

Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde

- ## Overzicht geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde

- ## Euclides' axioma's

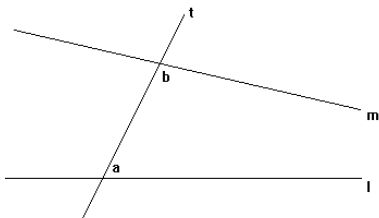
- ### Euclides' postulaten

- ## Vijfde postulaat van Euclides



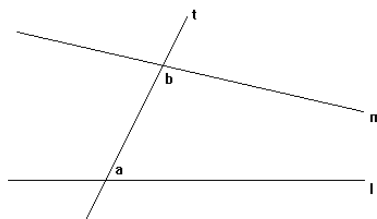
1

Vijfde postulaat van Euclides



Als twee rechte lijnen m en l gesneden worden door een derde rechte lijn t , en de binnenhoeken α en β aan één kant van t zijn samen minder dan 180° , dan snijden m en l elkaar aan diezelfde kant van t .

Formulering parallellenpostulaat door Playfair (1795)



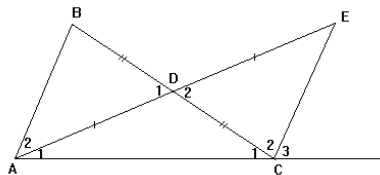
Door een gegeven punt buiten een rechte lijn gaat precies één rechte die evenwijdig is aan de lijn.

Bewijzen zonder parallellenpostulaat

- Propositie I.5: In een gelijkbenige driehoek zijn de basishoeken aan elkaar gelijk.
- Propositie I.15: De overstaande hoeken bij twee snijdende lijnen zijn gelijk.
- Propositie I.17: Twee hoeken van een driehoek zijn samen altijd kleiner dan 180° .

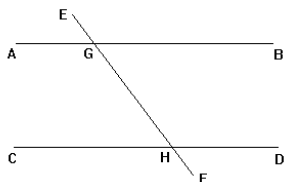
Bewijzen zonder parallellenpostulaat

- Propositie I.16: In een driehoek is de buitenhoek [de hoek tussen een zijde en het verlengde van een andere zijde] groter dan elke niet-aanliggende binnenhoek.



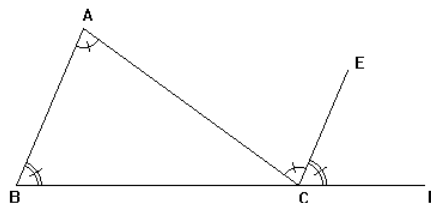
Bewijzen zonder parallellenpostulaat

- Propositie I.28: Als twee lijnen gesneden worden door een derde lijn, waarbij er een paar gelijke F -hoeken optreedt, dan zijn die twee lijnen evenwijdig.



Bewijzen met parallellenpostulaat

- Propositie I.32: In een driehoek is de buitenhoek gelijk aan de som van de niet aanliggende binnenhoeken en de hoeken van een driehoek zijn samen gelijk aan 180° .

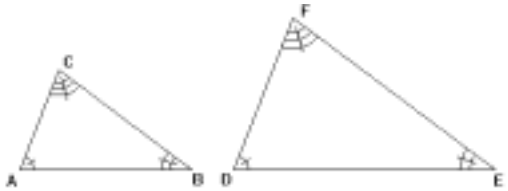


'Bewijzen' van het parallellenpostulaat

Wallis' (17^e eeuw) postulaat:

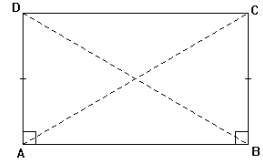
Gegeven een willekeurige driehoek ABC en een lijnstuk DE .

Nu bestaat er een driehoek DEF die gelijkvormig is met driehoek ABC .



Saccheri vierhoeken (1733)

Opdracht: Toon met behulp van gevolgtrekkingen uit de eerste vier postulaten aan dat hoek C = hoek D .



de hoeken bij C en D zijn:

1. rechte hoeken
2. stompe hoeken
3. scherpe hoeken

Grondleggers van de niet-Euclidische meetkunde



Nikolai Ivanovich Lobačevskiĭ
(1792 – 1856)

János Bolyai (1802 – 1860)



Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)

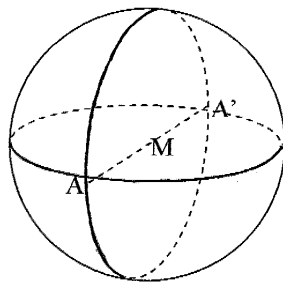


Elliptische meetkunde

Er zijn *geen* evenwijdige lijnen aan een lijn l door een punt P niet op l .

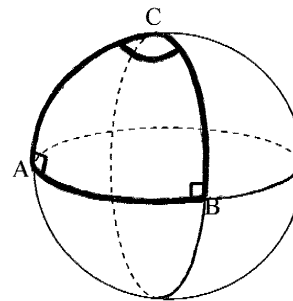
Dat wil zeggen dat alle lijnen elkaar snijden.

Model elliptische meetkunde - Riemann



- een *lijn* is een grote cirkel
- een *punt* is een punt samen met zijn 'tegenvoeter'

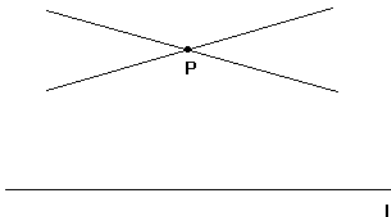
Hoekensom elliptische meetkunde



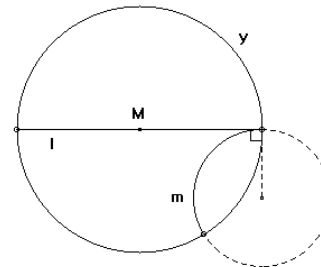
groter dan 180° en kleiner dan 360°

Hyperbolische meetkunde

Er zijn meerdere evenwijdige lijnen aan een lijn l door een punt P niet op l .



Model hyperbolische meetk. - Poincaré



- *lijnen* zijn open cirkelbogen die de cirkel loodrecht snijden
- *hoeken* zijn de hoeken aan de raaklijnen

Onderzoeksoopdrachten

- Onderzoek de betekenis van de niet-Euclidische meetkunde in het werk van Escher



Onderzoeksoopdrachten

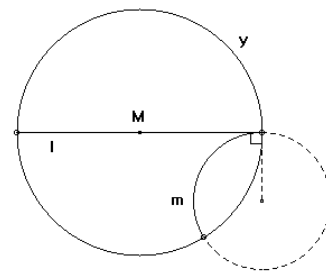
- Schrijf een uitgebreide biografie van een persoon die een belangrijke rol heeft gespeeld in de ontwikkeling van de niet-Euclidische meetkunde
- Onderzoek een ander model van de hyperbolische meetkunde: het Beltrami-Klein model



Onderzoeksopdrachten

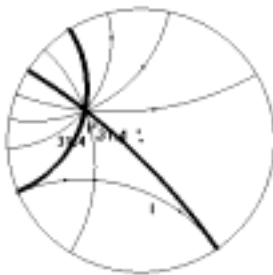
- Onderzoek de verdere betekenis van Gauss voor de wiskunde
- Onderzoek andere resultaten van de hyperbolische meetkunde in het model van Poincaré
- Onderzoek de verdere inhoud en invloed van de *Elementen* van Euclides

De Poincaré-schijf in Cabri



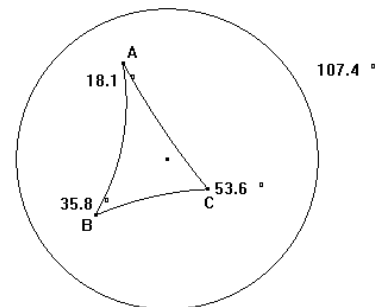
- *lijnen* zijn open cirkelbogen die de cirkel loodrecht snijden
- *hoeken* zijn de hoeken aan de raaklijnen

Hyperbolisch postulaat



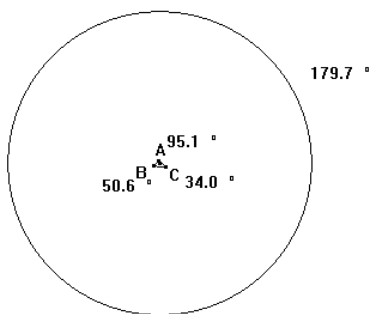
Er zijn meerdere lijnen door een punt *P* buiten een lijn *l* die *l* niet snijden.

Hoekensom hyperbolische meetkunde



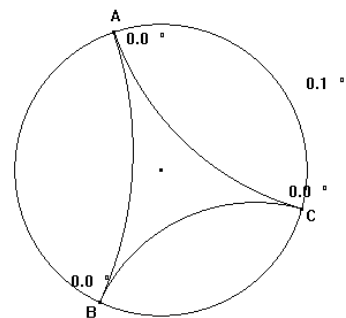
kleiner dan 180°

Hoekensom hyperbolische meetkunde



kleiner dan 180°

Hoekensom hyperbolische meetkunde

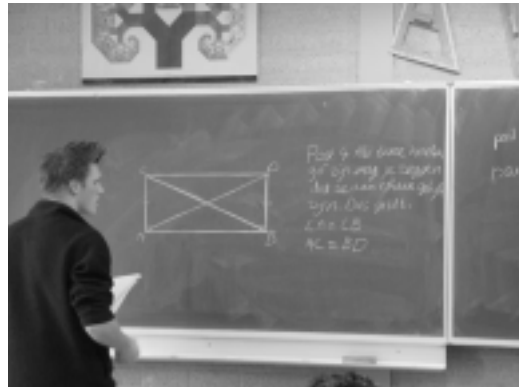


groter dan 0°

Leerlingen aan het werk



Leerlingen aan het werk



Leerlingen aan het werk



Leerlingen aan het werk



Leerlingen aan het werk



Reacties leerlingen

- "Als je voor het eerst hoort dat de drie hoeken van een driehoek samen géén 180° vormen, dan denk je dat kán toch niet. Maar het kan wel. Dit gaat in tegen alles wat je weet. En dat is moeilijk aan te nemen. Maar het is heel interessant."
- "Ik denk dat je als VWO-er wel een beetje moet weten hoe sommige wiskundige methoden tot stand zijn gekomen en welke mensen daar een rol in hebben gespeeld."

Reacties leerlingen

- De stof was voor ons een totaal onbekend gebied: de niet-Euclidische meetkunde. Wat ik in het begin heel verwarrend en onbegrijpelijk vond. Het was totaal anders dan gewend. Maar door het zelf toe te passen met behulp van het programma Cabri werd het steeds duidelijker.
- “Ik vind het juist wel leuk om over die dingen na te denken die je je lastig voor kunt stellen.”

Reacties leerlingen

- “Toen we hiermee begonnen was ik een beetje pessimistisch over het onderwerp. Dit omdat ik niet zo goed ben in meetkunde, en al helemaal niet in de niet-Euclidische meetkunde. Maar daar kwam al snel verandering in. Wat ik ook erg leuk vond was het filosoferen over het feit dat er misschien wel een andere meetkunde kan bestaan. Dit leidde altijd tot leuke discussies.”

Reacties leerlingen

- “Ik vind de tekeningen van Escher echt geweldig. Al van kleins af aan kan ik heel lang kijken naar een tekening van hem, proberen erachter te komen hoe hij het getekend had. Ik vind het dus erg leuk dat ik nu in ieder geval weet hoe zijn tekeningen in een cirkel passen, terwijl het lijkt alsof het oneindig doorgaat.”

Meer info

- <http://members.home.nl/gulikgulikers/WiskundePagina.htm>
- Euclides 78 (8), juni 2003
- <http://www.epsilon-uitgaven.nl/zebra.php>
- www.rug.nl/wiskunde (Masterclass RuG)
- gulikgulikers@home.nl