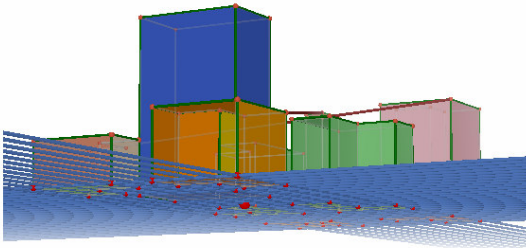


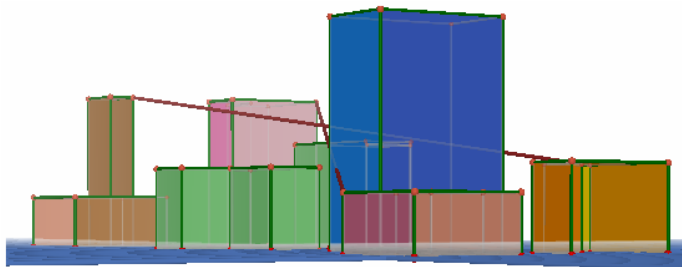
C. Tot slot

De sessie gaf in het begin misschien aanleiding tot verwarring. Met de neus op eigen module en tekenpapier is het soms heel moeilijk bepaalde aanzichten te tekenen. Afstand nemen en het geheel van wat verder af bekijken, lost al veel op. Dat het tekenen na een tijdje voor iedereen op eigen tempo begint te lukken, zorgt voor voldoening. Men begint iets onder de knie te krijgen door te doen, te tonen, te vragen, uit te leggen....

We zijn ervan overtuigd dat een dergelijke sessie uitdagend en motiverend kan zijn voor leerlingen van verschillende leeftijden en/of niveaus, maar toch is dit niet de hoofdreden dat we ze geven. We willen eerder laten ervaren dat opgaven rond ruimtelijk inzicht of ruimtemeetkunde soms snel en niet voor iedereen op hetzelfde moment, moeilijk kunnen worden. Manipuleren, tekenen, kijken is in veel gevallen essentieel om de moeilijkheid uit de weg te ruimen.



Het perspectiefpapier werd gemaakt met Microsoft Word. Voor *zicht op een stad* maakten we gebruik van Cabri 3D. Ben je geïnteresseerd in de bestanden? Mail dan naar chris.standaert@katho.be.



Christine Braeye & Chris Standaert

Wiskunde is democratisch: een spel met kubusjes



A. Verantwoording

In 1997 verschenen in Vlaanderen nieuwe leerplannen wiskunde voor de leerlingen van de 1^{ste} graad S.O. (secundair onderwijs 12-14-jarigen). De formele slinger van de “moderne wiskunde” was al een hele tijd aan het terugslingeren en er scheen ruimte voor andere aanpak en onderwerpen.

Het idee van spiraalopbouw vond ingang en ook op het domein van ruimtelijk inzicht had dit gevolgen. Tot dan manipuleerden leerlingen in de basisschool ruimtelichamen en gebruikten elementaire oppervlakte- en inhoudsformules. Vervolgens duurde het tot in de 3^{de} graad (15-18-jarigen) eer er weer *ruimte* op het programma stond: de synthetische en analytische ruimtemeetkunde.

Met de nieuwe leerplannen werd die breuk hersteld. In elk leerjaar zou een leerling op een geïntegreerde manier met ruimte te maken krijgen, waarbij het *manipuleren en intuïtief zien* veel geleidelijker zou overgaan naar *wiskundig modelleren en redeneren*. Met het vooroordeel “Ruimtelijk inzicht heb je of je hebt het niet”, zagen heel wat leerkrachten de wijzigingen met argwaan tegemoet. Ideeën werden aangereikt, experimenten werden opgezet...

Zoveel jaar later is de ruimte ingeburgerd in elk leerjaar. Maar doen, manipuleren, proberen... zijn toch weer wat naar de achtergrond verdwenen. Leerkrachten vonden in handboeken oefeningen die schijnbaar ook zonder materiaal kunnen en vooral: die eenvoudig evalueerbaar zijn. Straks verschijnen nieuwe didactische wenken bij het leerplan. Ze willen de leerkracht dat ietsje meer kans geven om eigen interesses te accentueren en wellicht ook het onderwerp ruimte iets meer naar de geest, dan naar de letter van het leerplan te behandelen.

Deze werksessie heeft als bedoeling leerlingen/studenten/collega's te confronteren met een aantal ruimtelijke problemen die, afhankelijk van het niveau, intuïtie of redeneervaardigheid aanspreken, maar die alleszins ook nood hebben aan manipuleren en doen. Ze wil een pleidooi zijn voor de stelling dat ruimtelijk inzicht natuurlijk wel opgebouwd en geoefend kan worden.

Hopelijk blijkt ook dat wiskunde best democratisch is: geen aanvaarding van een wiskundige waarheid omdat de stelling het zegt, maar tot wiskundig inzicht komen na overleg en argumentatie.

De sessie is geïnspireerd en gebaseerd op het idee van Pierre Sartiaux (docent wiskunde Département pédagogique Haute Ecole Roi Baudouin Braine-le-Comte). Hij publiceerde o.a. in *Mathématique et Pédagogie* (publicatie van GEM, Groupe d'Enseignement Mathématique) en in *Oh, Moi les maths*, (1997, Desmarets, Jadin, Rouche, Sartiaux, Tallus d'approche, ISBN 2872460608)

B.6 Code of Kunst?

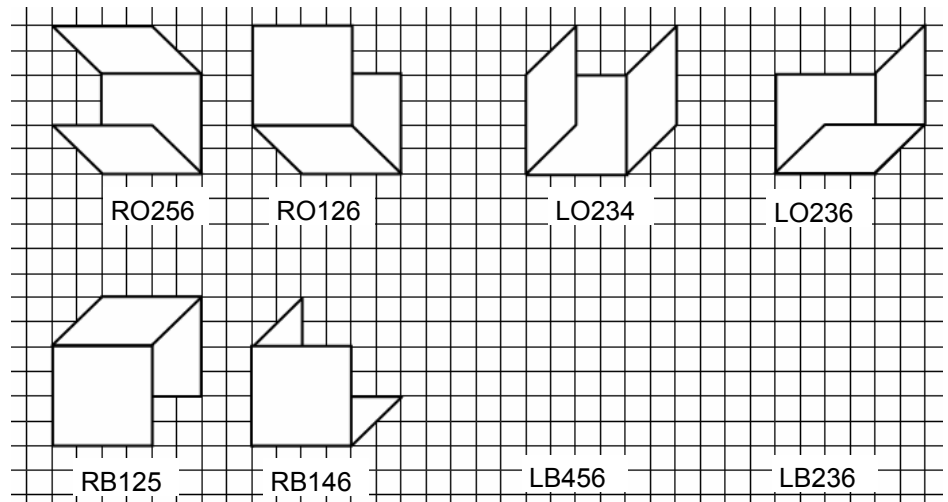
Materiaal: vierkantig raster met voorbeelden en codes

Opdracht 1

Op het vierkantig rooster zijn een aantal quadri-structuren voorgesteld. De Antwerpse graficus Paul Ibou gebruikt die in zijn kunstwerken. In 1980 publiceerde hij een boekje zonder woorden, waarin hij alle quadri's die hij gebruikt voorstelt en codeert.

Je vindt hieronder een aantal dergelijke figuren met een code (afwijkend van Ibou). Probeer de code te begrijpen.

Kan je nu de ontbrekende figuren zelf tekenen?



Opdracht 2

De laatste tekening is een kipfiguur: je wil telkens kiezen tussen twee mentale beelden. Wat is de code van de andere figuur die zich telkens weer opdringt?

Kan je nog zulke duo-codes vinden?

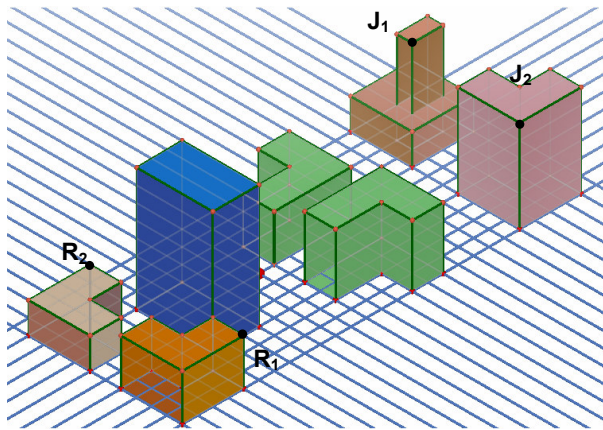
B.5 Zicht op een stad

Materiaal: een stad in perspectief

Opdracht

Op de figuur zie je een aantal gebouwen met verschillende etages.

Alle etages hebben wel dezelfde hoogte.



Op de daken zijn een viertal bijzondere posities aangegeven: J_1 en R_1 , J_2 en R_2 .

De vraag is of J_1 en R_1 (Romeo en Julia?) elkaar kunnen zien. En wat met J_2 en R_2 ?

Commentaar

Hoe de deelnemers tot hun antwoord komen staat hen vrij.

Tekenen ze een plattegrond met kijklijnen? Tekenen ze een zijaanzicht? Misschien gaan ze wel rekenen met afstanden, hellingen of richtingscoëfficiënten. Veel hangt af van persoonlijk inzicht en kennis.

Werkt men in groep volgens één methode of liever individueel? Hoe dan ook zal zorgvuldige kritiek op de verschillende stappen en op de besluiten nodig zijn.

Het bepalen van de hoogte en onderlinge positie van de gebouwen, de afwijkende afmetingen van het meegeleverd rastertje... er zijn veel momenten waarop foutieve beslissingen kunnen worden genomen.

Misschien wil men de situatie wel nabouwen en zelf kijken.

Programma's zoals Cabri 3d laten dit kijken toe, zonder effectief te bouwen.

Eerst redeneren en zeker zijn van je besluit en pas dan kijken is natuurlijker leuker.

B.1 Chinese Puzzel

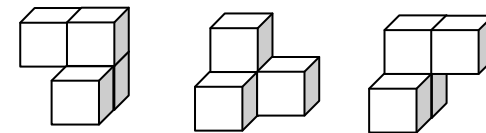
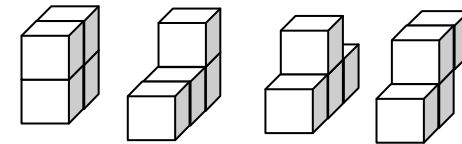
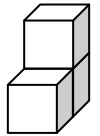
Materiaal: Centicubes

bouwkubusjes van 1 cm^3 , die 1 gram wegen en zinken in water
elk kubusje heeft 4 zijvlakken met een gaatje, 1 met een uitsteeksel,
waardoor kubusbouwsels of ruimtemodules kunnen worden gebouwd.

Opdracht 1

Vertrekkend van een 3-module zoals hiernaast...

...hoeveel verschillende modules kan je maken door 1 kubusje toe te voegen?



Opdracht 2

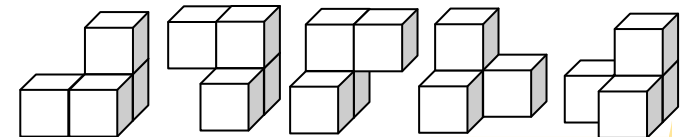
Er blijken 7 verschillende 4-modules te ontstaan, goed voor in het totaal 28 blokjes.

Twee modules zijn elkaars spiegelbeeld. Leg één van beide langs de kant, en je hebt samen met de 3-module, 27 blokjes voor je liggen.

$27 = 3^3$... kan je een grote kubus in elkaar puzzelen?

Commentaar

Vorbereidende opdracht om het materiaal te verkennen. Het is niet noodzakelijk dat de puzzel in de sessie opgelost wordt. Het effectief bouwen van de verschillende modules is soms nodig om in te zien of ze wel of niet verschillend zijn.



B.2 De 5-module

Materiaal: Centicubes , potlood, gum

Perspectiefpapier (verschillende principes)

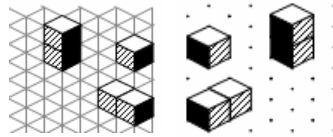
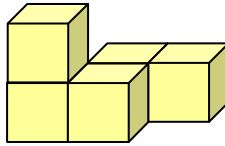
Opdracht 1

Bouw de 5-module zoals in het voorbeeld.

Teken een aanzicht van de module en volg daarbij de afspraken van het perspectiefpapier:

de *zon* zit of links of rechts bovenaan en

werpt een schaduw af zoals bij de voorbeelden



Opdracht 2

Teken op hetzelfde papier andere aanzichten van dezelfde module.

Hoeveel verschillende aanzichten zou je kunnen tekenen?

Opdracht 3

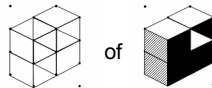
Maak zelf een 5-module en teken aanzichten.

Teken alle mogelijke 5-modules.

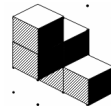
Commentaar

Het werk wordt in groep uitgevoerd, maar binnen een groep wordt verschillende soorten papier gebruikt. Hierdoor kunnen de deelnemers elkaar helpen, maar moeten ze zich daarbij telkens verplaatsen in de context van de andere. Het mogen fouten maken en het helpen van elkaar is in deze fase van groot belang.

De confrontatie met een tweedimensionale voorstelling (verlies van informatie, schijnbare tegenspraak) van een ruimtelichaam duikt al snel op. Het aanbrengen van duidelijke schaduwen is essentieel:



Dat er meer dan 4 aanzichten zijn (de module mag ook op zijn kop!) is een ontdekking die kan leiden tot uitdagende schetsen: het beeld in je eigen hoofd, de module en het papier lijken een strijd aan te gaan met elkaar.



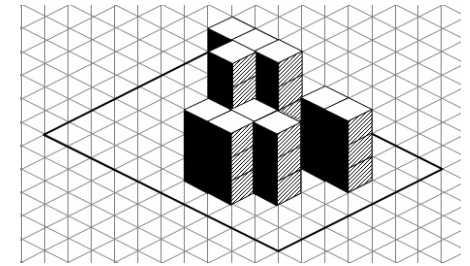
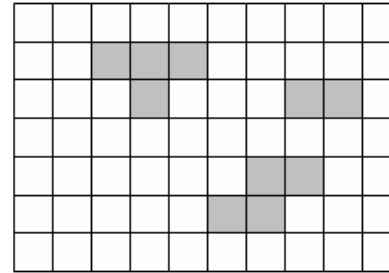
B.4 Vliegen boven een wijk

Materiaal: rasterpapier met plattegrond / perspectiefpapier.

Opdracht

Op het raster zie je de plattegronden van gebouwen die allemaal 3 etages tellen.

Teken het raster en de gebouwen op je perspectiefpapier



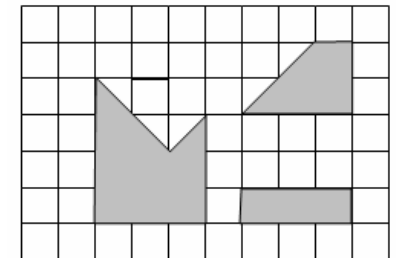
Commentaar

De verschillende gebouwen moeten op de correcte onderlinge afstand voorgesteld worden.

Dat de gebouwen elkaar gedeeltelijk kunnen bedekken zorgt voor een extra moeilijkheid die het voorstellingsvermogen van de deelnemer op de proef stelt.

Sommige gebouwen hebben muren die niet evenwijdig zijn met de rasterlijnen. Zoals bij de eerste schetsen kan opnieuw verwarring ontstaan.

De vraag wat er moet gebeuren met de schaduwafspraken, duikt op. Meestal vindt men hierop binnen de groepjes zelf een antwoord.



Commentaar

Bij deze opdracht moet de deelnemer zich een voorstelling kunnen maken van een ruimtefiguur aan de hand van tweedimensionale voorstellingen. Er zijn meerdere aanzichten nodig om het correcte mentale beeld op te bouwen. Het interpreteren van aangeboden informatie en het controleren ervan vanuit andere invalshoeken zijn belangrijke wiskundige activiteiten.

De verschillende getekende aanzichten en het mentale beeld worden in een volgende stap gecodeerd. In het oorspronkelijk idee van Pierre Sartiaux, werd gevraagd om "...op het raster het aantal etages van elke kolom te coderen binnen een raster dat de omtrek van het gebouw voorstelt." Hij beschrijft hoe deze opdracht voor kinderen nog open genoeg is om hen het gevoel te geven dat ze zelf een eigen codering moeten bedenken. In sessies met oudere leerlingen of collega's werd de opdracht meer open gehouden, alhoewel het aangeboden rasterpapier al een bepaalde richting aangeeft. Misschien wordt de module toch zo geplaatst dat er overhangende delen zijn (misschien was het oorspronkelijk bouwsel niet volgens de afspraken, misschien waren de schetsen niet correct, misschien... voer voor discussie straks!), zodat de te verwachten coderen met getallen een extra spitsvondigheid vereist? Het belang van wiskundig modeleren en noteren komt hier duidelijk naar voor.

Bij de laatste opdracht moet de deelnemer vertrekken van een code, een tweedimensionaal aanzicht tekenen van een ruimtemodel. Er wordt expliciet gevraagd om de module niet na te bouwen. Door de code te begrijpen en die min of meer "automatisch" te vertalen, ontstaat vermoedelijk relatief snel een goede figuur. Code en figuur kunnen dan gecontroleerd worden met het mentale model van het bouwsel. Het wisselen tussen doen (op min of meer geautomatiseerde wijze) en denken is essentieel bij het oplossen van wiskundige problemen.

Bij de controle van eindproduct en oorspronkelijke module komt het taalaspect nog eens duidelijk naar voor. Bij het overleg met de drie betrokken partijen (en iedereen betrokken in drie verschillende discussies?) is sociale vaardigheid (ook van degenen die de sessie leiden?) zeker essentieel.

B.3 Doorschuiven in groep

Materiaal: zoals hiervoor / extra rasterpapier

Groepen:

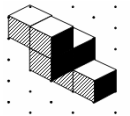
Genummerde groepjes van een gelijk aantal deelnemers volgen elkaar op. Aan iedereen van de groep wordt een letter (A, B, C,...) toegewezen. Op zijn minst zijn er drie opeenvolgende groepjes. In de mate van het mogelijke zitten er in één groepje 3 of 4 deelnemers.

Intermezzo... Getallenprobleem!

Bij 21 deelnemers maak je 7 groepjes. Bij 24 heb je de keuze: 8x3 of 6x4. Bij 25 maak je twee kringen: 3x3 en 4x4. Is er altijd een oplossing uit te dokteren (minstens 3 opeenvolgende groepen van gelijke aantallen 3 of 4)?

Opdracht 1

Bouw een 6- of 7-module, en zorg ervoor dat het mogelijk is ze zo rechtop te plaatsen is, dat er geen "overhangende" delen zijn. Een bouwsel zoals hiernaast mag bijvoorbeeld niet.



Noteer bovenaan je blad je groepsnummer en de letter die jou toegewezen is.

Schets je module vanuit minstens 4 verschillende standpunten; de module moet daarbij niet noodzakelijk "rechtop" staan.

Bewaar je module!

Geef vervolgens je tekening door naar dezelfde letter in de volgende groep.

Opdracht 2

Bekijk de gekregen aanzichten en maak je een mentale voorstelling van het bouwsel. Noteer jouw groepsnummer en jouw letter op het stukje rasterpapier en codeer daarop de informatie die je op zou doen als je zoals een helikopterpiloot boven het gebouw zou vliegen. Geef opnieuw door naar de volgende groep.

Opdracht 3

Teken met de gecodeerde informatie een aanzicht van de module (niet bouwen!).

Vergelijk jouw figuur met de oorspronkelijke 6- of 7 module.