

# Bestaat toeval?

Klaas Landsman  
Radboud Universiteit Nijmegen

# Waarom toeval?

— [ Continue overgang van dagelijks leven naar wiskunde

— [ “cutting edge” research toegankelijk voor vwo-6

— [ Lange en interessante geschiedenis

— [ Toepassing in alle takken van wetenschap

— [ Persoonlijke fascinatie

# Wat is toeval?

— [ Tot 20e eeuw: toeval komt door onwetendheid

— vóór wetenschappelijke revolutie: alles bepaald door God

— na 17e eeuw: natuurwetten zijn deterministisch

— kansrekening “vulgair”: ontwikkeld i.v.m. gokspelen

— [ 20e eeuw: toeval kán intrinsiek zijn

— kwantumtheorie

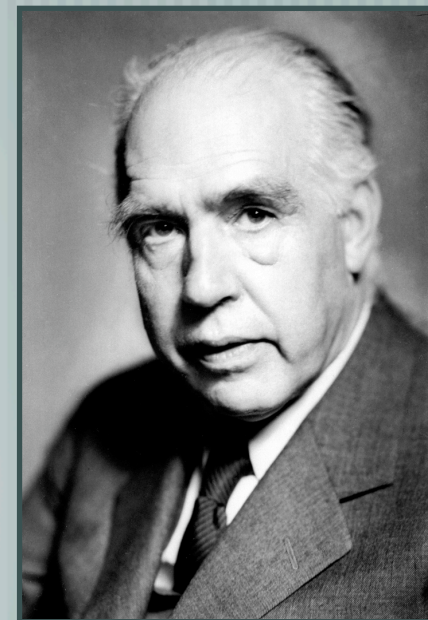
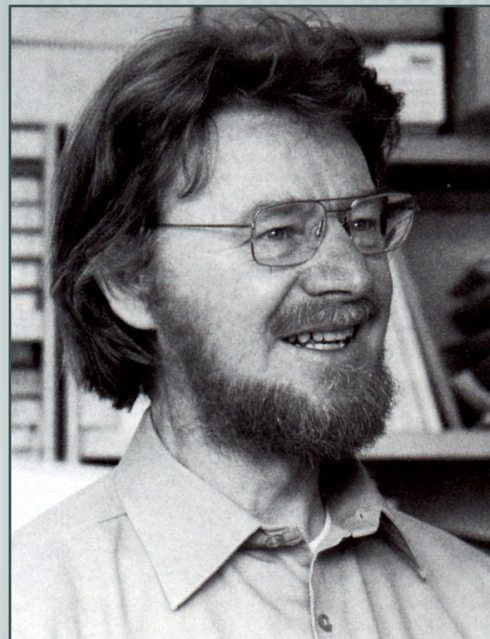
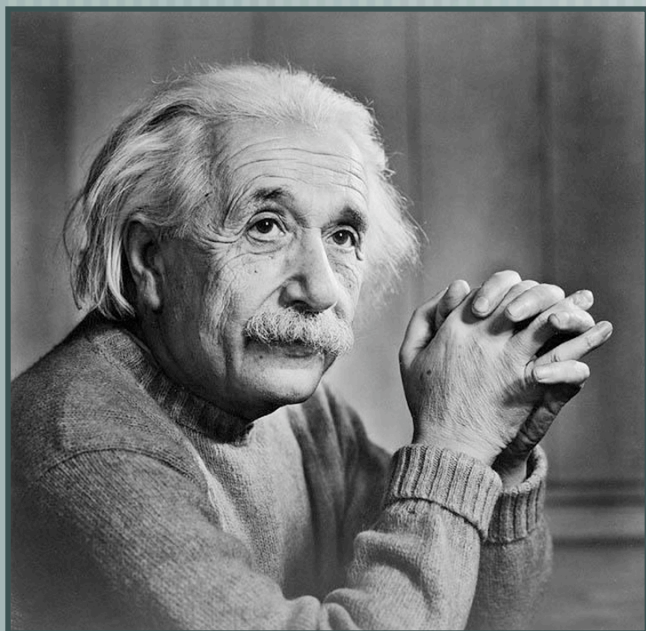
— genetica en bevolkingsstudies

# Einstein-Bohr debat (1927-1949)

— [ Bohr: kwantumprocessen zijn intrinsiek toevallig (radio-activiteit etc.)

— [ Einstein: natuur is deterministisch, kwantumtheorie is onvolledig

— [ Bell (1964): wiskundig argument (kijk naar correlaties)



# Enquête met drie vragen

A	B	C
+	-	-
-	+	+
-	-	+
+	-	-
+	+	-
+	+	+
+	-	-
-	-	+
-	+	+
-	+	-

— [  $P(A \neq C) = 8/10$

— [  $P(A \neq B) = 6/10$

— [  $P(B \neq C) = 4/10$

$$P(A \neq C) \leq P(A \neq B) + P(B \neq C)$$

# Ongelijkheid van Bell

Stelling:  $P(A \neq C) \leq P(A \neq B) + P(B \neq C)$  geldt voor iedere tabel

Bewijs.  $P(A \neq C) = \#(++-)/N + \#(+--)/N + \#(- - +)/N + \#(-++)/N$

$$P(A \neq B) = \#(-+-)/N + \#(+--)/N + \#(+ - +)/N + \#(-++)/N$$

$$P(B \neq C) = \#(++-)/N + \#(-+-)/N + \#(+ - +)/N + \#(- - +)/N$$

$\Rightarrow$  alle vier termen in linkerlid komen ook in rechterlid voor;

$$\text{Stelling} \Leftrightarrow 0 \leq 2(\#(-+-) + \#(+ - +))/N \quad \square$$

# Toeval uit onwetendheid

Stelling: Als een toevalsproces uit onwetendheid voortkomt,  
dan voldoen de correlaties aan “de” ongelijkheid van Bell

Bewijs. i) de aanname houdt in dat:

1. er een verzameling uitkomsten  $X$  is (bijv.  $\{+++ , ++- , \dots , ---\}$ )
2. iedere uitkomst  $x \in X$  een bepaalde kans  $p(x)$  wordt toegedicht

ii) Deze kansen voldoen aan regels kansrekening (“Dutch Book” stelling)

iii) Ongelijkheid van Bell volgt uit directe berekening  $\square$

# Intrinsiek toeval

Stelling: Als een toevalsproces uit onwetendheid voortkomt,  
dan voldoen de correlaties aan de ongelijkheid van Bell

Gevolg: Als een toevalsproces de ongelijkheid van Bell schendt,  
dan is het toeval intrinsiek (i.e. niet uit onwetendheid)

Voorbeeld: Einstein-Podolsky-Rosen correlaties (1935)

Bevestigd door Aspect (1982), Zeilinger (2004), ...

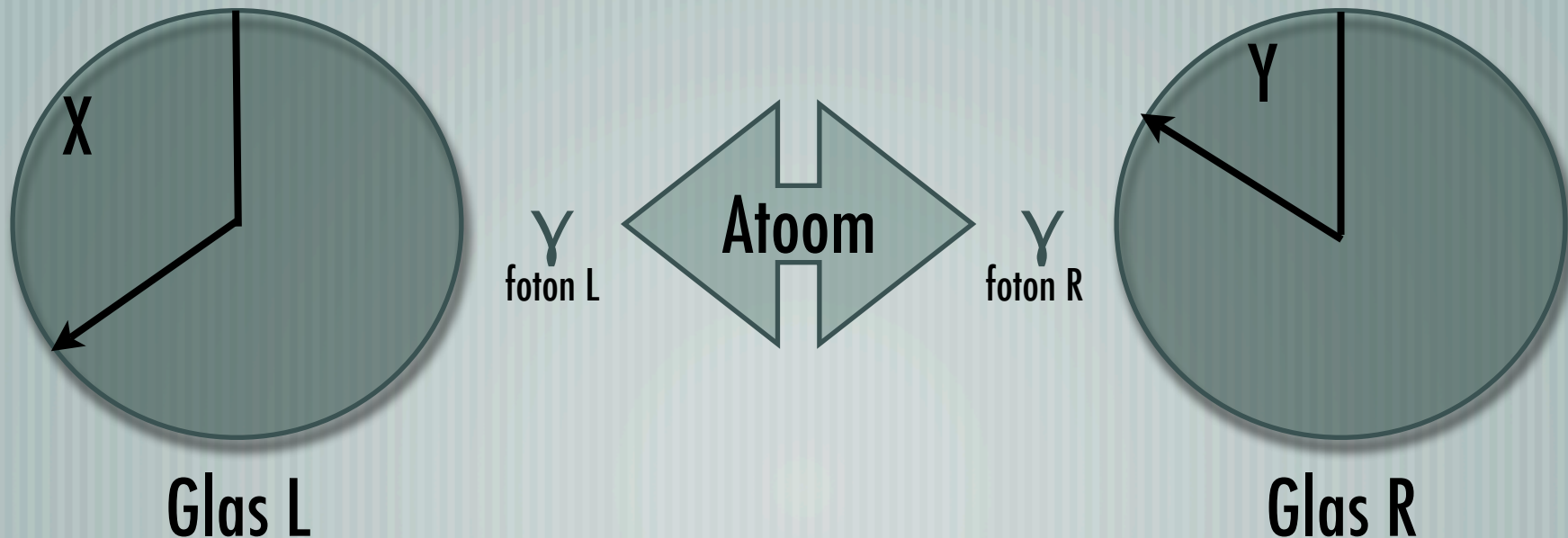


# EPR-correlaties

Vraag X: wordt foton doorgelaten door polaroidglas met hoek X? ( $X = A, B, C$ )

Complicatie: gelijktijdig stellen van vragen X en Y aan 1 foton onmogelijk

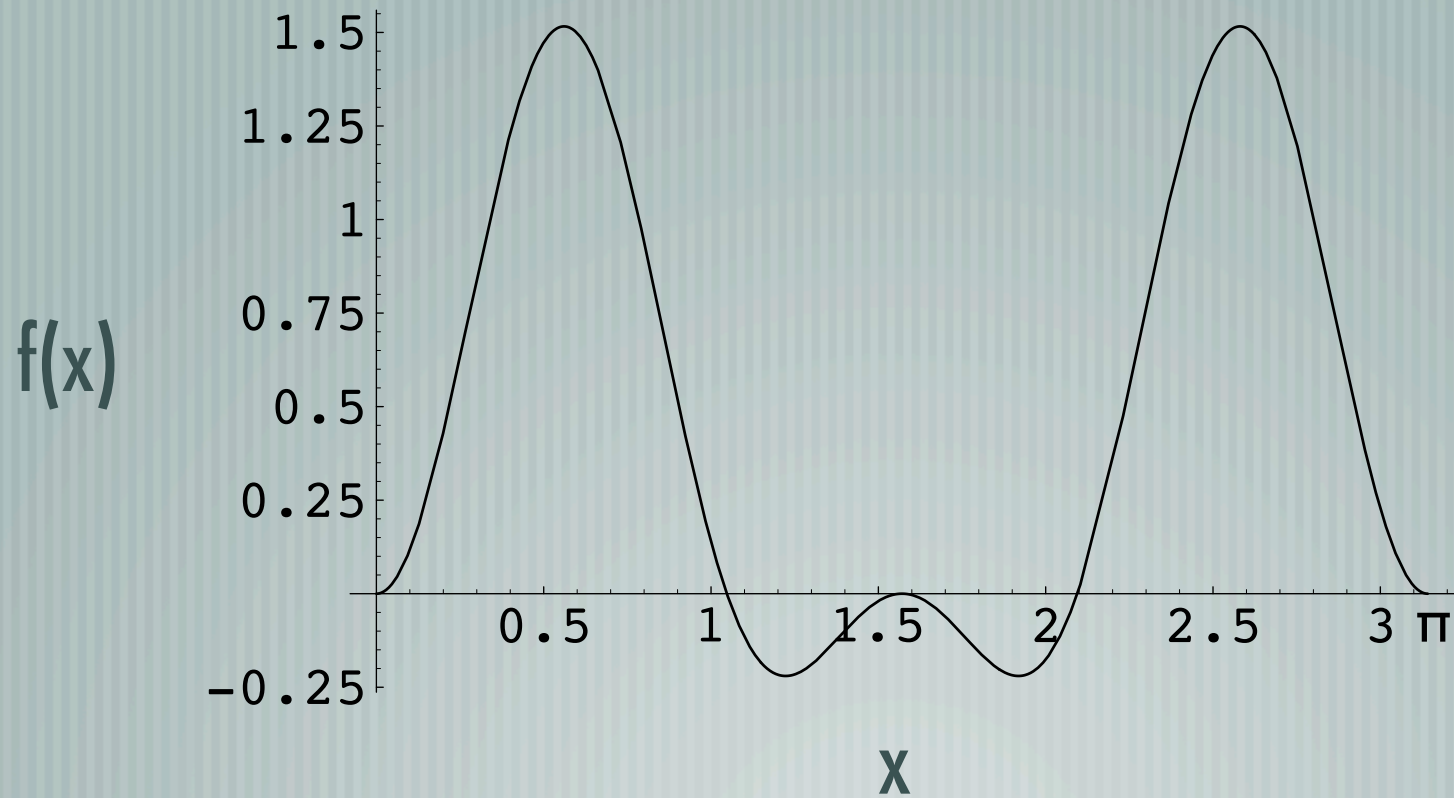
Oplossing: stel X aan linkerhelft, Y aan rechterhelft van gecorreleerd paar



# Test van Bell-ongelijkheid

- [ Meetuitkomst:  $P(X \neq Y) = \sin^2(X-Y)$   $X = A, B, C$
- [ Bell-ongelijkheid:  $0 \leq P(A \neq B) + P(B \neq C) - P(A \neq C)$
- [ Kies nu:  $A = 0, B = 3x, C = x$
- [ Bell-ongelijkheid:  $0 \leq \sin^2(3x) + \sin^2(2x) - \sin^2(x)$
- [ Klopt dit? Kijk op de grafische rekenmachine!

# Toeval bestaat!



$$f(x) = \sin^2(3x) + \sin^2(2x) - \sin^2(x)$$

# Vertaling naar onderwijs

— [ Soort lesmateriaal:

— Profielwerkstuk vwo-6 in NT profiel (op school of universiteit)

— Module in wiskunde D of NL&T

— [ Prikkel leerlingen die exacte studie overwegen

— [ Daag leerlingen uit!

# Inhoud project

— [ Oefenen met tabellen (twee, drie en vier vragen)

— [ Correlaties uit enquêtes voldoen aan Bell-ongelijkheden

— [ Correlaties uit onwetendheid voldoen aan Bell-ongelijkheden

— [ Schending Bell-ongelijkheden in foton-experiment

— [ Kwantumtheorie voor beginners (vectoren & inproduct in platte vlak)

— [ Epiloog (determinisme, vrije wil, bewustzijn, ...)

# Evaluatie try-outs

- [ Profielwerkstukken: 7 leerlingen, 7 middagen (met Evelien Bus)
  - trouwe opkomst (van verre) en goede sfeer
  - grote moeite met eenvoudige oefeningen (huiswerk nooit af)
  - niet open voor fascinatie en diepgang onderwerp
- [ Nijmeegse tweedaagse: 15 leerlingen, 1 dag
  - “Waarom geen financiële wiskunde?”