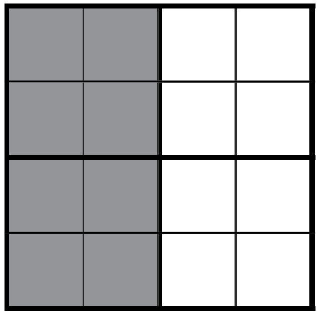
1	3	4	2
4	2	1	3
3	1	2	4
2	4	3	1

Hoe zit het met drie?

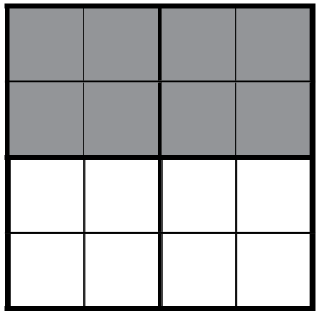
Zaadjes voor Baby-Sudoku

Zeker drie verschillende cijfers gebruiken, dus we nemen 1, 2 en 3.

Wat niet kan:

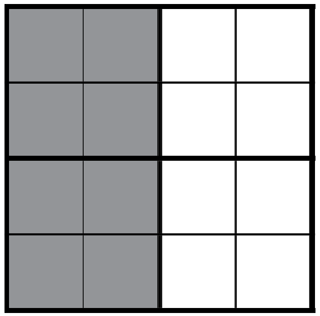


of

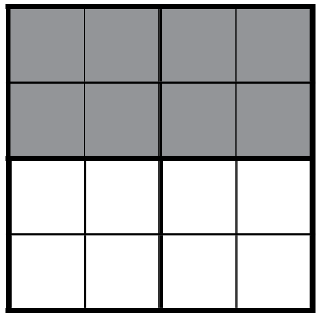


Zaadjes voor Baby-Sudoku

Wat niet kan:



of



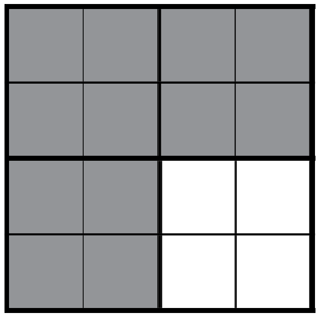
De oplossing is in zo'n situatie nooit uniek:

links kun je twee kolommen verwisselen;

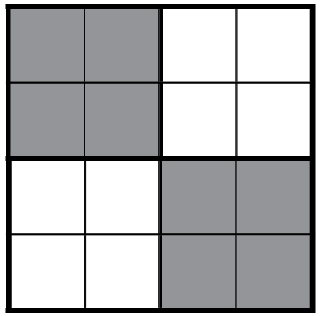
rechts kun je twee rijen verwisselen.

Zaadjes voor Baby-Sudoku

Dus iets als:



of



Zaadjes voor Baby-Sudoku

Na symmetrie-overwegingen blijven zes mogelijkheden over:

1			
3	3	2	
3	3	3	3

Geen van deze werkt.

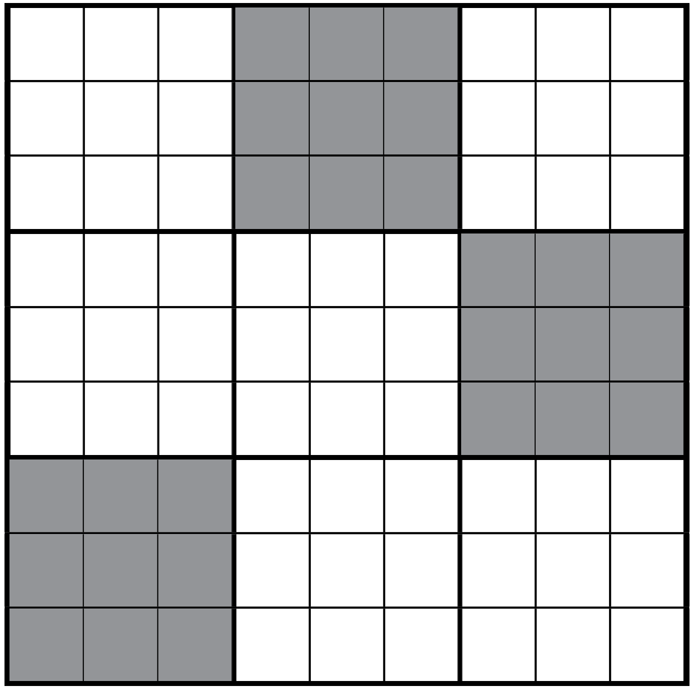
Zaadjes voor Sudoku

Een aanloop tot een bewijs van “acht is niet genoeg”.

In elke ‘dikke’ rij

en elke ‘dikke’ kolom

moet gezaaid zijn

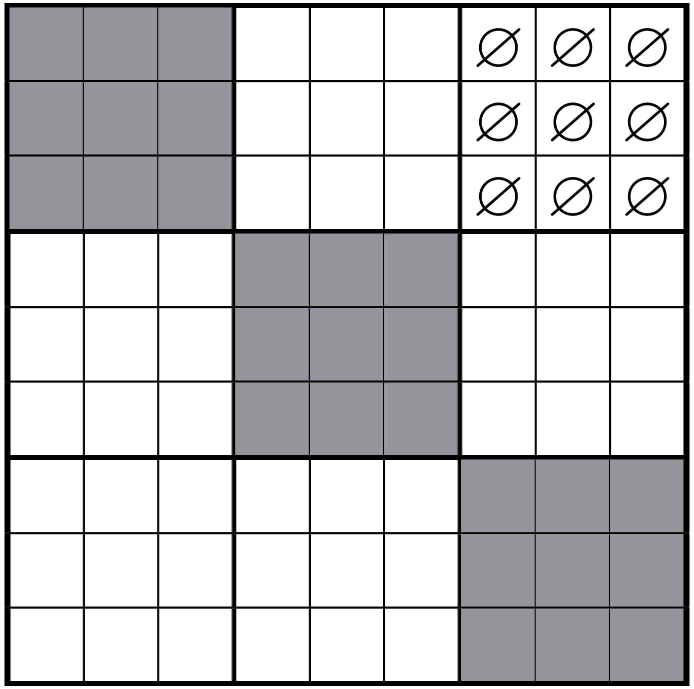


Zaadjes voor Sudoku

Na permutatie komt men

tot deze vorm

$\emptyset$ staat voor een leeg vakje



Zaadjes voor Sudoku

1						$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
						$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
						$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
			2					
						3		

Permuteer binnen de dikke rijen en kolommen en hernummer

Ga Uw gang,

U hoeft maar zo'n $\binom{69}{5} = 11\,238\,513$ mogelijkheden na te lopen . . .

Kansrekening?

Hoe strooit men acht zaadjes?

- kies acht cellen: $\binom{81}{8}$ manieren;
- kies acht cijfers: $\binom{9}{8}$ manieren
- strooi de cijfers: $8!$ manieren

Dus $\binom{81}{8} \times 9 \times 8! = 11\,671\,764\,328\,224\,000$ strooimogelijkheden.

Kansrekening?

11 671 764 328 224 000 is natuurlijk een grove overschatting van het aantal ‘goede’ strooimogelijkheden.

Maar goed: $1{,}167 \times 10^{16} \ll 6{,}6 \times 10^{21}$.

De verhouding is ongeveer 1 : 571 542

Dit bewijst natuurlijk, helaas, niets.

Geld verdienen?

Sudoku's oplossen is net zo moeilijk als Latijnse vierkanten completeren.

Preciezer: $n^2 \times n^2$ Sudoku's oplossen komt overeen met $n \times n$ Latijnse vierkanten completeren.

Dat laatste is NP-volledig, dus algemene Sudoku ook.

Hoe dan?

Maak een speciale Sudoku:

Deze heeft 12 completeringen

want op de lege plekken komen

de drievouden 3, 6 en 9

Elk 3×3 Latijns vierkant past daar

	1	2		4	5		7	8
	4	5		7	8		1	2
	7	8		1	2		4	5
1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7	8	9	1
5	6	7	8	9	1	2	3	4
8	9	1	2	3	4	5	6	7

Vertaling

3a	1	2	3d	4	5	3g	7	8
3b	4	5	3e	7	8	3h	1	2
3c	7	8	3f	1	2	3i	4	5
1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7	8	9	1
5	6	7	8	9	1	2	3	4
8	9	1	2	3	4	5	6	7

$\Leftrightarrow$

a	d	g
b	e	h
c	f	i

P versus NP

P: de problemen die in polynomiale tijd opgelost kunnen worden, bijvoorbeeld:

matrix-eliminatie: het op driehoeksvorm brengen van een $n \times n$-matrix kost $\frac{1}{2}n(n+1)$ vermenigvuldigingen. Sinds kort: vaststellen of een getal priem is (polynomiaal in het aantal cijfers).

P versus NP

NP: de problemen waarvan het controleren van een oplossing polynomiale tijd kost. Handelsreiziger, Minesweeper, $n^2 \times n^2$-Sudoku, . . .

Bewijzen of weerleggen dat $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ is één van de Clay-millenniumproblemen en is dus goed voor een miljoen dollar.

NP-volledig

Het handelsreizigerprobleem is **NP**-volledig: als je bewijst dat dat in **P** zit volgt meteen **P** = **NP**.

Ook **NP**-volledig: Minesweeper en $n^2 \times n^2$-Sudoku

Back-tracking

Bruut geweld: probeer één voor één de vakken te vullen en loop telkens terug als je vastloopt.

Jos Groot, *Sudoku met de computer*, Pythagoras, februari 2006 (word abonnee).

Subtiele Back-tracking

Sudoku is een speciaal geval van een algemeen combinatorisch probleem: gegeven een overdekking van een eindige verzameling, dun deze uit tot een disjuncte overdekking.

In dit geval: een verzameling van 324 punten met een overdekking die uit 729 deelverzamelingen bestaat. De zaadjes komen overeen met elementen uit de overdekking die mee moeten doen.

Subtiele Back-tracking

Er is een fraai algoritme voor het overdekkingsprobleem opgesteld; voor Sudoku komt het neer op wegstrepen tot het niets meer oplevert, back-tracken tot je weer kunt wegstrepen, . . .

Zie `http://en.wikipedia.org/wiki/Dancing_Links`
en de links aldaar